



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA

A Correspondência AdS/CFT: Um Estudo Introdutório

Diego Marinho Rodrigues

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Orientador: Henrique Boschi Filho

Rio de Janeiro

Março de 2016

R696c Rodrigues, Diego Marinho
 A Correspondência AdS/CFT: Um Estudo Introdutório /
 Diego Marinho Rodrigues. - - Rio de Janeiro, 2016.
 118f.
 Orientador: Henrique Boschi Filho.
 Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio de
 Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Física,
 2016.
 Referências Bibliográficas: f. 108-118.
 1. Teoria de Cordas. 2. Supergravidade. 3. Teorias de
 Calibre. 4. Teoria Conforme. 5. Correspondência AdS/CFT. Filho,
 Henrique Boschi, orient. II. Título.

Agradecimentos

Aos meus pais, cujo suporte fez com que eu chegasse até aqui. Nada disto seria possível sem eles.

Ao Professor Henrique Boschi, pela orientação, paciência e confiança durante estes dois anos do mestrado.

À todos os amigos da UFF, UFRJ, USP, IFT-UNESP (não citarei o nome de todo mundo, porque provavelmente vou esquecer alguém) pelo apoio e estímulo dados, pelos diversos momentos de descontração “na hora do expresso” e em outras ocasiões dentro e fora do IF-UFRJ, e pelas interessantes discussões sobre física e assuntos diversos que me fizeram aprender bastante. Em especial, gostaria de agradecer ao Paulo Henrique Ortega (“bixão”) pela valiosa ajuda com o Latex, ao Luiz Fernando (“monstro”) pelas diversas discussões sobre os assuntos tratados nesta dissertação, além de muitos outros. Por fim, agradeço ao Reginaldo Júnior, meu parceiro de sala, por todas as conversas descontraídas, compartilhamento de ideias e pelo fornecimento das melhores cervejas artesanais do Brasil.

Ao Instituto de Física da UFRJ, por fornecer um ambiente agradável e com excelentes condições para fazer pesquisa.

Ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

Resumo

A Correspondência AdS/CFT: Um Estudo Introdutório

Diego Marinho Rodrigues

Orientador: Henrique Boschi Filho

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Neste trabalho fazemos um estudo da Correspondência AdS/CFT, proposta por Juan Maldacena em 1997, que conjectura a equivalência entre duas teorias distintas: a teoria de cordas tipo IIB no espaço $AdS_5 \times S^5$ (AdS_5 é o espaço de anti-de Sitter 5-dimensional e S^5 é a esfera 5-dimensional) e a teoria conforme (CFT, sigla em inglês) $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills com grupo de calibre $SU(N)$ em 4 dimensões. Este trabalho tem como objetivo fazer um estudo introdutório da Correspondência AdS/CFT focando nos seus aspectos conceituais e nas ideias principais que levaram à sua formulação, incluindo uma aplicação básica. É também um objetivo servir como um guia acessível e didático para o estudante que quer se introduzir no assunto. Após um capítulo cujo propósito é motivar a Correspondência AdS/CFT, revisamos os elementos fundamentais presentes na mesma, tais como: o espaço de anti-de Sitter e o grupo conforme, o limite de baixas energias da teoria de cordas tipo IIB, as soluções de p -branas na supergravidade, Dp -branas em teoria de cordas e sua relação com teorias de calibre. Em seguida, mostramos em detalhes como a Correspondência AdS/CFT foi concebida a partir do modelo de D3-branas e apresenta-

mos a prescrição de Witten para o cálculo de observáveis na Correspondência. No último capítulo, com o objetivo de testar a Correspondência AdS/CFT, tratamos do campo escalar no AdS , calculamos a função de 2-pontos de operadores escalares via supergravidade clássica e verificamos que o resultado está de acordo com o da CFT. Ao final, fazemos uma discussão sobre a dimensão conforme dos operadores escalares em conexão com o limite unitário da CFT e a quantização do campo escalar no AdS .

Palavras-chave: Teoria de Cordas; Supergravidade; Teorias de Calibre; Teoria Conforme; Correspondência AdS/CFT.

Abstract

AdS/CFT Correspondence: An Introductory Study

Diego Marinho Rodrigues

Orientador: Henrique Boschi Filho

Abstract da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

In this work we study the AdS/CFT Correspondence, proposed by Juan Maldacena in 1997, which conjectures an equivalence between two distinct theories: the type IIB string theory on $AdS_5 \times S^5$ spacetime (AdS_5 is the 5-dimensional anti-de Sitter space and S^5 is the 5-dimensional sphere) and a conformal field theory (CFT) namely $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills Theory with $SU(N)$ gauge group in 4 dimensions. This work aims to study the AdS/CFT Correspondence at an introductory level, focusing on the conceptual aspects and the main ideas that led to its formulation, including a basic application. It is also a goal to provide an accessible and pedagogical guide to the student who wants to introduce himself in this subject. After a chapter whose purpose is to motivate the AdS/CFT Correspondence, we review the fundamental elements present in it such as: the anti-de Sitter space and the conformal group, the low-energy limit of type IIB string theory, p -branes solutions in supergravity, Dp -branes in string theory and their relation with gauge theories. In the following, we show in detail how the AdS/CFT Correspondence was conceived from the D3-branes model and we present the Witten prescription to compute observables in the Correspondence. In the last chapter, in order to test the AdS/CFT

Correspondence, we treat the scalar field on AdS , compute the 2-point function for scalar operators via classical supergravity and we confirm that the result is in agreement with the CFT. Finally, we make a discussion on the conformal dimension of scalar operators in connection with the CFT unitarity bound and the quantization of the scalar field on AdS .

Keywords: String Theory; Supergravity; Gauge Theories; Conformal Field Theory; AdS/CFT Correspondence.

Sumário

1	Introdução e Objetivos	1
2	Motivando a Correspondência AdS/CFT	8
2.1	Necessidade de Dimensões Extras	8
2.2	Contando Graus de Liberdade	12
2.3	O Limite de 't Hooft	17
3	O Espaço de anti-de Sitter e o Grupo Conforme	24
3.1	Propriedades Globais do Espaço AdS	25
3.2	Definindo o Espaço AdS_{d+1}	26
3.2.1	Coordenadas de Poincaré	27
3.2.2	Versão Euclideana do AdS_{d+1}	28
3.2.2.1	O Formalismo Euclideano	28
3.2.2.2	Representações Euclidianas do AdS_{d+1}	29
3.3	Invariância Conforme	32
3.3.1	O Grupo Conforme, Álgebras de Lie e Campos Primários	33
3.3.2	Restrições sobre as Funções de Correlação	36
3.4	Isometrias	37
3.4.1	Cálculo das Isometrias do AdS	39
4	A Correspondência AdS/CFT	43
4.1	p -Branas Negras: Soluções Clássicas da Supergravidade	44

4.1.1	Limite de Baixas Energias da Teoria de Cordas Tipo IIB	44
4.1.2	p -Branas: Conceito, Simetria e Soluções Clássicas	46
4.1.2.1	A 3-Brana Extremal	51
4.2	Dp -Branas e Teorias de Calibre	52
4.2.1	D3-Branas: Um Caso Especial	57
4.3	Conjectura de Maldacena: A Correspondência AdS/CFT	59
4.3.1	Prescrição de Witten	67
4.3.1.1	Discussão Sobre o Processo de Renormalização da Ação da Supergravidade no AdS	69
5	Aplicação: O Campo Escalar na Correspondência AdS/CFT	72
5.1	O Campo Escalar no AdS_{d+1}	73
5.2	Cálculo da Função de 2-Pontos $\langle \mathcal{O}_\nu(x)\mathcal{O}_\nu(y) \rangle$	77
5.3	Discussão	84
6	Conclusões e Perspectivas Futuras	89
6.1	Sumário	89
6.2	Perspectivas Futuras	91
	Apêndices	92
A	Dedução das Equações de Einstein com Constante Cosmológica	92
B	Sistemas de Coordenadas	94
B.1	Coordenadas Estereográficas (ou Polares)	94
B.2	Coordenadas Globais	95
B.2.1	Uma Discussão sobre a Quantização dos Campos no AdS	98
C	Formas Diferenciais	100
C.1	Conceitos e Definições Importantes	100

D Solução de Reissner-Nordström em (3+1) Dimensões	103
E Formulário	105
E.1 Funções de Bessel Modificadas: Fórmulas Úteis e Expansões em Série . . .	105
E.2 Integração no Espaço dos Momentos	107
Referências Bibliográficas	108

Capítulo 1

Introdução e Objetivos

A descrição da natureza do ponto de vista fundamental, isto é, a nível microscópico, envolve teorias quânticas de campo. Todas as partículas elementares que observamos (direta ou indiretamente) nos experimentos são excitações de algum campo. Além disto, estas partículas são pontuais, ou seja, sem tamanho algum, e interagem localmente com outras partículas. Embora teoria quântica de campos descreva com bastante precisão fenômenos físicos nas escalas de energia que observamos atualmente nos aceleradores (como o LHC, por exemplo), há fortes indícios de que uma nova física esteja envolvida a muito altas energias, da ordem da escala de Planck (10^{19} GeV). A razão para isto é que nessa escala de energia (ou, equivalentemente, a escalas de distâncias muito pequenas) os efeitos quânticos da gravitação tornam-se importantes. Uma vez que a gravitação, vista como uma teoria quântica de campos, é não-renormalizável, não é possível quantizá-la usando os métodos perturbativos da teoria de campos. No entanto, podemos incorporar a gravitação em uma teoria quântica consistente assumindo que, ao invés de partículas pontuais, os objetos fundamentais da teoria sejam objetos extensos, chamados de cordas e, consequentemente, todas as partículas elementares seriam excitações destas cordas. As cordas, por definição, são objetos unidimensionais, isto é, possuem um comprimento [71]. Além disso, estas cordas podem oscilar dando origem a um espectro de energia (ou de massa). Sendo assim, uma corda oscilante pode gerar diversos tipos de estados de partículas, dependendo do seu nível de oscilação. Um destes estados é associado a uma partícula sem massa e spin

2, ou seja, o gráviton, mediador da interação gravitacional. A teoria de cordas, portanto, se tornou candidata a uma teoria unificada, que descreveria não só a interação gravitacional a nível quântico, mas também todas as interações fundamentais (eletromagnética, fraca e forte). Entretanto, a teoria de cordas só é consistente em espaços-tempo maiores que 4. Na teoria de supercordas, isto é, uma teoria de cordas com supersimetria, a dimensão do espaço-tempo deve ser $D = 10$ ¹. Ainda assim, podemos obter um espaço-tempo quadridimensional através da compactificação das dimensões extras. Por exemplo, podemos considerar uma teoria de cordas definida em $\mathbb{R}^4 \times M_6$, onde M_6 é um espaço compacto 6-dimensional.

Embora a busca por uma teoria quântica da gravitação, sobretudo por uma teoria unificada, seja a motivação para o estudo da teoria de cordas atualmente, não foi dessa maneira que ela foi descoberta. A teoria de cordas foi descoberta como uma tentativa de descrever o grande número de hádrons (partículas que interagem fortemente, tais como o próton e nêutron, por exemplo) que foram descobertos experimentalmente nos anos 60 [39]. Esta teoria foi proposta tendo em vista que as amplitudes de espalhamento destes hádrons têm um comportamento semelhante ao de cordas relativísticas. Em particular, a relação entre massa e spin destas partículas obedece à equação

$$J = \alpha' m^2, \tag{1.1}$$

onde $\alpha' \sim 1 \text{ (GeV)}^{-2}$ é uma constante que ficou conhecida como *inclinação de Regge*. Esta mesma relação é obtida considerando uma corda relativística girando com momento angular J e tensão $T \propto (\alpha')^{-1}$ [102]. Mais tarde foi descoberto que os hádrons são na verdade constituídos de quarks, e estes são descritos pela QCD (“*Quantum Chromodynamics*”), a teoria quântica de campos que descreve as interações fortes.

A QCD por sua vez, é uma teoria de calibre baseada no grupo $SU(3)$. Esta teoria tem uma propriedade chamada de *liberdade assintótica*, isto é, a constante de acopla-

¹Na teoria de cordas bosônicas, isto é, uma teoria cujo espectro de excitação contém apenas bósons, a dimensão do espaço-tempo deve ser $D = 26$.

mento da teoria diminui à medida que a energia aumenta. Por outro lado, no limite de baixas energias, a QCD é fortemente acoplada, impossibilitando a utilização de métodos perturbativos. Atualmente, a abordagem mais utilizada para lidar com a QCD à baixas energias consiste no uso de simulações numéricas na rede [96]. Em 1973, 't Hooft sugeriu que a QCD poderia ser simplificada no limite em que o parâmetro N do grupo $SU(N)$ é grande [91]. A ideia era de que se poderia resolver exatamente a teoria quando $N = \infty$ e, portanto, seria possível fazer uma expansão em $\frac{1}{N}$ [27]. Além disso, como será explicado na seção 2.3, a expansão perturbativa de uma teoria de calibre no limite $N \rightarrow \infty$ é equivalente a uma expansão perturbativa de uma teoria de cordas livre com constante de acoplamento $g_s = \frac{1}{N}$. Portanto, neste sentido, o limite de N grande conecta uma teoria de calibre com uma teoria de cordas. Uma vez que o argumento de 't Hooft vale de uma forma geral, ele sugere que diferentes teorias de calibre corresponderão a diferentes teorias de cordas. Além disso, podemos ainda considerar uma teoria de calibre cuja constante de acoplamento não depende da escala de energia, ou seja, uma teoria conforme.

Motivado por essa conexão entre teorias de calibre e teoria de cordas, sobretudo pelo estudo de D-branas e buracos negros em teoria de cordas (para uma extensa lista de referências sobre estes trabalhos veja [2, 99]), Juan Maldacena [57] conjecturou, em 1997, que uma teoria de cordas tipo IIB definida no espaço $AdS_5 \times S^5$ (AdS_5 é o espaço de *anti-de Sitter* 5-dimensional e S^5 é a esfera 5-dimensional) é equivalente à uma teoria conforme $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills $SU(N)$ em $d = 4$ dimensões. Visto que a teoria de cordas em um espaço que envolve o AdS corresponde à uma teoria de campos conforme (CFT, sigla em inglês) e vice-versa, esta conjectura de Maldacena ficou também conhecida como *Correspondência AdS/CFT*. Note que esta correspondência é uma realização do chamado *Princípio Holográfico* [88, 90], que estabelece que os graus de liberdade de uma teoria de gravitação quântica definida em um espaço $(d+1)$ -dimensional estão contidos na fronteira deste espaço, ou seja, em d dimensões. O termo holográfico deve-se à analogia com a holografia ótica, na qual uma imagem tridimensional é codificada em uma superfície

bidimensional. Portanto, a Correspondência AdS/CFT é uma realização do princípio holográfico no sentido de que uma teoria de cordas, que é também uma teoria de gravitação quântica, definida em um espaço de dimensão superior é descrita em termos de uma teoria de campos definida em um espaço de dimensão inferior que, de fato, é a fronteira do espaço no qual a teoria de cordas está definida (fazendo uma redução dimensional em S^5 podemos obter uma teoria apenas em AdS_5). Em sua formulação original, Maldacena considerou o limite de *baixas energias* da teoria de cordas, que é a *Supergravidade*, em $AdS_5 \times S^5$. Além disso, temos que tomar o limite de N grande, onde N é o parâmetro do grupo de calibre $SU(N)$. Entretanto, a conjectura é de que a teoria de cordas completa, isto é, a nível quântico, seja equivalente a uma teoria de campos conforme e supersimétrica para quaisquer valores dos parâmetros que caracterizam as duas teorias.

Um aspecto interessante desta correspondência é o de *dualidade*, ou seja, um mesmo sistema físico visto sob pontos de vista diferentes, porém equivalentes. Neste caso, a dualidade é do tipo fraco/forte, no sentido de que do lado da teoria de cordas temos um regime de acoplamento fraco (regime perturbativo), ao passo que no lado da teoria de campos temos um regime de acoplamento forte (regime não-perturbativo). Deste modo, podemos utilizar a correspondência para obter informações de sistemas fortemente interagentes, que de outra maneira não conseguiríamos obter devido a dificuldade em lidar com sistemas no regime não-perturbativo (QCD a baixas energias, por exemplo), a partir de uma teoria fracamente acoplada, para a qual temos acesso a métodos perturbativos. Dualidades em teorias de campos já são conhecidas há décadas [23, 24, 85, 97], entretanto esta dualidade é de um tipo novo, entre uma teoria de campos e uma teoria de cordas. Ainda assim, a Correspondência AdS/CFT é de certa forma similar à correspondência entre duas teorias de campo conhecidas: uma teoria de Chern-Simons tridimensional e um modelo WZW (uma teoria conforme em duas dimensões) na fronteira bidimensional [97], ou seja, uma teoria de campo topológica é equivalente à uma teoria conforme não-topológica na fronteira. Uma teoria que inclui gravitação, como a teoria de cordas, é, de

certa maneira, uma teoria topológica, já que temos que integrar sobre todas as métricas de modo que ao final obtemos uma teoria que independe de uma métrica (definição de uma teoria topológica), enquanto que a teoria de campos na fronteira, nos dois casos, é conforme e não-topológica (dependente de uma métrica).

Atualmente, o estudo da Correspondência AdS/CFT abrange diversos domínios da física teórica, tais como a análise do regime não-perturbativo da QCD, a física de buracos negros e gravitação quântica, hidrodinâmica relativística, informação quântica (entropia de emaranhamento) e aplicações à física da matéria condensada (supercondutores holográficos, transições de fase quânticas, átomos frios, etc). Para uma lista de artigos de revisão e referências originais abordando estes diferentes aspectos da Correspondência AdS/CFT, veja [77].

Tendo em vista a grande quantidade de pré-requisitos, sobretudo de teoria de campos/cordas, necessários para um entendimento satisfatório da Correspondência AdS/CFT além da sua ampla gama de aplicações nos diversos ramos da física teórica, desenvolvemos este trabalho articulando-o em torno de dois objetivos:

1. Fazer um estudo introdutório da Correspondência AdS/CFT, focando nos seus aspectos conceituais e nas ideias principais que levaram à sua concepção, incluindo uma aplicação básica.
2. Servir como uma introdução didática para o estudante que quer entrar nessa área de pesquisa.

Um trabalho bastante interessante e detalhado sobre este mesmo assunto (contendo material original), e que serviu de inspiração para este trabalho de revisão é [7]. Artigos de revisão que também foram utilizados na preparação deste trabalho são [2, 30, 51, 61, 69, 72, 77].

Organizamos esta dissertação da seguinte maneira:

No capítulo 2, fornecemos algumas motivações para a Correspondência AdS/CFT e a necessidade de dimensões extras para a realização da mesma, tais como o teorema de

Weinberg-Witten, o próprio Princípio Holográfico e o fato da dimensão extra na Correspondência corresponder à escala de energia da teoria de campos na abordagem do grupo de renormalização. Na continuação, contamos os graus de liberdade de ambos os lados da Correspondência e discutimos suas implicações. Finalmente, refinamos o argumento de 't Hooft, descrito brevemente acima, e mostramos que no limite de 't Hooft a expansão diagramática de uma teoria de calibre é equivalente à expansão perturbativa de uma teoria de cordas.

No capítulo 3, revisamos algumas propriedades importantes do espaço de anti-de Sitter (AdS), os sistemas de coordenadas e representações Euclidianas do AdS . Revisamos também o grupo conforme, sua álgebra de Lie, a definição de campos primários e as restrições impostas pela invariância conforme sobre as funções de correlação. Por fim, discutimos as isometrias de uma métrica e calculamos explicitamente as isometrias do AdS .

No capítulo 4, revisamos os elementos fundamentais que levou Maldacena a conjecturar a Correspondência AdS/CFT, tais como: p -branas, p -branas extremais e a conexão com Dp -branas, Dp -branas em teoria de cordas e a relação entre Dp -branas e teorias de calibre. Em seguida, mostramos em detalhes como a Correspondência AdS/CFT foi concebida a partir do modelo de D3-branas no limite de Maldacena, comparamos as simetrias dos dois lados da Correspondência e apresentamos três versões (forte, intermediária e fraca) da mesma. Por fim, apresentamos a prescrição de Witten para o cálculo de observáveis (funções de correlação) na Correspondência AdS/CFT e discutimos um pouco sobre o processo de renormalização da ação da supergravidade no AdS .

No capítulo 5, tratamos do campo escalar na Correspondência AdS/CFT usando a prescrição de Witten na aproximação da supergravidade clássica, a fim de ilustrar os métodos utilizados nesta área e também como teste da conjectura de Maldacena. Calculamos a função de dois pontos via supergravidade clássica e mostramos que o resultado é exatamente o esperado segundo a teoria de campos conforme. Finalmente, discutimos

aspectos relacionados à prescrição de Witten, as massas das partículas no AdS e a dimensão conforme dos operadores na CFT em conexão com o limite unitário e os modos de quantização do campo escalar no AdS .

Além disso, incluímos cinco apêndices:

No apêndice A, fazemos uma derivação, via princípio variacional, das equações de Einstein com constante cosmológica.

No apêndice B, discutimos outros dois sistemas de coordenadas para representar o espaço AdS : o sistema de coordenadas estereográficas (ou polares) e o sistemas de coordenadas globais, muito úteis na quantização canônica dos campos no AdS . Fazemos uma breve discussão sobre isto também.

No apêndice C, revisamos alguns conceitos e definições básicos de formas diferenciais, um formalismo muito utilizado em supergravidade e teoria de cordas.

No apêndice D, descrevemos a solução de Reissner-Nordström em $(3+1)$ dimensões de modo a fazer um paralelo com as soluções de p -branas discutidas no capítulo 4.

Por fim, no apêndice E fornecemos um formulário sobre funções de Bessel modificadas, expansões em série e o resultado de integrais no espaço dos momentos.

Capítulo 2

Motivando a Correspondência AdS/CFT

Este capítulo tem por objetivo servir de motivação para a Correspondência AdS/CFT. Na seção 2.1, apresentamos três argumentos à favor da necessidade de dimensões extras para a realização da Correspondência, tais como o Teorema de Weinberg-Witten, o Princípio Holográfico e a abordagem do Grupo de Renormalização. Na seção 2.2, contamos os graus de liberdade de ambos os lados da Correspondência e verificamos que eles, de fato, escalam da mesma maneira; em seguida discutimos suas implicações para a Correspondência. Por fim, na seção 2.3, formalizamos o argumento de 't Hooft, descrito no capítulo introdutório, e mostramos que no limite de 't Hooft a expansão perturbativa de uma teoria de calibre é equivalente a expansão perturbativa de uma teoria de cordas.

2.1 Necessidade de Dimensões Extras

Antes de iniciar o primeiro argumento a favor da necessidade de dimensões extras na Correspondência AdS/CFT, vamos inicialmente enunciar o teorema de Weinberg-Witten [95]:

Teorema 2.1 (Weinberg-Witten). *Uma teoria que permite a construção de um tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$ covariante de Lorentz e 4-momento $P^\mu = \int T^{\mu 0} d^3x$ não pode conter partículas sem massa (composta ou elementar) com spin $j > 1$.*

Caso contrário, a existência de um elemento de matriz $\langle p', j | T^{\mu\nu} | p, j \rangle \neq 0$ possuiria propriedades que violariam a covariância de Lorentz. Este teorema proíbe, em particular, a construção de uma teoria de gravitação quântica que preserve a covariância de Lorentz e cujo espectro contenha o gráviton (partícula elementar sem massa e spin 2). No entanto, podemos violar este teorema levando em consideração que ele parte de uma hipótese implícita: o fato da teoria ser definida em $d = 4$ dimensões. Tendo isto em vista, a violação deste teorema decorre do argumento de que o gráviton não precisa pertencer ao mesmo espaço-tempo quadridimensional da teoria em questão que, neste caso, é uma teoria quântica de campos renormalizável em (1+3) dimensões. Este foi o primeiro argumento para motivar a necessidade de dimensões extras na Correspondência AdS/CFT. Porém, este argumento nos leva a seguinte questão: qual é relação entre os graus de liberdade da teoria de gravitação quântica no espaço-tempo com dimensão extra e os graus de liberdade da teoria quântica de campos no espaço-tempo de dimensão inferior? Para responder a essa pergunta vamos ao segundo argumento.

Uma propriedade fundamental de uma teoria de gravitação quântica é o Princípio Holográfico. Ele é proveniente do fato de que a entropia de buracos negros é proporcional à área de seu horizonte de eventos (em unidades de Planck) [8], e não ao volume, como se deveria esperar já que, da termodinâmica, sabemos que a entropia é uma grandeza extensiva (escala com o volume). Além disso, esta é a máxima entropia possível para um sistema com determinada área. O Princípio Holográfico, portanto, sugere que os graus de liberdade de uma teoria de gravitação quântica em determinado volume, V_{d+1} , em $(d+1)$ dimensões, é naturalmente formulado em termos dos graus de liberdade na fronteira (superfície), $\partial V_{d+1} \equiv A_d$, onde ∂V_{d+1} é a fronteira (ou borda) de V_{d+1} , ou, equivalentemente, A_d é a região d -dimensional que delimita o volume V_{d+1} , da mesma forma que uma esfera d -dimensional, S^d , é a superfície que delimita o volume de um bola $(d+1)$ -dimensional, B_{d+1} .

O terceiro argumento consiste na abordagem do Grupo de Renormalização de Wilson-

Kadanoff para a análise de sistemas em uma rede. Para isto, vamos utilizar a discussão feita em [77].

Vamos considerar um sistema não-gravitacional em uma rede com espaçamento a (parâmetro de rede) e Hamiltoniana dada por

$$H = \sum_{x,i} J_i(x, a) \mathcal{O}^i(x), \quad (2.1)$$

onde x denota os diferentes sítios da rede e i nomeia os diferentes operadores $\mathcal{O}^i(x)$. Os $J_i(x, a)$ são as constantes de acoplamento (ou fontes) dos operadores em pontos x da rede distintos. Note que a inclusão do parâmetro de rede a no argumento de J_i é para deixar clara a dependência deste com o espaçamento da rede. Na abordagem do grupo de renormalização, aumentamos o espaçamento de rede e substituímos vários sítios por um único sítio com o valor médio das variáveis da rede. É claro que neste processo a Hamiltoniana (2.1) mantém a sua forma original, contudo operadores diferentes recebem pesos diferentes. Visto que em cada passo estamos aumentando o espaçamento de rede, a , os acoplamentos $J_i(x, a)$ também vão mudar, pois eles são funções de a . Vamos supor que dobramos o espaçamento de rede em cada passo. Dessa forma, teremos uma sucessão de acoplamentos do tipo:

$$J_i(x, a) \rightarrow J_i(x, 2a) \rightarrow J_i(x, 4a) \rightarrow \dots$$

Portanto, neste processo os acoplamentos adquirem uma dependência com a escala (o espaçamento de rede), de modo que podemos escrevê-los como

$$J_i(x, u),$$

onde $u = (a, 2a, 4a, \dots)$ é a escala de comprimento na qual investigamos o sistema. A evolução destes acoplamentos com a escala é determinada por uma equação de fluxo, conhecida como *Equação do Grupo de Renormalização*:

$$u \frac{\partial J_i(x, u)}{\partial u} = \beta_i(J_j(x, u), u), \quad (2.2)$$

onde β_i é a chamada *função β* da i -ésima constante de acoplamento. No regime de acoplamento fraco a função β pode ser obtida via teoria de perturbação. Note uma característica importante desta equação: *ela é local com relação a escala, u* . Portanto, podemos atribuir a esta escala u o papel de uma coordenada espaço-temporal a mais, ou seja, uma dimensão extra, já que a física é local com relação a este parâmetro de escala. Em outras palavras, a sucessão de redes localizadas em diferentes valores de u podem ser consideradas como sendo camadas de um novo espaço de dimensão superior. Além disso, as fontes (ou acoplamentos) $J_i(x, a)$ são interpretadas como campos neste espaço com uma dimensão extra e, por isso, vamos reescrevê-las como

$$J_i(x, u) = \phi_i(x, u). \quad (2.3)$$

Este foi o último argumento à favor da necessidade de dimensões extras. Já antecipando, na Correspondência AdS/CFT os acoplamentos (fontes) da teoria de campos (CFT) no ultravioleta (UV), ou seja, a pequenas distâncias, serão identificados com os campos $\phi_i(x, u)$ avaliados na fronteira deste espaço com dimensão extra. Neste sentido, podemos dizer que a CFT vive na fronteira deste espaço de dimensão superior, como ilustra a Figura 2.1.

Veremos na Correspondência AdS/CFT que a dinâmica dos campos $\phi_i(x, u)$ será descrita por uma ação gravitacional, isto é, com uma métrica dinâmica (que possui sua própria equação de movimento). Estes campos, por sua vez, deverão ter a mesma estrutura tensorial do operador dual $\mathcal{O}^i(x)$ da CFT, de modo que o acoplamento $\phi_i \mathcal{O}^i(x)$ seja um escalar. Por exemplo, um campo escalar será dual a um operador escalar, $\mathcal{O}^i(x)$, um campo vetorial A_μ será dual a uma corrente, J^μ , enquanto que o campo associado a métrica, ou seja, o campo do gráviton, $g_{\mu\nu}$, será dual a um tensor simétrico de rank 2, $T^{\mu\nu}$, que será naturalmente identificado com o tensor de energia momento $T_{\mu\nu}$ da CFT.

Por fim, para concluir esta seção podemos dizer que, a partir desta abordagem do Grupo de Renormalização, a Correspondência AdS/CFT pode ser interpretada como a

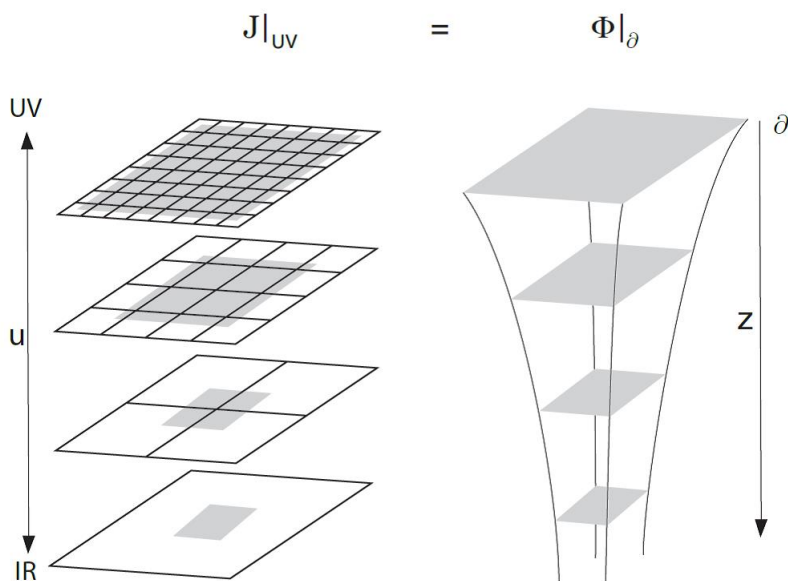


Figura 2.1: À esquerda, a ilustração do método de Wilson-Kadanoff para sistemas em uma rede. Na Correspondência AdS/CFT as redes em diferentes escalas, $u \equiv z$, podem ser vistas como camadas de um espaço de dimensão superior, cuja fronteira é o espaço no qual vive a CFT. Fonte: [77].

geometrização da dinâmica quântica codificada pelo Grupo de Renormalização, isto é, toda a física descrita por (2.1), que é local no parâmetro de escala, pode ser entendida em termos geométricos considerando esse parâmetro como compondo uma dimensão extra. Logo, surge um espaço de dimensão superior que pode conter o gráviton, a partícula elementar de spin 2 e massa zero associada à interação gravitacional.

2.2 Contando Graus de Liberdade

Uma vez que a Correspondência AdS/CFT propõe a equivalência entre uma teoria de gravitação quântica (teoria de cordas) definida em um espaço com dimensões extras e uma teoria de campos conforme em um espaço de dimensão inferior, devemos esperar

que o número de graus de liberdade, N_{gl} , de ambos os lados sejam iguais¹, ou seja,

$$N_{gl}^{AdS_{d+1}} = N_{gl}^{CFT_d}, \quad (2.4)$$

onde “gl” é uma abreviação para graus de liberdade e d é dimensão do espaço-tempo. De fato, ambos os lados desta equação são iguais: infinito [89]. Sendo assim, devemos regularizar (2.4) de modo a extrair alguma informação relevante. O objetivo desta seção, portanto, é contar os graus de liberdade de ambos os lados da equação escrita acima. Mas antes, vamos fazer uma abordagem qualitativa que sugere a validade da mesma.

Vamos considerar primeiro a CFT em d dimensões espaço-temporais, isto é, $(d - 1)$ dimensões tipo-espaço e 1 dimensão tipo-tempo. O número de graus de liberdade de um sistema pode ser determinado pela entropia. Na CFT a entropia é uma grandeza extensiva. Portanto, se R_{d-1} é a região espacial $(d - 1)$ -dimensional (tempo fixo), a entropia da CFT, S_{CFT} , deve ser proporcional ao volume desta região, $\text{Vol}(R_{d-1})$, ou seja,

$$S_{CFT} \propto \text{Vol}(R_{d-1}). \quad (2.5)$$

Entretanto, no lado gravitacional a teoria vive em um espaço-tempo $(d+1)$ -dimensional, o AdS_{d+1} . De acordo com o Princípio Holográfico, descrito anteriormente, a entropia de uma teoria gravitacional é proporcional à área de seu horizonte de eventos, especificamente, esta entropia é dada pela fórmula de Bekenstein-Hawking [8–10]

$$S_{AdS_{d+1}} = \frac{1}{4G_{d+1}} A_{\partial AdS_{d+1}}, \quad (2.6)$$

onde G_{d+1} é a constante de Newton em $(d + 1)$ dimensões e $A_{\partial AdS_{d+1}}$ é a área da fronteira do AdS_{d+1} . Agora, seja R_d a região espacial em $(d + 1)$ dimensões (tempo fixo) onde a teoria gravitacional está definida. Esta região tem como borda, ∂R_d , a região R_{d-1} . Portanto, de acordo com (2.6), a entropia associada à teoria gravitacional definida no AdS_{d+1} é proporcional à

$$S_{AdS_{d+1}} \propto A_{\partial AdS_{d+1}} = \text{Área}(\partial R_d) \propto \text{Vol}(R_{d-1}). \quad (2.7)$$

¹Estamos desconsiderando a esfera 5-dimensional, S^5 , que aparece na formulação original da Correspondência, pois, como ficará claro no capítulo 4, podemos formulá-la considerando apenas o AdS .

Logo, comparando (2.5) com a equação acima, temos, qualitativamente, que

$$S_{AdS_{d+1}} \sim S_{CFT}. \quad (2.8)$$

Vamos agora fazer a abordagem quantitativa, considerando primeiro o lado direto de (2.4). Como foi dito no início, ambos os membros de (2.4) dão infinito. Para regularizar a CFT_d vamos colocar o sistema em uma caixa de tamanho R , e vamos introduzir um espaçamento de rede ϵ , de modo que em d dimensões temos $(\frac{R}{\epsilon})^{d-1}$ sítios. Seja c_{CFT} o número de graus de liberdade por sítio. Logo, o número total de graus de liberdade da CFT_d é dado por

$$N_{gl}^{CFT_d} = \left(\frac{R}{\epsilon}\right)^{d-1} c_{CFT}. \quad (2.9)$$

Na Correspondência, a CFT é uma teoria de calibre com grupo de simetria $SU(N)$. Portanto, o número de graus de liberdade (ou número de parâmetros independentes), c_{CFT} , desta teoria é da ordem de N^2 (especificamente $N^2 - 1$). Substituindo em (2.9) obtemos

$$N_{gl}^{CFT_d} = \left(\frac{R}{\epsilon}\right)^{d-1} N^2. \quad (2.10)$$

Analogamente, vamos calcular o número de graus de liberdade do lado esquerdo de (2.4), ou seja, do AdS_{d+1} . De acordo com o Princípio Holográfico e usando a fórmula de Bekenstein-Hawking (2.6), temos

$$N_{gl}^{AdS_{d+1}} = \frac{A_{\partial AdS_{d+1}}}{4G_{d+1}}. \quad (2.11)$$

O próximo passo é calcular $A_{\partial AdS_{d+1}}$ explicitamente por meio da integração do elemento de área neste espaço em um determinado tempo que vamos tomar como fixo ($dt = 0$), isto é, vamos calcular a área da região $\partial AdS_{d+1} \equiv \mathbb{R}^{d-1}$. Em um espaço curvo a área de uma região espacial d -dimensional é dada pela integral

$$A = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}x \sqrt{g}, \quad (2.12)$$

onde $g = \det g_{\mu\nu}$, sendo $g_{\mu\nu}$ a métrica do espaço-tempo em questão. Neste caso, o AdS_{d+1} . A medida de integração no espaço curvo envolve esse fator \sqrt{g} para que a mesma seja invariante por transformações gerais de coordenadas [31, 94].

A métrica no AdS_{d+1} , considerando um tempo fixo ($dt = 0$), pode ser escrita da seguinte maneira²

$$ds^2 = \frac{L_{AdS}^2}{z^2}(dz^2 + (dx^i)^2); \quad i = 1, \dots, (d-1), \quad (2.13)$$

onde L_{AdS} é o raio de curvatura constante do AdS_{d+1} . A fronteira deste espaço é a região $z \rightarrow 0$, de modo que

$$ds^2|_{\partial AdS_{d+1}, t \text{ fixo}} = \frac{L_{AdS}^2}{z^2}(dx^i)^2, \quad (2.14)$$

donde obtemos

$$g_{\mu\nu} = \frac{L_{AdS}^2}{z^2}\delta_{\mu\nu}; \quad \delta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1) \quad (2.15)$$

$$\sqrt{g} = \left(\frac{L_{AdS}}{z}\right)^{d-1}. \quad (2.16)$$

Note que \sqrt{g} e, conseqüentemente, (2.12), divergem na fronteira ($z = 0$). Sendo assim, vamos precisar introduzir um corte, $z = \epsilon \rightarrow 0$, para poder calcular (2.12) no caso do AdS_{d+1} , da mesma forma que fizemos na CFT_d . Fazendo isso, e substituindo (2.16) em (2.12), ficamos com

$$A_{\partial AdS_{d+1}} = \int_{\mathbb{R}^{d-1}, z=\epsilon, t \text{ fixo}} d^{d-1}x \sqrt{g} = \left(\frac{L_{AdS}}{\epsilon}\right)^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}x. \quad (2.17)$$

Esta integral é o volume da região \mathbb{R}^{d-1} , que é infinito. Sendo assim, temos que introduzir mais um corte, análogo mais uma vez ao que fizemos anteriormente na CFT_d . Vamos colocar o sistema em uma caixa de tamanho R , com isso temos que

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}x = R^{d-1}. \quad (2.18)$$

²Para detalhes sobre o espaço AdS veja o capítulo 3.

Logo, $A_{\partial AdS_{d+1}}$ é dada por:

$$A_{\partial AdS_{d+1}} = \left(\frac{R}{\epsilon}\right)^{d-1} (L_{AdS})^{d-1}. \quad (2.19)$$

Com esta expressão obtemos finalmente a forma explícita de (2.11)

$$N_{gl}^{AdS_{d+1}} = \left(\frac{R}{\epsilon}\right)^{d-1} \frac{1}{4G_{d+1}} (L_{AdS})^{d-1}. \quad (2.20)$$

Por conveniência, vamos expressar a constante de Newton, G_{d+1} , em termos do *comprimento de Planck* [102], l_P , em $(d+1)$ dimensões

$$G_{d+1} = (l_P)^{d-1}. \quad (2.21)$$

Substituindo em (2.20), temos

$$N_{gl}^{AdS_{d+1}} = \left(\frac{R}{\epsilon}\right)^{d-1} \frac{1}{4} \left(\frac{L_{AdS}}{l_P}\right)^{d-1}. \quad (2.22)$$

Comparando a equação acima com (2.10), obtemos

$$\frac{1}{4} \left(\frac{L_{AdS}}{l_P}\right)^{d-1} = N^2. \quad (2.23)$$

Esta é a condição exata de equivalência entre os graus de liberdade de ambos os lados da Correspondência AdS/CFT.

A maneira mais simples de entender as implicações de (2.23) é se considerarmos uma aproximação, como vamos fazer agora. Note que uma teoria é semi-clássica quando o coeficiente que multiplica sua ação é grande. Neste caso, a integral de caminho é dominada pela contribuição do ponto de fase estacionária (ou ponto de sela, “*saddle point*”, em inglês), que é a contribuição clássica. Ou seja,

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-\alpha S[\phi]} \approx e^{-\alpha S_{\text{clássico}}[\phi]}; \quad \alpha \gg 1. \quad (2.24)$$

No AdS_{d+1} o coeficiente que multiplica sua ação é exatamente $\left(\frac{L_{AdS}}{l_P}\right)^{d-1}$, de modo que se³

³A teoria quântica definida no AdS_{d+1} é uma teoria de cordas. O limite semi-clássico desta teoria é uma teoria de cordas semi-clássica, onde levamos em consideração apenas os diagramas a nível de árvore. A supergravidade surge ao tomarmos o limite de baixas energias desta teoria. Discutiremos em mais detalhes este limite de baixas energias da teoria de cordas no capítulo 4.

$$\frac{L_{AdS}}{l_P} \gg 1 \longrightarrow \text{Supergravidade no AdS é uma boa aproximação.}$$

Esta aproximação significa que estamos considerando o raio do AdS, L_{AdS} , muito maior que o comprimento de Planck, l_P . Dito de outra maneira, a curvatura do AdS é muito pequena em unidades de Planck (já que a curvatura de um espaço é inversamente proporcional ao quadrado do raio). Do ponto de vista físico, esta aproximação significa que podemos desprezar correções quânticas à gravitação já que, muito longe da escala de Planck, os efeitos quânticos da gravitação tornam-se menos importantes. Na CFT, por outro lado, esta condição implica em

$$N^2 \gg 1, \tag{2.25}$$

ou seja, o parâmetro N do grupo $SU(N)$ tem que ser grande, de modo que a CFT possui muitos graus de liberdade. Portanto, da Correspondência AdS/CFT, concluímos que a aproximação semi-clássica no AdS é válida quando a CFT dual possui vários graus de liberdade. Estas aproximações reaparecerão no capítulo 4, bem como o limite de 't Hooft (limite de N grande), que vamos discutir a seguir.

2.3 O Limite de 't Hooft

Tomando como base as referências [2,61,77], nesta seção discutimos o limite de 't Hooft nas teorias de calibre [91], que foi a indicação mais direta de que estas teorias poderiam ser descritas em termos de uma teoria de cordas. O objetivo desta seção, portanto, é mostrar que no limite de 't Hooft a expansão diagramática das teorias de calibre é equivalente a expansão perturbativa de uma teoria de cordas livre.

Vamos considerar, por simplicidade, uma teoria de Yang-Mills pura, isto é, sem matéria (como quarks ou escalares por exemplo)⁴. A lagrangiana desta teoria de calibre não-

⁴Podemos também acrescentar termos de massa em (2.27), bem como os fantasmas de Fadeev-Popov, mas estes termos não alteram a análise feita nesta seção. Em geral, podemos considerar uma teoria de

abeliana é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{g_{YM}^2} \text{tr} [F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}], \quad (2.27)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu], \quad (2.28)$$

com A_μ sendo o campo de calibre não-abeliano na representação adjunta de $SU(N)$, e assumindo valores na álgebra de Lie do grupo, ou seja,

$$A_\mu \equiv A_\mu^a T^a; \quad a = 1, \dots, N^2 - 1, \quad (2.29)$$

onde a é um índice da representação adjunta. Os geradores do grupo, T^a , satisfazem à álgebra de Lie

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c, \quad (2.30)$$

onde f^{abc} são as constantes de estrutura do grupo.

Vamos reescrever (2.27) da seguinte maneira:

$$\mathcal{L} = -\frac{N}{\lambda} \text{tr} [F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}], \quad (2.31)$$

onde N é o parâmetro do grupo $SU(N)$ e $\lambda = g_{YM}^2 N$ é o chamado *acoplamento de 't Hooft*. O *limite de 't Hooft* consiste em fazer

$$N \rightarrow \infty \text{ com } \lambda = g_{YM}^2 N \text{ fixo.}$$

Aparentemente, este é um limite clássico já que o coeficiente em (2.31) diverge, entretanto isto não é verdade visto que o número de componentes A_μ^a também diverge neste limite (lembrando que o índice $a = 1, \dots, N^2 - 1$). Podemos escrever os diagramas de Feynmann

calibre $SU(N)$ genérica, com lagrangiana da forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{g_{YM}^2} \text{tr} ((\mathcal{D}\phi)^2 + \phi^3 + \phi^4 + \dots) = -\frac{1}{g_{YM}^2} \text{tr} ((\mathcal{D}\phi)^2 + V(\phi)), \quad (2.26)$$

onde ϕ são campos genéricos na representação adjunta de $SU(N)$. Aqui estamos assumindo que, analogamente à teoria de Yang-Mills, os vértices de 3- e 4-pernas são proporcionais a g_{YM} e g_{YM}^2 , respectivamente [2].

de (2.31) em uma notação de linha dupla, na qual o campo de calibre na representação adjunta A_μ^a pode ser representado como um campo $(A_\mu)_j^i$ proveniente do produto direto das representações fundamental e anti-fundamental de $SU(N)$ ⁵ ($i, j = 1, \dots, N$). Seguindo esta notação de linha dupla, o propagador e os vértices de interação de (2.31), bem como suas contribuições em termos de N e λ são ilustrados na Figura 2.2. O propagador e os

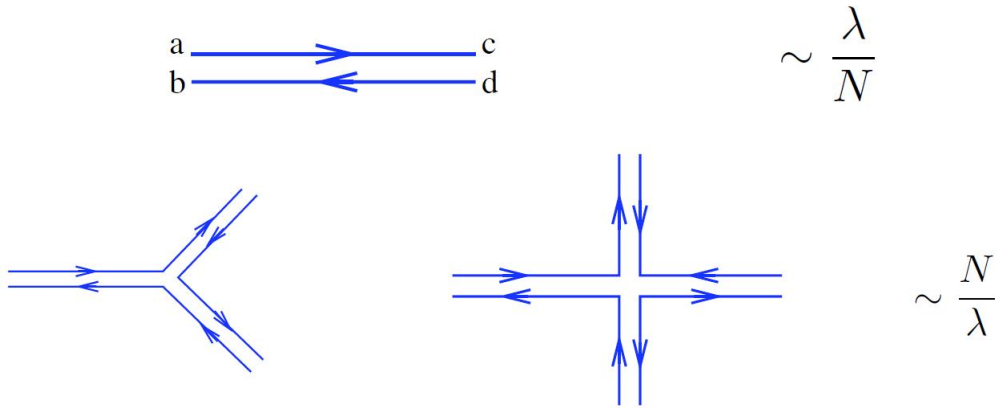


Figura 2.2: Propagador e vértices de interação na notação de linha dupla. Nesta figura os índices a , c , b e d correspondem aos índices i , l , j e k em (2.33), respectivamente. Fonte: [77].

vértices mostrados na Figura 2.2 são consistentes com uma teoria de Yang-Mills $U(N)$, cujo propagador é proporcional a [61]

$$\langle A_j^i A_l^k \rangle \propto \delta_l^i \delta_k^j, \quad (2.33)$$

porém, estamos considerando uma teoria de Yang-Mills $SU(N)$, neste caso o propagador (2.33) possui um pequeno termo de mistura

$$\langle A_j^i A_l^k \rangle \propto \left(\delta_l^i \delta_k^j - \frac{1}{N} \delta_j^i \delta_l^k \right), \quad (2.34)$$

⁵Lembrando que a representação adjunta de $SU(N)$ pode ser obtida (utilizando os Tableaux de Young) via produto direto das representações fundamental e anti-fundamental. Como exemplo, para o grupo $SU(3)$ temos

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}, \quad (2.32)$$

onde $\mathbf{3}$ e $\bar{\mathbf{3}}$ são as dimensões das representações fundamental e anti-fundamental de $SU(3)$, $\mathbf{8}$ é a dimensão da representação adjunta de $SU(3)$, e $\mathbf{1}$ é um escalar de $SU(3)$. No limite $N \rightarrow \infty$ podemos desconsiderar o escalar.

que não vamos levar em consideração pois ele envolve apenas termos que não são dominantes no limite $N \rightarrow \infty$ [2]. Além disso, nos diagramas que vamos considerar, podemos ter também laços de índice (loops), que ocorrem quando as linhas se fecham, como mostra a Figura 2.3. Neste caso, os loops vão conter uma soma sobre os índices do grupo de

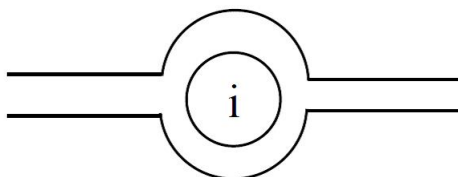


Figura 2.3: Loop na notação de linha dupla. Fonte: [58]

calibre e, portanto, vão contribuir nos diagramas de Feynmann com

$$\delta_i^i = N. \quad (2.35)$$

Logo, cada diagrama de Feynmann na notação de linha dupla consistirá de um entrelaçamento de linhas duplas. Vamos agora começar a análise dos diagramas vácuo \rightarrow vácuo (sem linhas externas) nesta notação de linha dupla. Em tais diagramas, é possível verificar que as linhas formam o perímetro de um polígono orientado (em uma direção para um índice na representação fundamental e na direção oposta para um índice na representação anti-fundamental), ou seja, uma face. Os polígonos podem se juntar nas arestas de tal modo que cada diagrama de Feynmann pode ser visualizado como sendo a triangulação de uma superfície bidimensional. Quando compactificamos o espaço, adicionando um ponto no infinito, cada diagrama corresponde a uma superfície bidimensional compacta, fechada, e com uma orientação.

Um diagrama genérico consiste de propagadores, vértices de interação e loops. Sendo assim, não é difícil ver a potência de N e λ associada à cada diagrama vácuo \rightarrow vácuo (veja Figuras 2.2 e 2.3). Seja E o número de propagadores (arestas na triangulação), V o

número de vértices e F o número de loops (faces na triangulação). Portanto, temos que

$$\text{Diagrama} = \left(\frac{\lambda}{N}\right)^E \left(\frac{N}{\lambda}\right)^V N^F = N^{F-E+V} \lambda^{E-V} = N^\chi \lambda^{E-V}, \quad (2.36)$$

onde χ é um invariante topológico de superfícies bidimensionais conhecido como *característica de Euler*. Para superfícies fechadas e com orientação

$$\chi = 2 - 2g, \quad (2.37)$$

onde g é o *genus* da superfície, isto é, o número de buracos (a esfera tem $g = 0$, o torus $g = 1$, etc). Logo, podemos reescrever (2.36) como

$$\text{Diagrama} = N^{2-2g} \lambda^n, \quad (2.38)$$

onde $n \equiv E - V$ depende do diagrama considerado. Portanto, a expansão perturbativa de qualquer diagrama desta teoria de calibre pode ser escrita na forma de uma expansão dupla da forma

$$\text{Amplitude} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} \sum_{n=0}^{\infty} c_{g,n} \lambda^n = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} f_g(\lambda), \quad (2.39)$$

onde $f_g(\lambda)$ é um polinômio em λ . Desta equação fica claro que, no limite de 't Hooft ($N \rightarrow \infty$, com λ fixo), os termos dominantes na expansão serão aqueles com χ máximo ou, equivalentemente, g mínimo ($g = 0$), que são as superfícies que possuem a topologia da esfera (ou, equivalentemente, um plano). Estes diagramas com topologia da esfera são chamados de *diagramas planares* (veja Figura 2.4), pois eles podem ser desenhados em uma folha de papel sem que as linhas se cruzem. Sua contribuição no diagrama (2.38) é sempre da forma $N^2 \lambda^n$, onde n depende do diagrama considerado. Entretanto, existem também os diagramas não-planares (veja Figura 2.5), que são aqueles que não podem ser desenhados em uma folha de papel sem que as linhas se cruzem. Estes diagramas possuem a topologia do torus, e sua contribuição na amplitude (2.39) é suprimida por potências de $\frac{1}{N^2}$ no limite de 't Hooft.

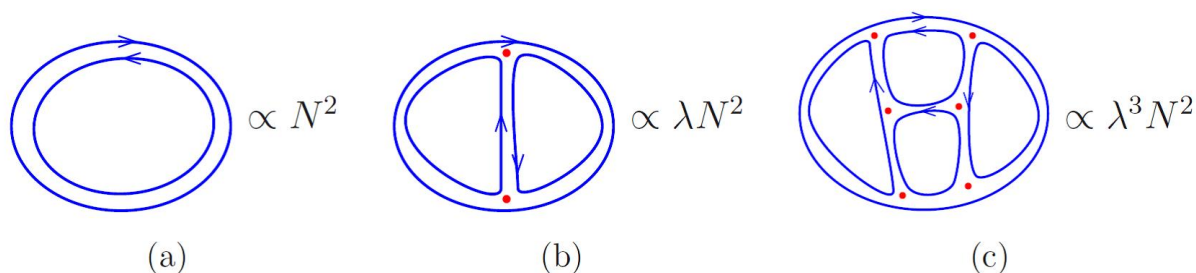


Figura 2.4: Diagramas planares. Sua contribuição na amplitude (2.39) é da ordem de N^2 e é dominante no limite de N grande. Fonte: [61]

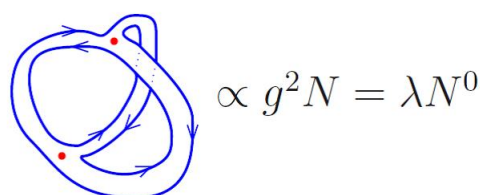


Figura 2.5: Diagrama não-planar que contribui para a amplitude vácuo→vácuo (2.39). Sua contribuição, no entanto, é suprimida por potências de $1/N^2$ no limite de N grande. Fonte: [61].

A expansão perturbativa (2.39) é idêntica a expansão perturbativa de uma teoria de cordas fechadas [77]

$$\text{Amplitude} = \sum_{g=0}^{\infty} g_s^{2g-2} f_g(\alpha'), \quad (2.40)$$

se identificarmos a constante de acoplamento da corda, g_s , com

$$g_s = \frac{1}{N}. \quad (2.41)$$

A analogia de (2.39) com (2.40) é uma das fortes motivações para se acreditar que teorias de calibre e teoria de cordas estão relacionadas, além de sugerir que esta relação fica ainda mais visível no limite de 't Hooft, que é o limite de N grande, no qual a teoria de cordas dual seria fracamente acoplada ($g_s \ll 1$). Além disso, a teoria de cordas fechadas contém a gravitação, com constante de Newton, G_{d+1} , tal que

$$G_{d+1} \propto g_s^2. \quad (2.42)$$

Usando (2.41), obtemos

$$G_{d+1} \propto \frac{1}{N^2}. \quad (2.43)$$

Portanto, no limite de 't Hooft ($N \rightarrow \infty$, com λ fixo) a teoria de cordas é semi-clássica, isto é, podemos considerar apenas os diagramas a nível de árvore. Além disso, isto recupera o resultado (2.23) (combinado com (2.21)) da seção anterior, obtido via contagem de graus de liberdade.

Por fim, a análise apresentada aqui foi feita para uma teoria de Yang-Mills $SU(N)$ pura, mas ela vale para qualquer teoria de calibre acoplada a campos de matéria na representação adjunta, como a teoria conforme $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills [2].

Capítulo 3

O Espaço de anti-de Sitter e o Grupo Conforme

A Correspondência AdS/CFT, proposta por Maldacena em 1997, relaciona uma teoria de cordas em $AdS_5 \times S^5$ à uma teoria quântica de campos com simetria conforme na fronteira deste espaço. Desta maneira, este capítulo é dedicado a uma revisão do espaço AdS , suas propriedades básicas e o grupo conforme. Primeiramente, apresentamos o AdS como sendo uma solução das equações de Einstein no vácuo com constante cosmológica negativa. Na seção 3.2, definimos o espaço AdS_{d+1} por meio da introdução de coordenadas em $\mathbb{R}^{2,d}$ satisfazendo um determinado vínculo. Em seguida, introduzimos as coordenadas de Poincaré e definimos a versão Euclideana do AdS_{d+1} . Na seção 3.3, discutimos o grupo conforme, sua álgebra de Lie, a definição de campo primário e a restrição que a invariância conforme impõe sobre a forma das funções de correlação. Finalizamos este capítulo com a seção 3.4, definindo o que são as isometrias de uma métrica e as condições para que uma transformação geral de coordenadas seja uma isometria. Além disto, calculamos explicitamente as isometrias do AdS , o que vai nos permitir obter uma relação entre estas isometrias e o grupo conforme na fronteira deste espaço.

3.1 Propriedades Globais do Espaço AdS

Vamos começar considerando a ação de Einstein-Hilbert com constante cosmológica

$$S = \frac{1}{16\pi G_{d+1}} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (3.1)$$

onde G_{d+1} é a constante de Newton em $(d+1)$ -dimensões, $g = \det g_{\mu\nu}$, com $g_{\mu\nu}$ sendo a métrica, R é o escalar de Ricci ($R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci) e Λ é a constante cosmológica.

A equação de Einstein no vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$, onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento) provém da aplicação do princípio variacional à (3.1)

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \longrightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.2)$$

A derivação deste resultado encontra-se no Apêndice A.

Ao tomarmos o traço de (3.2), isto é, contraindo com $g^{\mu\nu}$, obtemos o escalar de Ricci

$$R = \frac{2(d+1)}{d-1} \Lambda. \quad (3.3)$$

Substituindo este resultado em (3.2), obtemos o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \frac{2\Lambda}{d-1} g_{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

Espaços que satisfazem (3.4), ou seja, para os quais $R_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$, são chamados de espaços de Einstein [69]. Em particular, espaços para os quais o tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ tem a forma

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{R}{d(d+1)} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}), \quad (3.5)$$

são chamados de espaços maximamente simétricos.

Para $R \neq 0$ ($R = 0$ é o espaço plano), estes espaços podem ser: esferas, S^{d+1} , espaços de de Sitter, dS_{d+1} , e espaços de anti-de Sitter, AdS_{d+1} . A diferença entre o espaço dS_{d+1}

e o AdS_{d+1} é o sinal da constante cosmológica Λ . Na convenção¹ que adotamos, o AdS_{d+1} é solução de (3.2) com $\Lambda < 0$.

Por fim, em resumo, o AdS_{d+1} possui as seguintes propriedades:

- É solução da equação de Einstein no vácuo com $\Lambda < 0$.
- É um espaço de Einstein ($R_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$).
- É maximamente simétrico ($R_{\mu\nu\rho\sigma} \propto (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})$).

3.2 Definindo o Espaço AdS_{d+1}

O espaço de anti-de Sitter $(d + 1)$ -dimensional, AdS_{d+1} , pode ser definido [101, 102] como sendo o hiperbolóide “imerso” em $\mathbb{R}^{2,d}$ (espaço de Minkowski $(d + 2)$ -dimensional) cujas coordenadas cartesianas satisfazem

$$\left\{ X^\mu \equiv (X^0, \dots, X^d, X^{d+1}) \mid -(X^0)^2 - (X^{d+1})^2 + \sum_{i=1}^d (X^i)^2 = -b^2 \right\}, \quad (3.7)$$

onde b é o raio de curvatura² do AdS_{d+1} . A métrica induzida neste espaço é dada por

$$ds^2 = -(dX^0)^2 - (dX^{d+1})^2 + \sum_{i=1}^d (dX^i)^2. \quad (3.8)$$

Note que, por construção, este espaço tem um grupo de isometria $SO(2, d)$, que atua como

$$X^\mu \longrightarrow X'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu; \quad \Lambda^\mu{}_\nu \in SO(2, d), \quad (3.9)$$

análogo ao grupo de Lorentz $SO(1, d)$ associado ao espaço de Minkowski em $(d + 1)$ dimensões.

¹Aqui estamos utilizando a convenção de [94]. Existem outras convenções, por exemplo, em [69, 99] a convenção utilizada é que a ação de Einstein-Hilbert com constante cosmológica tem a forma

$$S = \frac{1}{16\pi G_{d+1}} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} (R + \Lambda). \quad (3.6)$$

Com esta convenção, o AdS resolve as eqs. de Einstein com $\Lambda > 0$.

²A notação usada para representar o raio de curvatura do AdS , b , será utilizada apenas neste capítulo.

Sendo assim é natural que teorias quânticas no AdS_{d+1} sejam invariantes sob o grupo $SO(2, d)$, assim como a teoria quântica de campos no espaço de Minkowski $(1 + 3)$ -dimensional é invariante sob o grupo de Poincaré³, que é o grupo de isometria do espaço plano. O grupo $SO(2, d)$, além disto, está ligado ao grupo conforme na fronteira do AdS_{d+1} , conforme veremos nas seções 3.3 e 3.4.

3.2.1 Coordenadas de Poincaré

O AdS_{d+1} pode ser descrito em pelo menos três sistemas de coordenadas distintos: (i) coordenadas estereográficas (ou polares), (ii) coordenadas globais e (iii) coordenadas de Poincaré. Os dois primeiros estão descritos no Apêndice A. Nesta subseção, vamos definir e descrever as coordenadas de Poincaré, cuja utilidade, de modo geral, é superior aos demais sistemas de coordenadas no estudo da Correspondência AdS/CFT.

As coordenadas de Poincaré (z, \vec{x}, t) podem ser definidas por [15]:

$$X^0 = \frac{1}{2z}(z^2 + b^2 + \vec{x}^2 - t^2) \quad (3.11)$$

$$X^j = \frac{bx^j}{z} \quad (3.12)$$

$$X^d = -\frac{1}{2z}(z^2 - b^2 + \vec{x}^2 - t^2) \quad (3.13)$$

$$X^{d+1} = \frac{bt}{z}, \quad (3.14)$$

onde $j = 1, 2, \dots, d - 1$ e $0 \leq z < \infty$. Nestas coordenadas a métrica (tipo-Lorentz) do AdS_{d+1} é dada por

$$ds^2 = \frac{b^2}{z^2}(dz^2 + d\vec{x}^2 - dt^2). \quad (3.15)$$

A fronteira do AdS_{d+1} neste sistema de coordenadas corresponde à $\mathbb{R}^{1, d-1} \cup \{\infty\}$, isto é, ao espaço de Minkowski d -dimensional, $\mathbb{R}^{1, d-1}$, com coordenadas (t, \vec{x}) em $z = 0$, mais um

³O grupo de Poincaré em $(3 + 1)$ é formado pelo grupo de Lorentz, $SO(1, 3)$, mais translações espaço-temporais, a^μ . Em um quadrivetor X^μ , por exemplo, o grupo de Poincaré atua como

$$X^\mu \longrightarrow X'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu + a^\mu; \quad \Lambda^\mu{}_\nu \in SO(1, 3). \quad (3.10)$$

ponto P em $z = \infty$ já que $ds^2 = 0$ quando $z \rightarrow \infty$ ⁴. Porém, o ponto no infinito não pode ser incluído neste primeiro sistema de coordenadas de Poincaré, de modo que é necessário introduzir um outro sistema de coordenadas para descrevê-lo adequadamente [15–17]. Neste sentido, o sistema de coordenadas de Poincaré cobre apenas uma parte do espaço AdS .

Por fim, podemos mostrar (por meio do cálculo do tensor de Riemann utilizando este sistema de coordenadas de Poincaré, por exemplo) que o AdS_{d+1} satisfaz as equações de Einstein (3.2) com escalar de curvatura, R , e constante cosmológica, Λ , dados por

$$R = -\frac{d(d+1)}{b^2}, \quad (3.16)$$

$$\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2b^2}. \quad (3.17)$$

Podemos ainda mostrar que o tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, e o tensor de Riemann, $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, satisfazem às propriedades (3.4) e (3.5) [69].

3.2.2 Versão Euclideana do AdS_{d+1}

Até aqui assumimos que a métrica do AdS_{d+1} ((3.8) e (3.15)) possui assinatura de Lorentz, ou seja, $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, \dots, +)$. Por conveniência, vamos agora definir a versão Euclideana do AdS_{d+1} . Antes disto, explicamos sobre o que consiste o formalismo Euclideano (conhecido também como rotação de Wick).

3.2.2.1 O Formalismo Euclideano

É comum na teoria quântica de campos definir as funções de correlação em um tempo imaginário, isto é, fazer $t \rightarrow -it$. Esta prescrição é conhecida como *rotação de Wick*, pois fazemos uma rotação de $\pi/2$ ($i = e^{i\pi/2}$) no plano complexo (passamos de t puramente real para t puramente imaginário).

⁴Na verdade o motivo vai além disto. O grupo que atua na fronteira do AdS é o grupo conforme (seção 2.4). As transformações deste grupo podem mapear pontos finitos do espaço de Minkowski em pontos no infinito e vice-versa. Portanto, o espaço de fronteira tem que ser definido em uma compactificação conforme do espaço de Minkowski, que já inclui pontos no infinito [2, 99].

Como exemplo, vamos considerar a métrica (3.15) após uma rotação de Wick ($t \rightarrow -it$)

$$ds_{\text{E}}^2 = \frac{b^2}{z^2}(dz^2 + d\vec{x}^2 + dt^2), \quad (3.18)$$

onde o índice “E” é para deixar claro que a métrica possui assinatura Euclideana. Note que a fronteira do AdS_{d+1} , ignorando os aspectos técnicos que a define, não é mais o espaço de Minkowski, $\mathbb{R}^{1,d-1}$, e sim o espaço Euclideano, \mathbb{R}^d , com coordenadas $(\vec{x}, t) \equiv x^i \in \mathbb{R}^d$, onde $i = 0, 1, \dots, d-1$. Visto que o espaço-tempo vai de Minkowski para Euclideano após $t \rightarrow -it$, este método é também conhecido como *formalismo Euclideano*⁵. Consequentemente, $g_{\mu\nu}$ torna-se a métrica Euclideana, isto é,

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, \dots, +) \longrightarrow g_{\mu\nu}^{\text{E}} = \text{diag}(+, +, \dots, +). \quad (3.19)$$

3.2.2.2 Representações Euclidianas do AdS_{d+1}

A representação Euclideana do AdS_{d+1} pode ser descrita de várias maneiras equivalentes. Vamos descrever duas delas com base em [99].

Vamos considerar o espaço Euclideano \mathbb{R}^{d+1} com coordenadas x^0, x^1, \dots, x^d , e seja B_{d+1} a bola aberta de raio unitário ($b = 1$)

$$\sum_{i=0}^d x_i^2 < 1. \quad (3.20)$$

O AdS_{d+1} pode ser identificado como sendo B_{d+1} com métrica

$$ds^2 = \frac{4 \sum_{i=0}^d (dx^i)^2}{(1 - |x|^2)^2}. \quad (3.21)$$

Podemos compactificar B_{d+1} de modo a obter a bola fechada, \overline{B}_{d+1} , de raio unitário definida por

$$\sum_{i=0}^d x_i^2 \leq 1. \quad (3.22)$$

⁵O formalismo Euclideano possui a vantagem de que as integrais de caminho são mais bem definidas do que no espaço de Minkowski. No espaço de Minkowski há uma contribuição oscilatória na integral de caminho, enquanto que no formalismo Euclideano essa contribuição é substituída por um decaimento exponencial [83].

Com isto, a fronteira de \overline{B}_{d+1} é a esfera S^d , definida por

$$\sum_{i=0}^d x_i^2 = 1. \quad (3.23)$$

Portanto, S^d é a versão Euclideana do espaço de Minkowski compactificado, e o fato de que S^d é a fronteira de \overline{B}_{d+1} é a versão Euclideana da afirmação de que o espaço de Minkowski é a fronteira do AdS_{d+1} . No entanto, a métrica (3.21) não é definida em \overline{B}_{d+1} , porque é singular em $|x| = 1$. Para se obter uma métrica que, de fato, esteja definida em \overline{B}_{d+1} , podemos escolher uma função Ω , em \overline{B}_{d+1} , que seja positiva em B_{d+1} (podemos tomar, por exemplo, $\Omega = 1 - |x|^2$) e substituir⁶ ds^2 por

$$d\tilde{s}^2 = \Omega^2 ds^2. \quad (3.24)$$

Métricas que se relacionam desta maneira são ditas *conformalmente relacionadas*, e Ω é chamado de *fator conforme*. Como não há uma escolha natural para Ω , $d\tilde{s}^2$ é bem definida a menos de transformações conformes. De fato, podemos substituir Ω por

$$\Omega \longrightarrow \Omega e^w, \quad (3.25)$$

com w sendo qualquer função real em \overline{B}_{d+1} . Com esta substituição, induzimos a transformação conforme (veja seção 2.3)

$$d\tilde{s}^2 = e^{2w} d\tilde{s}^2 = \Omega'^2 d\tilde{s}^2; \quad \Omega'^2 = e^{2w}, \quad (3.26)$$

que é preservada pela ação do grupo $SO(1, d+1)$ (versão Euclideana de $SO(2, d)$). Em particular, se

$$d\tilde{s}^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \Omega^2 ds^2 = \Omega^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \iff g_{\mu\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}, \quad (3.27)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço plano (Euclideano ou Minkowski), dizemos que a métrica é *conformalmente plana*. Sendo assim, fica fácil ver que o AdS_{d+1} é conformalmente plano,

⁶Este procedimento é conhecido como compactificação conforme. Para uma descrição detalhada sobre este método veja [11, 26].

pois podemos substituir sua métrica original ((3.21), por exemplo) por uma métrica plana introduzindo o fator conforme Ω convenientemente.

Finalmente, podemos representar o AdS_{d+1} como sendo o semi-plano superior ($x^0 > 0$) no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{d+1} com coordenadas $x^i \equiv (x^0, x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ e métrica

$$ds^2 = \frac{1}{x_0^2} \left(\sum_{i=0}^d (dx^i)^2 \right). \quad (3.28)$$

Aqui, representamos o AdS_{d+1} em unidades tais que $b = 1$.

Note a semelhança com a métrica do AdS_{d+1} em coordenadas de Poincaré, (3.15). De fato, esta métrica é a versão Euclidiana de (3.15) com as devidas identificações⁷: $x^0 \equiv z$ e $x^1 \equiv t$.

Seguindo o mesmo procedimento utilizado em (3.15), a fronteira do AdS_{d+1} na representação (3.28) corresponde à $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$, ou seja, ao espaço Euclidiano, \mathbb{R}^d , com coordenadas $x^j \equiv (x^1, x^2, \dots, x^d)$ em $x^0 = 0$, mais um ponto P em $x^0 = \infty$. Neste sentido, portanto, a fronteira do AdS_{d+1} é uma compactificação conforme de \mathbb{R}^d adicionando pontos no infinito, que dá como resultado uma esfera S^d [26]. Sendo assim, $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\} = S^d$. Equivalentemente, temos que a compactificação conforme do espaço de Minkowski (fronteira do AdS_{d+1} na representação de Lorentz) tem topologia $\mathbb{R}^{1,d-1} \cup \{\infty\} = \mathbb{R} \times S^{d-1}$. O fato do espaço de Minkowski d -dimensional ser a fronteira do AdS_{d+1} é particularmente interessante na Correspondência AdS/CFT, pois podemos descrever a física que fazemos em 4 dimensões (física de partículas, por exemplo) em termos de uma física em dimensões superiores. Veremos isto em mais detalhes no capítulo 4.

Por fim, dada a estrutura conforme da fronteira do AdS (definida via compactificação conforme), é natural pensarmos que uma teoria de campos definida na fronteira deste espaço vai herdar a invariância conforme (a nível clássico pelo menos), assunto que vamos tratar na próxima seção.

⁷Em um espaço-tempo Euclidiano, a distinção entre componente temporal e espacial é arbitrária.

3.3 Invariância Conforme

Princípios de simetria, em particular a invariância de Lorentz e a de Poincaré, desempenham um papel fundamental na física. Nesse sentido é natural procurar possíveis extensões da invariância de Poincaré que sejam relevantes para a física. Uma dessas extensões é a invariância conforme, que é uma extensão da invariância de escala [76], uma simetria sob dilatações do espaço. No caso da invariância conforme, o fator de escala depende da posição (invariância de escala local).

Entretanto, a invariância de escala (local ou global) não é uma simetria exata da natureza, pois a descrição que fazemos de um fenômeno físico envolve um determinado número de escalas de comprimento (ou energia) características que indicam as distâncias típicas dentro das quais um fenômeno físico (uma interação, por exemplo) pode acontecer. Estas escalas características não são invariantes por dilatações, pois estas iriam resultar na modificação dos parâmetros físicos do sistema. Porém, uma importante exceção ocorre quando estas escalas de comprimento são muito pequenas ou muito grandes comparadas aos outros parâmetros do sistema físico. Neste caso, a invariância de escala torna-se relevante. Um exemplo muito importante é o regime de espalhamento profundamente inelástico (“*Deep Inelastic Scattering*”) [13, 36] que, no contexto da QCD, reflete a liberdade assintótica da teoria, ou seja, o fato dos quarks se comportarem como partículas livres em escalas de comprimento muito pequenas (altas energias).

Tendo em vista a grande importância da invariância conforme e suas implicações na teoria de cordas e na Correspondência AdS/CFT, nesta seção descrevemos o grupo conforme, seus geradores, sua álgebra de Lie e sua relação com o grupo $SO(1, d + 1)$, a definição de campos primários e a restrição imposta pela simetria conforme sobre a forma das funções de correlação de 2- e 3-pontos.

3.3.1 O Grupo Conforme, Álgebras de Lie e Campos Primários

Por definição, uma transformação conforme é um mapa inversível $x \rightarrow x'$, que deixa a métrica invariante a menos de um fator de escala que depende da posição

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x). \quad (3.29)$$

O conjunto das transformações conformes forma um grupo [34] e, é claro, contém como subgrupo o grupo de Poincaré, visto que este corresponde ao caso especial $\Omega(x) \equiv 1$. É o grupo mínimo dentro do qual o grupo de Poincaré pode estar contido. A palavra conforme vem do fato de que a transformação não altera os ângulos entre dois vetores arbitrários, apesar da dilatação local. Deste modo, o grupo conforme preserva ângulos.

Em d dimensões⁸, o número de parâmetros independentes (a dimensão do grupo conforme) necessários para especificar uma transformação conforme é dado por:

$$\dim \text{Grupo Conforme} = \frac{1}{2}(d+2)(d+1). \quad (3.30)$$

Estes parâmetros se distribuem da seguinte maneira:

(i) d Translações:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}. \quad (3.31)$$

(ii) 1 Dilatação:

$$x'^{\mu} = \alpha x^{\mu}; \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.32)$$

(iii) $\frac{1}{2}d(d-1)$ Transformações de Lorentz:

$$x'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} x^{\nu}. \quad (3.33)$$

(iv) d Transformações Conformes Especiais (TCE):

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} - b^{\mu} x^2}{1 - 2\vec{b} \cdot \vec{x} + b^2 x^2}, \quad (3.34)$$

⁸Em $d = 2$, especificamente, a dimensão do grupo conforme é infinita. Veja [34] para mais detalhes.

onde as TCE podem ser obtidas por meio de três operações sucessivas: uma inversão, seguida de uma translação e mais uma inversão. Estas são as transformações finitas do grupo conforme (suas versões infinitesimais são obtidas na próxima seção).

Os geradores deste grupo, cada um correspondendo a uma das transformações acima, são dados, em ordem, por:

$$P_\mu = -i\partial_\mu \quad (3.35)$$

$$D = -ix^\mu\partial_\mu \quad (3.36)$$

$$M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) = -(x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu) \quad (3.37)$$

$$K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu) = 2x_\mu D - x^2 P_\mu. \quad (3.38)$$

Estes geradores obedecem as seguintes relações de comutação, que definem, portanto, a álgebra de Lie do grupo conforme:

$$[D, P_\mu] = iP_\mu$$

$$[D, K_\mu] = -iK_\mu$$

$$[K_\mu, P_\nu] = 2i(g_{\mu\nu}D - M_{\mu\nu}) \quad (3.39)$$

$$[K_\rho, M_{\mu\nu}] = i(g_{\rho\mu}K_\nu - g_{\rho\nu}K_\mu)$$

$$[P_\rho, M_{\mu\nu}] = i(g_{\rho\mu}P_\nu - g_{\rho\nu}P_\mu)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}).$$

Afim de colocar estas relações de comutação em uma forma mais compacta, vamos definir os seguintes geradores:

$$J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} \quad (3.40)$$

$$J_{0,\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu) \quad (3.41)$$

$$J_{-1,\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu) \quad (3.42)$$

$$J_{-1,0} = D, \quad (3.43)$$

onde $J_{ab} = -J_{ba}$ e $a, b \in (-1, 0, 1, \dots, d)$. Definidos desta maneira, estes geradores satisfazem exatamente à álgebra de Lie do grupo $SO(1, d+1)$:

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(g_{ad}J_{bc} + g_{bc}J_{ad} - g_{ac}J_{bd} - g_{bd}J_{ac}), \quad (3.44)$$

onde a métrica g_{ab} é da forma $diag(-1, 1, \dots, 1)$ se o espaço-tempo é Euclideano. Se o espaço-tempo for Minkowski, o grupo é $SO(2, d)$, com g_{ab} da forma $diag(-1, -1, 1, \dots, 1)$. As relações (3.39) e (3.44) mostram o *isomorfismo*⁹ entre o grupo conforme em d dimensões e o grupo $SO(1, d+1)$. Na próxima seção, vamos mostrar explicitamente este isomorfismo entre o grupo $SO(1, d+1)$, que é o grupo de isometria (Euclideano) do AdS_{d+1} , e o grupo conforme na fronteira d -dimensional do AdS_{d+1} , no caso particular onde $d = 4$ dimensões.

Por fim, as representações de interesse físico do grupo conforme envolvem campos que são autofunções do operador de escala D (3.36) com autovalor $-i\Delta$ (Δ é chamado de dimensão de escala, ou conforme, do campo). Isto significa que sob uma transformação de escala (3.32), estes campos se transformam como

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \alpha^\Delta \phi(\alpha x). \quad (3.46)$$

As relações de comutação (3.39) implicam que o operador P_μ aumenta a dimensão conforme do campo, enquanto que o operador K_μ a diminui. Em teorias de campo unitárias existe um limite inferior na dimensão conforme dos campos. Para campos escalares este limite é dado por [2]

$$\Delta \geq \frac{d-2}{2}, \quad (3.47)$$

onde d é a dimensão do espaço-tempo. Portanto, em cada representação do grupo conforme, deve existir um campo de dimensão mais baixa possível que é aniquilado por K_μ .

⁹Dados dois grupos (G, \odot) e (H, \odot) , com lei de composição \odot , um isomorfismo entre G e H é um mapa bijetivo $f : G \rightarrow H$, tal que $\forall g, g' \in G$, temos

$$f(g \odot g') = f(g) \odot f(g'). \quad (3.45)$$

Em outras palavras, um isomorfismo é um mapa que preserva a lei de composição do grupo. Grupos isomórficos possuem a mesma estrutura (mesma álgebra de Lie), e os denotamos por $G \cong H$.

Estes campos são chamados de *campos primários*, ou *operadores primários*. A ação do grupo conforme sobre tais campos é dada por [56]

$$[P_\mu, \Phi(x)] = i\partial_\mu \Phi(x), \quad (3.48)$$

$$[M_{\mu\nu}, \Phi(x)] = [i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + \Sigma_{\mu\nu}] \Phi(x), \quad (3.49)$$

$$[D, \Phi(x)] = i(-\Delta + x^\mu \partial_\mu) \Phi(x), \quad (3.50)$$

$$[K_\mu, \Phi(x)] = [i(x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu + 2x_\mu \Delta) - 2x^\nu \Sigma_{\mu\nu}] \Phi(x), \quad (3.51)$$

onde $\Sigma_{\mu\nu}$ são matrizes de uma representação finita do grupo de Lorentz, atuando sobre os índices do campo $\Phi(x)$.

3.3.2 Restrições sobre as Funções de Correlação

A invariância conforme na teoria de campos impõe severas restrições sobre a forma que as funções de correlação de 2- e 3-pontos podem ter. O objetivo desta subseção é revisar as formas que estas funções de correlação possuem de modo a poder comparar com as funções de correlação que vamos obter via Correspondência AdS/CFT.

A invariância conforme impõe que as funções de 2- e 3- pontos, para operadores associados a campos escalares, tenham a seguinte forma [34]

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \rangle = \frac{C}{|x_1 - x_2|^{2\Delta}} \quad (\Delta_1 = \Delta_2 \equiv \Delta), \quad (3.52)$$

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \rangle = 0 \quad (\Delta_1 \neq \Delta_2), \quad (3.53)$$

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \mathcal{O}_3(x_3) \rangle = \frac{C'}{x_{12}^{\Delta_{12}} x_{13}^{\Delta_{13}} x_{23}^{\Delta_{23}}}, \quad (3.54)$$

onde C e C' são constantes que dependem da normalização dos campos, Δ é a dimensão conforme do operador \mathcal{O} , $x_{ij} = |x_i - x_j|$ e os Δ_{ij} são dados por

$$\Delta_{12} = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 \quad (3.55)$$

$$\Delta_{13} = \Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2 \quad (3.56)$$

$$\Delta_{23} = \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1. \quad (3.57)$$

Por outro lado, a forma das funções de n -pontos, com $n \geq 4$, não é univocamente determinada pela simetria conforme, mas envolve funções arbitrárias das chamadas *razões anarmônicas*, isto é, invariantes conformes construídos por meio de combinações das posições dos campos. Para $n = 4$ existem duas razões anarmônicas independentes

$$\eta = \frac{x_{12}x_{34}}{x_{14}x_{23}} \quad \text{e} \quad \zeta = \frac{x_{12}x_{34}}{x_{13}x_{24}}. \quad (3.58)$$

O número de razões anarmônicas cresce com n , especificamente, existem $\frac{n(n-3)}{2}$ delas [34].

Como exemplo, a forma geral da função de 4-pontos é dada por

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\mathcal{O}_4(x_4) \rangle = f(\eta, \zeta) \prod_{i < j}^4 x_{ij}^{\Sigma/3 - \Delta_i - \Delta_j}, \quad (3.59)$$

onde $\Sigma = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$ e $f(\eta, \zeta)$ é uma função arbitrária das razões anarmônicas.

3.4 Isometrias

Grandezas tensoriais variam de uma forma bem determinada quando fazemos transformações de coordenadas. Entretanto, é particularmente interessante quando uma grandeza tensorial é invariante, isto é, não varia por transformações de coordenadas. Um exemplo muito importante é invariância da métrica $g_{\mu\nu}$ sob um conjunto de transformações de coordenadas (isometrias). Esta invariância está relacionada às propriedades de simetria da variedade Riemanniana à qual a métrica pertence. Nesta seção vamos ver que, no caso de transformações de coordenadas contínuas, há um método de gerar estas isometrias por meio dos chamados *vetores de Killing*. Em seguida, calculamos explicitamente as isometrias do AdS em 5 dimensões.

A métrica $g_{\mu\nu}$ é dita invariante sob a transformação de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ se

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) \quad \forall x. \quad (3.60)$$

As transformações que obedecem (3.60) são chamadas de *isometrias*. Visto que $g_{\mu\nu}$ se transforma como um tensor covariante de segunda ordem, sua lei de transformação é

dada por

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} g'_{\rho\sigma}(x'). \quad (3.61)$$

Sendo assim, usando (3.60), a transformação $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$ será uma isometria se

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} g_{\rho\sigma}(x'). \quad (3.62)$$

É mais simples lidar com (3.62) se considerarmos o caso particular de transformações de coordenadas *infinitesimais*, ou seja,

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon X^{\mu}, \quad (3.63)$$

onde ϵ é um parâmetro infinitesimal arbitrário e X^{μ} é um campo vetorial. Diferenciando (3.63) obtemos

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\mu} + \epsilon \partial_{\nu} X^{\mu}. \quad (3.64)$$

Substituindo (3.64) em (3.62) e usando a expansão de Taylor, obtemos

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &= (\delta_{\mu}^{\rho} + \epsilon \partial_{\mu} X^{\rho})(\delta_{\nu}^{\sigma} + \epsilon \partial_{\nu} X^{\sigma}) g_{\rho\sigma}(x^{\lambda} + \epsilon X^{\lambda}) \\ &= (\delta_{\mu}^{\rho} + \epsilon \partial_{\mu} X^{\rho})(\delta_{\nu}^{\sigma} + \epsilon \partial_{\nu} X^{\sigma}) [g_{\rho\sigma}(x) + \epsilon X^{\lambda} \partial_{\lambda} g_{\rho\sigma}(x) + O(\epsilon^2)] \\ &= g_{\mu\nu}(x) + \epsilon [X^{\lambda} \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu} \partial_{\mu} X^{\rho} + g_{\mu\sigma} \partial_{\nu} X^{\sigma}] + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Cancelando $g_{\mu\nu}(x)$ nos dois lados da equação e, até primeira ordem em ϵ , vemos que a condição necessária para que a transformação (3.63) seja uma isometria é

$$X^{\lambda} \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu} \partial_{\mu} X^{\rho} + g_{\mu\sigma} \partial_{\nu} X^{\sigma} = 0 \quad (3.66)$$

Nesta equação podemos substituir as derivadas parciais pelas derivadas covariantes e usar que $\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = 0$ [31]. Com isso, obtemos

$$\nabla_{\mu} X_{\nu} + \nabla_{\nu} X_{\mu} = 0. \quad (3.67)$$

Estas são as *equações de Killing*. Suas soluções são dadas pelos *vetores de Killing*, ou *campo de Killing*, X^{μ} .

3.4.1 Cálculo das Isometrias do AdS

Vamos agora aplicar as ideias discutidas acima e calcular explicitamente as isometrias do AdS [18]. Focaremos no espaço de anti-de Sitter 5-dimensional (AdS_5), já que este é o espaço relevante na formulação original da Correspondência AdS/CFT [57].

Inicialmente, vamos reescrever (3.67) da seguinte forma

$$\partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu - 2\Gamma_{\mu\nu}^\sigma X_\sigma = 0, \quad (3.68)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ é o símbolo de Christoffel, dado por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\nu g_{\mu\rho} + \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (3.69)$$

Por simplicidade, vamos considerar a métrica do AdS_5 em coordenadas de Poincaré na representação Euclideana (3.28)

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^E dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{x_0^2}((dx^0)^2 + (dx^i)^2); \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.70)$$

Desta métrica obtemos

$$g_{\mu\nu}^E = \frac{1}{x_0^2}\delta_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{x_0^2}(I)_{\mu\nu}, \quad (3.71)$$

$$g_E^{\mu\nu} = x_0^2\delta^{\mu\nu} \equiv x_0^2(I)^{\mu\nu} \equiv x_0^2(I)_{\mu\nu} = x_0^2\delta_{\mu\nu}. \quad (3.72)$$

Onde fica explícito que $\delta_{\mu\nu}$ são os elementos da matriz identidade I 5-dimensional¹⁰.

Usando (3.71) e (3.69) podemos calcular os $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ para a métrica (3.70). Os não nulos são dados por:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{x_0}, \quad (3.73)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{x_0}\delta_{ij}, \quad (3.74)$$

$$\Gamma_{0j}^i = -\frac{1}{x_0}\delta_j^i. \quad (3.75)$$

¹⁰Como estamos trabalhando com uma métrica Euclideana, não há distinção entre índices em cima ou embaixo, a menos do fator x_0^2 . De fato, $X_\mu = g_{\mu\nu}^E X^\nu = \frac{1}{x_0^2}\delta_{\mu\nu} X^\nu = \frac{1}{x_0^2}X^\mu$.

Com isso, as equações de Killing (3.68) resultantes são

$$\partial_0 X_0 + \frac{1}{x_0} X_0 = 0, \quad (3.76)$$

$$\partial_0 X_i + \partial_i X_0 + \frac{2}{x_0} X_i = 0, \quad (3.77)$$

$$\partial_i X_j + \partial_j X_i - \frac{2}{x_0} \delta_{ij} X_0 = 0. \quad (3.78)$$

Por conveniência, vamos reescrever estas equações em termos dos vetores de Killing contravariantes, X^μ (ver nota de rodapé 10)

$$\partial_0 X^0 - \frac{1}{x_0} X^0 = 0, \quad (3.79)$$

$$\partial_0 X^i + \partial_i X^0 = 0, \quad (3.80)$$

$$\partial_i X^j + \partial_j X^i - \frac{2}{x_0} \delta_{ij} X^0 = 0. \quad (3.81)$$

A solução de (3.79) é da forma $X^0(x^0, x^i) = x^0 G(x^i)$, onde $G(x^i)$ é uma função a ser determinada. Substituindo este resultado em (3.81) obtemos

$$\partial_i X^j + \partial_j X^i - 2\delta_{ij} G(x^i) = 0. \quad (3.82)$$

$G(x^i)$ pode ser determinado tomando-se o traço desta equação

$$G(x^i) = \frac{1}{4} \partial_i X^i. \quad (3.83)$$

Substituindo este resultado de volta em (3.81) obtemos

$$\partial_i X^j + \partial_j X^i - \frac{1}{2} \delta_{ij} \partial_l X^l = 0, \quad (3.84)$$

que é a equação do grupo conforme no espaço Euclidiano quadridimensional.

O próximo passo é reescrever (3.84) convenientemente como

$$(2\partial_i \partial_j + \delta_{ij} \partial_k \partial_k) \partial_l X^l = 0. \quad (3.85)$$

Esta equação determina a dependência quadrática de $X^i(x^0, x^i)$ nas coordenadas x^i :

$$X^i(x^0, x^i) = b^i(x^0) + \lambda x^i + \omega^{ik}(x^0) x^k + d^i \vec{x}^2 - 2(\vec{d} \cdot \vec{x}) x^i, \quad (3.86)$$

onde $\omega^{ik}(x^0) = -\omega^{ki}(x^0)$. Substituindo este resultado em (3.83) obtemos a forma explícita de $G(x^i)$ em termos das coordenadas x^i

$$G(x^i) = \lambda - 2d^i x^i = \lambda - 2\vec{d} \cdot \vec{x}. \quad (3.87)$$

Consequentemente,

$$X^0(x^0) = (\lambda - 2\vec{d} \cdot \vec{x})x^0. \quad (3.88)$$

Fazendo uso agora da equação (3.80) temos

$$\partial_0 \omega^{ik}(x^0)x^k + \partial_0 b^i(x^0) = 2d^i x^0. \quad (3.89)$$

Para esta equação ser satisfeita devemos comparar os termos que envolvem x^k e x^0 de cada lado da equação separadamente. Sendo assim, obtemos

$$\partial_0 \omega^{ik}(x^0) = 0 \longrightarrow \omega^{ik}(x^0) = \omega^{ik} = \text{constante}, \quad (3.90)$$

$$\partial_0 b^i(x^0) = 2d^i x^0 \longrightarrow b^i(x^0) = a^i + d^i x_0^2. \quad (3.91)$$

Por fim, reunindo (3.86), (3.88), (3.90), (3.91), temos que os vetores de Killing $X^\mu = (X^0, X^i)$ que geram as isometrias infinitesimais do espaço AdS_5 são dadas por:

$$X^0(x^0) = (\lambda - 2\vec{d} \cdot \vec{x})x^0 \quad (3.92)$$

$$X^i(x^0, x^i) = a^i + \lambda x^i + \omega^{ik} x^k + d^i(x_0^2 + \vec{x}^2) - 2(\vec{d} \cdot \vec{x})x^i. \quad (3.93)$$

Note que estas isometrias, de fato, $\in SO(1, d+1)$, com $d = 4$ para o AdS_5 . Em particular, em $x^0 = 0$, ou seja, na fronteira do AdS , as isometrias são dadas por

$$X^0 = 0 \quad (3.94)$$

$$X^i = a^i + \lambda x^i + \omega^{ik} x^k + d^i \vec{x}^2 - 2(\vec{d} \cdot \vec{x})x^i. \quad (3.95)$$

Estas isometrias correspondem às transformações conformes infinitesimais no espaço quadridimensional com coordenadas x^i . Em outras palavras, a fronteira do AdS é invariante sob o grupo conforme.

Portanto, mostramos que o grupo de isometria (Euclideano) do AdS_5 é o $SO(1, 5)$, e que ele atua na fronteira (4-dimensional) como o grupo conforme, evidenciando o isomorfismo entre esses dois grupos, conforme visto na seção anterior para o caso geral em que o grupo $SO(1, d + 1)$ (grupo de isometria do AdS em $(d + 1)$ dimensões) é isomorfo ao grupo conforme em d dimensões.

Capítulo 4

A Correspondência AdS/CFT

A relação entre teorias de calibre e teoria de cordas em espaços de anti-de Sitter¹ foi motivada pelo estudo de D-branas e buracos negros em teoria de cordas. A comparação bem-sucedida da seção de choque do dÍlaton na aproximação de onda s com um cálculo perturbativo utilizando um modelo de D3-brana [50] foi a primeira evidência concreta de que as funções de green da teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills poderiam ser obtidas a partir da supergravidade. O propósito deste capítulo, portanto, é mostrar como a Correspondência AdS/CFT foi concebida a partir do modelo de D3-branas visto sob duas perspectivas diferentes (i) a perspectiva da supergravidade e (ii) a perspectiva da teoria de calibre. Para isto, vamos precisar revisar alguns elementos fundamentais presentes nestas construções. Na seção 4.1, discutimos sobre o limite de baixas energias da teoria de cordas tipo IIB e escrevemos sua ação efetiva. Na continuação, definimos o conceito de p -brana, suas simetrias e descrevemos suas soluções clássicas provenientes das equações de movimento da supergravidade; em seguida, definimos o conceito de p -brana extrema, que está relacionada com a descrição em termos de múltiplas Dp -branas. Na seção 4.2, discutimos sobre as Dp -branas na teoria de cordas e a relação entre Dp -branas e teorias de calibre no seu volume; na continuação, focamos no caso especial da D3-brana, que foi o modelo utilizado por Maldacena para chegar na Correspondência AdS/CFT. Na

¹Especificamente, espaços da forma $AdS_{d+1} \times M^{D-d-1}$, onde M é um espaço de Einstein (3.4) ($D - d - 1$)-dimensional, com $D = 10$ para a teoria de cordas e $D = 11$ para a teoria M [69]. Nos casos de máxima simetria M é uma esfera [99].

seção 4.3, mostramos em detalhes a equivalência entre as descrições via supergravidade e modelo de D3-branas que levou Maldacena a conjecturar que a teoria de cordas tipo IIB em $AdS_5 \times S^5$ é equivalente a teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills $SU(N)$ em $d = 4$ dimensões. Em paralelo, discutimos o limite de validade desta equivalência, a correspondência entre as simetrias dos dois lados e versões diferentes da Correspondência AdS/CFT. Finalmente, apresentamos uma prescrição, proposta por E. Witten, para o cálculo de observáveis (funções de correlação, por exemplo) na Correspondência AdS/CFT, e também fazemos uma breve discussão sobre a questão da renormalização da ação da supergravidade no AdS .

4.1 p -Branas Negras: Soluções Clássicas da Supergravidade

Na teoria de cordas existe uma variedade de soluções clássicas que correspondem a buracos negros estendidos, isto é, com p dimensões espaciais. Estas soluções são conhecidas como p -branas negras, e foram originalmente obtidas no contexto da supergravidade, que é o limite de baixas energias da teoria de cordas. Nesta seção vamos fazer uma descrição destas soluções clássicas da supergravidade com o objetivo de chegar ao conceito de p -brana extrema para, em seguida, focar no caso em que $p = 3$, cuja relevância será explorada na próxima seção. Antes disto, fazemos uma discussão sobre o limite de baixas energias da teoria de cordas tipo IIB, definimos o conceito geométrico de p -brana e suas simetrias. Grande parte desta seção é baseada em [2], que também contém uma extensa lista de referências detalhadas sobre p -branas e buracos negros em teoria de cordas.

4.1.1 Limite de Baixas Energias da Teoria de Cordas Tipo IIB

Começemos com a teoria de cordas tipo IIB em 10 dimensões. O limite de baixas energias desta teoria é obtido tomando-se o limite $\alpha' \rightarrow 0$, que resulta na supergravidade.

Vejam os porquê disto. Uma vez que o espectro de massa da teoria de cordas é dado por

$$M^2 \sim \frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{l_s^2}, \quad (4.1)$$

com l_s sendo a escala de comprimento fundamental da corda, no limite $\alpha' \rightarrow 0$ os estados tornam-se infinitamente massivos e, portanto, são inacessíveis. Neste caso, podemos levar em consideração somente os estados não massivos, já que os estados infinitamente massivos não vão ser excitados. A supergravidade surge neste limite, pois o espectro sem massa da teoria de cordas tipo IIB contém o mesmo conteúdo de campo que o supermultiplete sem massa da supergravidade em 10 dimensões [2]. Por isso, dizemos também que a teoria é efetiva, pois estamos considerando apenas a contribuição dos estados sem massa da teoria e descartando os demais.

Na formulação de baixas energias da teoria de cordas tipo IIB, há um problema devido a auto-dualidade da intensidade de campo F_5 , isto é, $F_5 = *F_5$. Não há uma ação covariante para tal campo, porém a seguinte ação (setor bosônico) efetiva ($\alpha' \rightarrow 0$) se aproxima bastante [71]:

$$S_{IIB} = S_{NS} + S_R + S_{CS}, \quad (4.2)$$

onde

$$S_{NS} = \frac{1}{2k_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left(R + 4\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} |H_3|^2 \right), \quad (4.3)$$

$$S_R = -\frac{1}{4k_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left(|F_1|^2 + |\tilde{F}_3|^2 + \frac{1}{2} |\tilde{F}_5|^2 \right), \quad (4.4)$$

$$S_{CS} = -\frac{1}{4k_{10}^2} \int A_4 \wedge H_3 \wedge F_3, \quad (4.5)$$

com \tilde{F}_3 e \tilde{F}_5 dados por

$$\tilde{F}_3 = F_3 - A_0 \wedge H_3, \quad (4.6)$$

$$\tilde{F}_5 = F_5 - \frac{1}{2} A_2 \wedge H_3 + \frac{1}{2} B_2 \wedge H_3, \quad \tilde{F}_5 = *\tilde{F}_5. \quad (4.7)$$

S_{NS} , S_R e S_{CS} denotam, respectivamente, as ações do setor de Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz (NS-NS), Ramond-Ramond (RR) e a ação de Chern-Simons. O campo ϕ que

aparece em (4.3) é o *dílaton*, e a constante k_{10} está relacionada com a constante de Newton, G_{10} , em 10 dimensões. Em geral, para $(d + 1)$ dimensões [69]:

$$2k_{d+1}^2 = 16\pi G_{d+1}. \quad (4.8)$$

As intensidades de campo F_1 , F_3 , F_5 e H_3 estão associadas aos potenciais A_0 , A_2 , A_4 e B_2 da seguinte maneira

$$F_{p+2} = dA_{p+1}; \quad p = -1, 1, 3 \quad (4.9)$$

$$H_3 = dB_2. \quad (4.10)$$

Estes objetos são formas diferenciais. Para uma revisão sobre formas diferenciais veja o Apêndice C.

Os potenciais A_0 , A_2 , A_4 e B_2 e suas respectivas intensidades de campo F_1 , F_3 , F_5 e H_3 fazem parte, junto com a métrica, $g_{\mu\nu}$, e o *dílaton*, ϕ , do espectro não massivo da teoria de cordas tipo IIB que, como mencionado anteriormente, é o mesmo conteúdo presente no supermultipeto não massivo da supergravidade em 10 dimensões. Além disso, há também no espectro os graus de liberdade associados à 5-forma dual. As equações de campo que resultam da ação (4.2) são consistentes com o fato de que $\tilde{F}_5 = *\tilde{F}_5$, mas elas não implicam isto. Sendo assim, é preciso impor esta condição de auto-dualidade diretamente nas *soluções* das equações de campo, como um vínculo adicional, caso contrário, se fazemos isto diretamente em (4.2) obtemos as equações de movimento erradas [71].

4.1.2 p -Branas: Conceito, Simetria e Soluções Clássicas

Uma p -brana, do ponto de vista geométrico, é uma hipersuperfície plana $(p + 1)$ -dimensional com p dimensões espaciais e 1 dimensão temporal. O espaço transversal à p -brana possui, portanto, dimensão $D - p - 1$, onde D é a dimensão do espaço-tempo considerado. Soluções da supergravidade correspondendo a p -branas sempre podem ser encontradas com máxima simetria rotacional $SO(D - p - 1)$ neste espaço transversal.

Além disso, a p -brana possui invariância sob o grupo de Poincaré, $\mathbb{R}^{p+1} \times SO(1, p)$, em seu volume $(p+1)$ -dimensional. Logo, do ponto de vista do grupo de simetria, a p -brana é uma solução da supergravidade com grupo de simetria (no caso particular em que $D = 10$)

$$\mathbb{R}^{p+1} \times SO(1, p) \times SO(9 - p) \equiv \mathcal{P}(1, p) \times SO(9 - p), \quad (4.11)$$

onde $\mathcal{P}(1, p)$ representa o grupo de Poincaré em $(p+1)$ dimensões.

Vamos agora descrever como as soluções correspondendo a p -branas aparecem na supergravidade de forma mais explícita. Começemos com uma ação genérica, no referencial da corda, que descreve o limite de baixas energias ($\alpha' \rightarrow 0$) da teoria de cordas tipo IIB, ou seja, a supergravidade² [69]:

$$S = \frac{1}{2k_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[e^{-2\phi} (R + 4g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) - \frac{1}{2(p+2)!} F_{p+2}^2 \right], \quad (4.12)$$

onde $F_{p+2} = dA_{p+1}$ é a intensidade de campo associada ao potencial A_{p+1} . Por simplicidade, estamos procurando soluções correspondendo a p -branas carregadas com relação a um único tipo de potencial, A_{p+1} [87]. Além disso, vamos estar interessados em p -branas carregadas eletricamente³ sob A_{p+1} , com A_{p+1} pertencendo ao setor de RR [48]. O porquê disto ficará claro na próxima seção. O objetivo aqui é procurar uma solução de (4.12) que corresponda a um objeto com p dimensões espaciais carregado com N unidades de carga elétrica sob o potencial A_{p+1} . Esta fonte carregada (a p -brana) por sua vez irá gerar um fluxo para a intensidade de campo correspondente, $F_{p+2} = dA_{p+1}$, de modo que

$$\int_{S^{8-p}} F_{p+2} \propto N, \quad (4.13)$$

onde S^{8-p} é a esfera $(8-p)$ -dimensional no espaço transversal que engloba a fonte. A equação (4.13) é a Lei de Gauss generalizada para um objeto estendido (p dimensões espaciais) carregado eletricamente.

²Na verdade (4.12) é um truncamento consistente de (4.2), isto é, um subconjunto dos campos bosônicos foram desconsiderados de tal modo que as soluções de (4.12) continuam sendo soluções de (4.2), mas são soluções particulares [28, 87].

³A teoria também contém $(6-p)$ -branas carregadas *magneticamente*, isto é, carregadas sob o dual $dA_{7-p} = *dA_{p+1}$ [2, 30]. Em outras palavras, na ação (4.12) ao invés de aparecer F_{p+2} , aparece $*F_{p+2} = F_{8-p}$. Portanto, a presença de ambos os tipos de carga (elétrica e magnética) de RR na teoria, faz com que elas tenham que ser quantizadas segundo o critério de quantização de Dirac [32, 67, 92].

Vai ser conveniente reescrever a ação (4.12) em um outro referencial por meio de uma transformação de Weyl

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g'_{\mu\nu} = e^{\lambda\phi} g_{\mu\nu}. \quad (4.14)$$

Escolhendo⁴ $\lambda = -\frac{1}{2}$ [69], obtemos

$$g'_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}^{\text{Einstein}} = e^{-\frac{1}{2}\phi} g_{\mu\nu}^{\text{Corda}}, \quad (4.15)$$

onde $g_{\mu\nu}^{\text{Einstein}}$ é a métrica no chamado referencial de Einstein e $g_{\mu\nu}^{\text{Corda}}$ é a métrica original no referencial da corda. A ação (4.12) escrita no referencial de Einstein é dada por [69]:

$$S_{\text{Einstein}} = \frac{1}{2k_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2(p+2)!} e^{a_p \phi} F_{p+2}^2 \right], \quad (4.16)$$

onde a_p é um parâmetro que controla a magnitude do acoplamento do dÍlaton com a intensidade de campo F_{p+2} , e é dado por:

$$a_p = -\frac{1}{2}(p-3). \quad (4.17)$$

As equações de movimento resultantes da variação de (4.16) são [69]:

$$\begin{aligned} R^\mu{}_\nu &= \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi + S^\mu{}_\nu, \\ \nabla^2 \phi &= \frac{a_p}{2(p+2)!} F_{p+2}^2, \\ \partial_\mu (\sqrt{g} e^{a_p \phi} F^{\mu\mu_2 \dots \mu_{p+2}}) &= 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde $S^\mu{}_\nu$ é dado por

$$S^\mu{}_\nu = \frac{1}{2(p+2)!} e^{a_p \phi} \left((p+2) F^{\mu\mu_2 \dots \mu_{p+2}} F_{\nu\mu_2 \dots \mu_{p+2}} - \frac{p+1}{8} \delta^\mu{}_\nu F_{p+2}^2 \right). \quad (4.19)$$

A solução de (4.18), escrita em coordenadas tipo Schwarzschild [87] e que respeita a simetria (4.11), é dada por [2]:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{f_+(\rho)}{\sqrt{f_-(\rho)}} dt^2 + \sqrt{f_-(\rho)} \sum_{i=1}^p dx^i dx^i + \frac{[f_-(\rho)]^{-\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}}}{f_+(\rho)} d\rho^2 + \rho^2 [f_-(\rho)]^{\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}} d\Omega_{8-p}^2, \\ e^{-2\phi} &= g_s^{-2} [f_-(\rho)]^{-\frac{p-3}{2}}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

⁴O fator λ é escolhido de modo a eliminar o fator $e^{-2\phi}$ na ação (4.12) de maneira que ela fique parecida com a ação de Einstein-Hilbert.

onde

$$f_{\pm}(\rho) = 1 - \left(\frac{\rho_{\pm}}{\rho}\right)^{7-p}, \quad (4.21)$$

e g_s é a constante de acoplamento da corda. Os parâmetros ρ_{\pm} são tais que obedecem à condição⁵ $\rho_+ \geq \rho_-$, e estão relacionados com a massa (por unidade de volume), M , e a carga de RR, N , da p -brana por [2]:

$$M = \frac{1}{(7-p)(2\pi)^7 d_p g_s^2 l_s^8} ((8-p)\rho_+^{7-p} - \rho_-^{7-p}), \quad (4.22)$$

$$N = \frac{1}{d_p g_s l_s^{7-p}} (\rho_+ \rho_-)^{\frac{7-p}{2}}, \quad (4.23)$$

onde d_p é um fator numérico:

$$d_p = 2^{5-p} \pi^{\frac{5-p}{2}} \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right). \quad (4.24)$$

A condição $\rho_+ \geq \rho_-$ se traduz em uma desigualdade muito importante entre a massa da p -brana, M , e a sua carga, N :

$$M \geq \frac{N}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}}. \quad (4.25)$$

A solução cuja massa M está no limite inferior desta desigualdade, isto é,

$$M = \frac{N}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}}, \quad (4.26)$$

é chamada de *p-brana extrema*. Por outro lado, quando M é estritamente maior, temos uma *p-brana negra não extrema*. É chamada de negra pois ela possui um horizonte de evento para $\rho_+ > \rho_-$ [2]. A desigualdade (4.25) é também o *limite BPS*⁶ com respeito a supersimetria em 10 dimensões e, no caso extremo (4.26), *a solução preserva metade das supersimetrias* [2, 28, 30, 87]. Isto sugere que a p -brana extrema é um estado fundamental da p -brana negra para uma dada carga N . Na literatura, estes objetos que preservam

⁵Veja [2, 28, 87] para uma discussão mais aprofundada sobre esta condição.

⁶O limite BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) estabelece que a massa de qualquer estado em uma teoria supersimétrica é limitada inferiormente pelas suas cargas centrais [84].

metade das supersimetrias por meio da saturação do limite BPS são chamados de $\frac{1}{2}$ BPS ou *estados* $\frac{1}{2}$ BPS [30].

O limite extremo, $\rho_+ = \rho_-$, da solução (4.20) é dado por:

$$ds^2 = \sqrt{f_+(\rho)} \left(-dt^2 + \sum_{i=1}^p dx^i dx^i \right) + [f_+(\rho)]^{-\frac{3}{2} - \frac{5-p}{7-p}} d\rho^2 + \rho^2 [f_+(\rho)]^{\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}} d\Omega_{8-p}^2. \quad (4.27)$$

Por fim, para descrever esta solução extrema fora do horizonte ($\rho = \rho_+$), é conveniente definir uma nova coordenada, r , por

$$r^{7-p} = \rho^{7-p} - \rho_+^{7-p}, \quad (4.28)$$

e introduzir coordenadas angulares,

$$r^a = r\Omega^a, \quad (4.29)$$

com $a = 1, \dots, 8-p$ e $\sum_a (\Omega^a)^2 = 1$. Logo, a métrica e o dÍlaton para a p -brana extrema nestas novas coordenadas são escritos como:

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{H(r)}} \left(-dt^2 + \sum_{i=1}^p dx^i dx^i \right) + \sqrt{H(r)} (dr^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2), \quad (4.30)$$

$$e^\phi = g_s H(r)^{\frac{3-p}{4}}, \quad (4.31)$$

onde

$$H(r) = \frac{1}{f_+(\rho)} = 1 + \frac{R^{7-p}}{r^{7-p}}, \quad (4.32)$$

$$R^{7-p} = d_p g_s N l_s^{7-p}, \quad (4.33)$$

onde $H(r)$ é uma função harmônica em $(9-p)$ dimensões [28, 87], ou seja, no espaço transversal à p -brana, e definimos $R \equiv \rho_+$, pois este parâmetro representa o raio de curvatura do espaço gerado pela p -brana. O horizonte agora está localizado em $r = 0$, isto é, na posição da p -brana.

4.1.2.1 A 3-Brana Extremal

Vamos agora focar na solução extrema, (4.30) e (4.31), no caso particular em que $p = 3$. Neste caso temos uma 3-brana, isto é, um hiperplano em (3+1) dimensões.

Fazendo $p = 3$ em (4.30), (4.31), (4.32) e (4.33), obtemos

$$ds^2 = [H(r)]^{-\frac{1}{2}} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + [H(r)]^{\frac{1}{2}} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (4.34)$$

$$e^\phi = g_s, \quad (4.35)$$

com

$$H(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4}, \quad (4.36)$$

$$R^4 = 4\pi g_s N l_s^4 = 4\pi g_s N (\alpha')^2, \quad (4.37)$$

Note que no caso $p = 3$ o dílaton, (4.35), é constante. Além disso, $a_{p=3} = 0$ e, portanto, o dílaton não se acopla com a intensidade de campo de RR, F_{p+2} , quando $p = 3$ (veja (4.16)). Veremos na próxima seção que a solução (4.34), junto com (4.35), é equivalente a solução correspondendo a N D3-branas coincidentes em 10 dimensões, onde N aqui é a carga da 3-brana extrema. Em outras palavras, o espaço gerado pela presença de N D3-branas coincidentes é exatamente o descrito pela métrica (4.34) da 3-brana extrema.

Até aqui, discutimos as soluções correspondendo a p -branas do ponto de vista da supergravidade clássica. Este regime é apropriado quando o raio de curvatura da p -brana, R , é muito maior que o comprimento da corda, l_s , ou seja,

$$R \gg l_s, \quad (4.38)$$

de modo que efeitos característicos (devido aos estados massivos) da teoria de cordas possam ser desprezados. Além disso, para suprimir correções a nível de loop, a constante de acoplamento, $g_s = e^\phi$, deve ser mantida pequena. Visto que o dílaton, (4.35), é constante no caso $p = 3$, podemos mantê-lo pequeno em toda a geometria da 3-brana extrema fazendo $g_s < 1$. Como

$$l_P = g_s^{\frac{1}{4}} l_s, \quad (4.39)$$

então

$$g_s < 1 \implies l_s > l_P, \quad (4.40)$$

onde l_P é o comprimento de Planck em 10 dimensões.

Em resumo, a aproximação da supergravidade clássica é válida quando

$$R \gg l_s > l_P. \quad (4.41)$$

Uma vez que o raio de curvatura, R , está relacionado com a carga de RR, N , por (4.37), podemos expressar (4.41) como

$$N > g_s N \gg 1. \quad (4.42)$$

Por fim, a análise feita aqui é consistente com o que obtivemos no capítulo 2 via contagem de graus de liberdade. Lá vimos que a aproximação da supergravidade no *AdS* é válida quando o raio de curvatura do *AdS*, R_{AdS} , é muito maior que o comprimento de Planck, ou seja,

$$R_{AdS} \gg l_P. \quad (4.43)$$

Veremos na próxima seção, no contexto das D-branas, que no limite apropriado o espaço gerado pela presença de uma p -brana extrema envolve o espaço *AdS*.

4.2 D p -Branas e Teorias de Calibre

Na seção anterior vimos como as p -branas surgem como soluções clássicas da supergravidade, que é o limite de baixas energias ($\alpha' \rightarrow 0$) da teoria de cordas. Nesta seção o objetivo é fazer uma descrição das D p -branas no contexto da teoria de cordas, e como elas podem conter teorias de calibre em seu volume. Em seguida, vamos destacar a relação entre a p -brana extrema e a D p -brana. Finalmente, de forma análoga ao que fizemos na seção anterior, vamos focar no caso em que $p = 3$, ou seja, a D3-brana, por motivos que ficarão claros mais adiante. Referências consultadas: [2, 30, 77].

Em 1995, Polchinski [70] descobriu a existência de objetos não-perturbativos na teoria de cordas. Estes objetos são as D p -branas, isto é, hiperplanos $(p + 1)$ -dimensionais no

espaço-tempo onde os extremos de uma corda aberta podem estar fixados. Além disso, as Dp -branas podem servir como fonte de carga para os potenciais presentes na teoria de cordas fechadas (veja Figura 4.1). O “D” em D-brana vem do fato de que as condições de contorno que os extremos da corda aberta estão submetidos são condições de contorno de Dirichlet.

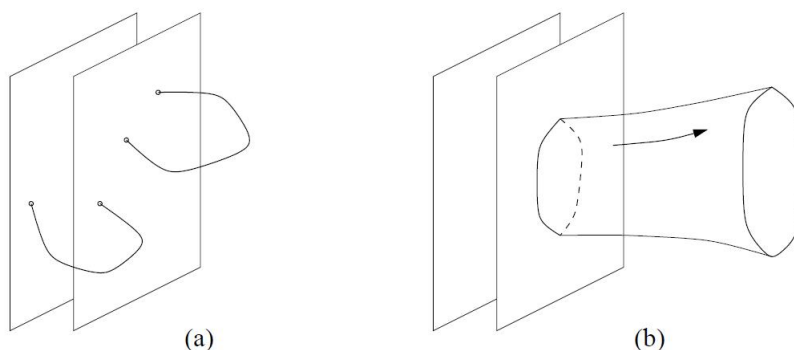


Figura 4.1: (a) A D-brana é uma hipersuperfície onde os extremos de uma corda aberta podem estar fixados e (b) podem servir como fonte de carga para cordas fechadas. Fonte: [2].

As Dp -branas são objetos dinâmicos que podem se mover no espaço-tempo e interagir com os modos provenientes das cordas abertas em seu volume $(p + 1)$ -dimensional e com os modos provenientes das cordas fechadas presentes no espaço-tempo 10-dimensional. Vamos considerar inicialmente uma corda aberta presa em uma única Dp -brana, com os extremos livres para se mover ao longo da Dp -brana. Esta corda aberta possui modos não massivos, isto é, campos de calibre, A_μ ($\mu = 0, \dots, p$), que vão descrever oscilações na Dp -brana⁷. Em particular, no limite de baixas energias ($\alpha' = l_s^2 \rightarrow 0$), apenas estes modos vão ser levados em conta. Além disso, podemos ter oscilações devido ao movimento rígido da Dp -brana no espaço-tempo [77]. Estes graus de liberdade podem ser parametrizados por $(9 - p)$ coordenadas, ϕ^i ($i = 1, \dots, 9 - p$), no espaço transversal. Do ponto de vista $(p + 1)$ -dimensional, os ϕ^i vão ser campos escalares no volume da Dp -brana. A ação que leva em conta estes dois tipos de excitações na Dp -brana é a chamada *ação de Dirac-*

⁷Mais os parceiros fermiônicos, por causa da supersimetria presente na teoria de cordas.

Born-Infeld [77, 102], cujo *setor bosônico* pode ser escrito como:

$$S_{DBI} = -T_{Dp} \int d^{p+1}x \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + 2\pi l_s^2 F_{\mu\nu})}, \quad (4.44)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica induzida no volume da Dp -brana, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é a intensidade de campo associada ao campo de calibre A_μ e T_{Dp} é a *tensão da Dp -brana*, dada por:

$$T_{Dp} = \frac{1}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}}, \quad (4.45)$$

o que indica que as Dp -branas são objetos não-perturbativos na teoria de cordas, devido ao fator g_s^{-1} .

No limite de baixas energias ($\alpha' = l_s^2 \rightarrow 0$) é possível mostrar [77] que (4.44) se reduz a ação de uma teoria de Yang-Mills abeliana, com grupo de simetria $U(1)$ em $d = p + 1$ dimensões, isto é, no volume da Dp -brana, mais $(9 - p)$ campos escalares ϕ^i sem interação (ou seja, apenas o termo cinético). Esta ação tem a forma

$$S_{YM} = -\frac{1}{g_{YM}^2} \int d^{p+1}x \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i \right), \quad (4.46)$$

onde g_{YM} é a constante de acoplamento de Yang-Mills que, em termos de l_s e g_s , é dada por:

$$g_{YM}^2 = 2(2\pi)^{p-2} l_s^{p-3} g_s. \quad (4.47)$$

Portanto, a teoria de calibre definida no volume de uma *única* Dp -brana, no limite de baixas energias e já levando em conta a supersimetria, é uma teoria de Super Yang-Mills com grupo de simetria $U(1)$ em $(p + 1)$ dimensões [98].

Agora, se considerarmos N Dp -branas paralelas *separadas* por uma distância r , teremos uma teoria de calibre com grupo de simetria $U(1)^N$, que se reduzirá a uma teoria de Super Yang-Mills com grupo de simetria $U(1)^N$ em $(p + 1)$ dimensões no limite de baixas energias [2, 30]. Por outro lado, se considerarmos o limite em que as N Dp -branas são *coincidentes*, teremos uma *teoria de Super Yang-Mills com grupo de simetria*⁸ $U(N)$ em $(p + 1)$

⁸A generalização de (4.44) e, conseqüentemente, de (4.46) para o caso não-abeliano não altera a relação (4.47) [69].

dimensões no limite de baixas energias [98]. A figura 4.2 ilustra as três configurações de D-branas discutidas aqui. Portanto, concluímos que N D p -branas coincidentes induzem uma teoria de calibre $U(N)$ em seu volume $(p + 1)$ -dimensional. Em particular, no caso em que $p = 3$, isto é, uma D3-brana, temos uma teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills com grupo de simetria $U(N)$ em 4 dimensões [2]. Isto vem do fato de que podemos reduzir dimensionalmente a teoria $\mathcal{N} = 1$ Super Yang-Mills presente no espectro não-massivo da supercorda aberta em 10 dimensões para uma teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills em 4 dimensões [69, 72].

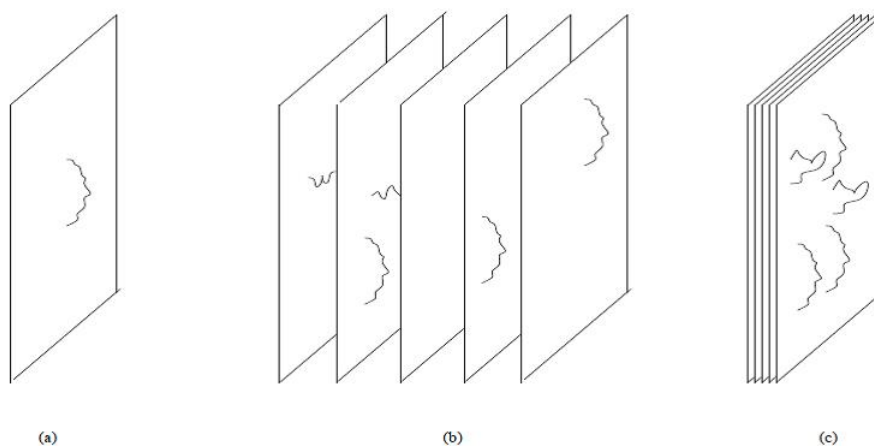


Figura 4.2: D-branas: (a) Uma, (b) N separadas, (c) N coincidentes. Fonte: [30].

Em seu artigo de 1995, Polchinski [70] mostrou também que D p -branas carregam cargas de RR e, que se colocarmos N D p -branas coincidentes no espaço-tempo, o hiperplano resultante carrega N unidades de carga sob o potencial de calibre A_{p+1} , com A_{p+1} pertencendo ao setor de RR, da mesma forma que a p -brana discutida na seção anterior. Além disso, ele mostrou que D p -branas e p -branas extremais (com métrica e dÍlaton dados, respectivamente, por (4.30) e (4.31)) são na verdade duas descrições do mesmo objeto. Por isso que na seção anterior procuramos soluções correspondendo a p -branas carregadas sob A_{p+1} , onde A_{p+1} pertencia ao setor de RR, já que as D-branas são objetos portadores de cargas de RR.

Potenciais de calibre como este descrito acima, possuem intensidades de campo ($F =$

dA) que fazem parte do espectro não massivo da teoria de cordas fechada, definida no espaço de Minkowski 10-dimensional (antes de colocar D-branas no espaço-tempo). Ao adicionarmos D-branas neste espaço-tempo plano, elas vão gerar um fluxo para a intensidade de campo correspondente (veja (4.13)) que, por sua vez, vai contribuir para o tensor de energia momento, $T_{\mu\nu}$, de modo que a geometria do espaço-tempo ao redor das D-branas vai se tornar curva, de acordo com as equações de Einstein. No caso de N D p -branas coincidentes, a geometria do espaço-tempo vai ser exatamente a dada por (4.30), devido a equivalência entre a p -brana extrema carregando N unidades de carga de RR e N D p -branas coincidentes carregando N unidades de carga de RR. O dílaton neste caso é dado por (4.31). Para fins de visualização vamos reescrever aqui estas equações:

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{H(r)}} \left(-dt^2 + \sum_{i=1}^p dx^i dx^i \right) + \sqrt{H(r)} (dr^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2), \quad (4.48)$$

$$e^\phi = g_s H(r)^{\frac{3-p}{4}}, \quad (4.49)$$

com

$$H(r) = 1 + \frac{R^{7-p}}{r^{7-p}}, \quad (4.50)$$

$$R^{7-p} = d_p g_s N l_s^{7-p}, \quad (4.51)$$

onde

$$d_p = 2^{5-p} \pi^{\frac{5-p}{2}} \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right). \quad (4.52)$$

A solução correspondendo a p -branas extremas ((4.30) e (4.31)) corresponde à descrição clássica da supergravidade, como já foi discutido na seção anterior. Por outro lado, a solução acima, correspondendo à N D p -branas coincidentes, corresponde à descrição quântica no contexto da teoria de cordas e, assim como a p -brana extrema, esta solução preserva metade das supersimetrias da teoria de cordas. Portanto, as *D-branas são objetos $\frac{1}{2}$ BPS em teoria de cordas* [2, 30].

4.2.1 D3-Branas: Um Caso Especial

A solução correspondendo a N D3-branas no espaço-tempo, segundo Polchinski [70,72], vai ser equivalente à solução correspondendo a 3-brana extrema com N unidades de carga de RR da seção anterior. Esta solução é especial por diversas razões, entre elas:

1. Seu volume possui invariância de Poincaré em 4 dimensões (veja (4.11)).
2. Possui dílaton, $e^\phi = g_s$, e axion, A_0 ((4.9)), constantes.
3. É regular em $r = 0$ (horizonte) [2, 28, 30, 69, 87].
4. É auto-dual, isto é, $F_5 = *F_5$.

Dada a sua importância no desenvolvimento da Correspondência AdS/CFT, vamos apresentar aqui sua solução completa, correspondendo a N D3-branas no espaço-tempo de Minkowski 10-dimensional da teoria de cordas tipo IIB:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_2 = A_2 = 0 \\ g_s = e^\phi, A_0 \text{ constante} \\ ds^2 = [H(r)]^{-\frac{1}{2}} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + [H(r)]^{\frac{1}{2}} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \\ H(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4}, \text{ com } R^4 = 4\pi g_s N (\alpha')^2 \\ F_5 = (1 + *) dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge d(H^{-1}) \end{array} \right. \quad (4.53)$$

Onde $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ e $d(H^{-1})$ é a derivada exterior da função $\frac{1}{H(r)}$.

Vamos agora analisar a métrica de (4.53) em duas regiões do espaço-tempo (i) $r \gg R$ e (ii) $r \ll R$:

(i) Região 1 ($r \gg R$): Nesta região, como estamos muito longe da D3-brana, devemos esperar que o efeito de curvatura devido a sua presença diminua, de modo que para $r \gg R$ recuperamos o espaço-tempo de Minkowski em 10 dimensões, $\mathbb{R}^{1,9}$. De fato, nesta região podemos desprezar o termo $\frac{R^4}{r^4}$ em comparação com o 1 na expressão de $H(r)$. Sendo assim, a métrica nesta região é dada por

$$ds^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_5^2. \quad (4.54)$$

Esta é a métrica do espaço-tempo plano em (9+1) dimensões.

(ii) Região 2 ($r \ll R$): Esta região corresponde ao limite em que estamos perto da D3-brana, isto é, próximo do horizonte ($r = 0$). Neste caso o 1 torna-se desprezível em comparação a $\frac{R^4}{r^4}$, de modo que $H(r) \sim \frac{R^4}{r^4}$. Portanto, temos que

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{R^2}{r^2}dr^2 + R^2 d\Omega_5^2 \quad (4.55)$$

Vejamos que espaço é este. Fazendo a mudança de coordenadas

$$z \equiv \frac{R^2}{r}, \quad (4.56)$$

obtemos

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(dz^2 - dt^2 + d\vec{x}^2) + R^2 d\Omega_5^2. \quad (4.57)$$

O primeiro termo de (4.57) é justamente a métrica do espaço AdS_{d+1} em coordenadas de Poincaré (z, \vec{x}, t) , e com raio de curvatura dado por R (equação (3.15) do capítulo 3). Neste caso específico, $d = 4$ e, portanto, temos a métrica do espaço AdS_5 . O segundo termo descreve a métrica de uma 5-esfera, S^5 . Logo, *o espaço resultante na região próxima ao horizonte ($r \ll R$) é o espaço $AdS_5 \times S^5$* . Note que os espaços AdS_5 e S^5 , separadamente, possuem o mesmo raio de curvatura, R .

Por fim, só para reforçar o que foi discutido no início desta seção, que do ponto de vista da teoria de calibre definida nas N D3-branas coincidentes, teremos, no limite de baixas energias ($\alpha' \rightarrow 0$), uma teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills com grupo de simetria $U(N)$ em $d = 4$ dimensões e

$$g_{YM}^2 = 4\pi g_s. \quad (4.58)$$

É importante salientar que a teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills $U(N)$ é uma teoria de campos com simetria conforme a nível quântico (função $\beta \equiv 0$) [30, 59]. O grupo de Lie que leva em conta todas as simetrias desta teoria em sua *fase superconforme*⁹ é o supergrupo conforme $SU(2, 2|4)$ [2, 30, 77].

⁹Veja [30] para mais detalhes sobre as fases dinâmicas da teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills.

4.3 Conjectura de Maldacena: A Correspondência AdS/CFT

Agora temos os elementos necessários para entender o argumento relacionando a teoria de cordas tipo IIB em $AdS_5 \times S^5$ e a teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills $SU(N)$ em $d = 4$ dimensões [57]. Este é o objetivo principal desta seção. Em paralelo, vamos discutir o limite de validade da Correspondência, checar as simetrias dos dois lados e apresentar diferentes versões da mesma. Em seguida, vamos apresentar a prescrição de Witten para o cálculo de observáveis na Correspondência AdS/CFT, que vai ser utilizada no próximo capítulo como aplicação no caso do campo escalar na Correspondência. Finalmente, vamos fazer uma discussão sobre o processo de renormalização da ação da supergravidade no AdS , visando esclarecer alguns pontos importantes dentro da Correspondência.

Inicialmente, vamos considerar duas abordagens e em cada uma delas vamos tomar o chamado *Limite de Maldacena*, que vamos explicar mais adiante no que consiste este limite.

Abordagem 1: Vamos começar considerando N D3-branas paralelas separadas por uma distância r no espaço-tempo de Minkowski 10-dimensional da teoria de cordas tipo IIB. Neste fundo (“*background*”, em inglês) a teoria de cordas possui dois tipos de excitações: (i) cordas abertas, que vão descrever excitações no volume (3+1)-dimensional das D3-branas, e (ii) cordas fechadas que são excitações no volume (9+1)-dimensional (“*bulk*”, em inglês) do espaço-tempo. A ação que descreve este sistema físico é dada por:

$$S_1 = S_{\text{Volume}} + S_{\text{Bрана}} + S_{\text{Int}}, \quad (4.59)$$

onde S_{Volume} é a ação que descreve a teoria de cordas tipo IIB no volume (9+1)-dimensional mais possíveis correções quânticas, $S_{\text{Bрана}}$ é a ação que descreve a teoria de calibre no volume (3+1)-dimensional das D3-branas mais possíveis correções em derivadas de ordem superior (por exemplo, termos da forma $\alpha'^2 Tr(F^4)$ [2]) e S_{Int} é a ação que descreve

interações entre os modos da brana com os modos do volume. Agora, vamos tomar o limite de maldacena:

$$\alpha' \rightarrow 0 \text{ com } g_s, N \text{ e } U \equiv \frac{r}{\alpha'} \text{ fixos.}$$

O limite $\alpha' \rightarrow 0$ é o limite de baixas energias da teoria de cordas (supergravidade), de modo que, neste limite, temos $S_{\text{Bрана}} \rightarrow S_{\mathcal{N}=4 \text{ SYM}}$, $S_{\text{Volume}} \rightarrow S_{\text{SG}}$ e, é possível mostrar [2, 30], que $S_{\text{Int}} \rightarrow 0$. Portanto,

$$S_1 = S_{\mathcal{N}=4 \text{ SYM}} + S_{\text{SG}}. \quad (4.60)$$

$S_{\mathcal{N}=4 \text{ SYM}}$ é ação que descreve a teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills $U(N)$ pura no volume (3+1)-dimensional das D3-branas. A teoria é dita pura pois os termos de correção em derivada superior são nulos no limite $\alpha' \rightarrow 0$. S_{SG} é a ação da supergravidade livre no volume (9+1)-dimensional. Livre devido ao fato de que a gravidade se torna livre a longa distâncias (baixas energias). Portanto, nesta primeira abordagem o limite de Maldacena nos fornece duas teorias desacopladas, isto é, não-interagentes ($S_{\text{Int}} \rightarrow 0$):

- $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills $U(N)$ pura em $\mathbb{R}^{1,3}$.
- Supergravidade livre em $\mathbb{R}^{1,9}$.

Por fim, nesta primeira abordagem, a condição $U = \frac{r}{\alpha'}$ fixo significa que estamos mantendo fixa a massa¹⁰ da corda aberta esticada entre a D3-brana em $r = 0$ e a D3-brana em \vec{r} . Visto que U é fixo e $\alpha' \rightarrow 0$, temos que $r \rightarrow 0$, ou seja, estamos considerando o limite em que as D3-branas são coincidentes.

Abordagem 2: Vamos agora considerar N D3-branas do ponto de vista da supergravidade IIB em (9+1) dimensões. A solução¹¹ correspondendo a N D3-branas é dada por

¹⁰ α' tem dimensão de $[L]^2$ e, portanto, $U \equiv \frac{r}{\alpha'}$ tem dimensão de $[L]^{-1} = [M]$, ou seja, U tem dimensão de massa (ou energia).

¹¹Lembrando que esta solução é equivalente a solução clássica correspondendo a 3-brana extrema da supergravidade.

(4.53):

$$\begin{cases} ds^2 = [H(r)]^{-\frac{1}{2}} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + [H(r)]^{\frac{1}{2}} (dr^2 + r^2 d\Omega_3^2) \\ H(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4}, \text{ com } R^4 = 4\pi g_s N (\alpha')^2 \\ F_5 = (1 + *) dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge d(H^{-1}) \end{cases} \quad (4.61)$$

Visto que g_{tt} não é constante, a energia de um objeto medida por um observador em repouso em uma posição \vec{r} , isto é, a energia própria, E_p , e a energia desse mesmo objeto medida por um observador no infinito vão estar relacionadas por um fator de “redshift”:

$$E_p \sim \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}} \frac{d}{dt} \sim \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}} E = [H(r)]^{\frac{1}{4}} E \implies E = [H(r)]^{-\frac{1}{4}} E_p. \quad (4.62)$$

Isto significa que este mesmo objeto trazido cada vez mais perto das D3-branas ($r = 0$) vai ter energia cada vez mais baixa medida pelo observador no infinito, já que

$$E = \frac{r}{R} E_p \sim \frac{r}{\sqrt{\alpha'}} E_p, \quad r \rightarrow 0. \quad (4.63)$$

Agora vamos tomar o limite de Maldacena em (4.61):

$$\alpha' \rightarrow 0 \text{ com } g_s, N \text{ e } U \equiv \frac{r}{\alpha'} \text{ fixos.}$$

Existem dois tipos de excitações neste limite (do ponto de vista do observador no infinito): (i) modos não massivos se propagando na **Região 1** (veja subseção 4.2.1), que é a região $r \gg R$, que vão ser descritos pela ação da supergravidade em $\mathbb{R}^{1,9}$, S_{SG} (a mesma ação da **Abordagem 1**), e (ii) modos não massivos na **Região 2**, que é a região $r \ll R$, cuja geometria é $AdS_5 \times S^5$ e, portanto, vão ser descritos pela ação da supergravidade em $AdS_5 \times S^5$, $S_{\text{SG em } AdS_5 \times S^5}$. No limite de Maldacena, estes dois tipos de excitações se desacoplam devido ao fato de que as excitações na **Região 2**, próximas a $r = 0$, não tem energia suficiente para atravessar o potencial gravitacional e escapar para a **Região 1**, enquanto que as excitações na **Região 1** não sentem a influência gravitacional exercida pela configuração de N D3-branas, logo a supergravidade em $\mathbb{R}^{1,9}$ nesta abordagem também é livre. Sendo assim, a ação que descreve o sistema físico nesta abordagem é dada por:

$$S_2 = S_{\text{SG em } AdS_5 \times S^5} + S_{\text{SG}}. \quad (4.64)$$

Mais uma vez, o limite de Maldacena nos fornece duas teorias desacopladas:

- Supergravidade livre em $\mathbb{R}^{1,9}$.
- Supergravidade em $AdS_5 \times S^5$.

Finalmente, nesta segunda abordagem, a condição $U = \frac{r}{\alpha'}$ fixo significa que estamos mantendo fixas as energias dos objetos na **Região 2**. Além disso, com U fixo e $\alpha' \rightarrow 0$, temos que $r \rightarrow 0$, ou seja, estamos no limite em que nos aproximamos das D3-branas.

Visto que o sistema físico é o mesmo (N D3-branas no espaço-tempo (9+1)-dimensional da teoria de cordas tipo IIB), apenas visto sob duas abordagens diferentes, é natural identificarmos as ações S_1 e S_2 , dadas por (4.60) e (4.64), como sendo equivalentes:

$$S_1 = S_2 \implies S_{\mathcal{N}=4 \text{ SYM}} = S_{\text{SG em } AdS_5 \times S^5}. \quad (4.65)$$

Esta equivalência, portanto, levou Maldacena [57] a conjecturar que a *teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills $U(N)$ em $d = 4$ dimensões é equivalente a teoria de cordas tipo IIB em $AdS_5 \times S^5$* . Esta é a origem da Correspondência AdS/CFT. Mais precisamente, por equivalência queremos dizer um mapeamento entre estados (e campos) no lado da teoria de cordas e operadores invariantes de calibre no lado da teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills, bem como uma correspondência entre as funções de correlação de ambas as teorias [30].

O grupo de calibre $U(N)$ pode ser decomposto em

$$U(N) = SU(N) \times U(1), \quad (4.66)$$

onde o grupo $U(1)$ descreve a parte livre da teoria de calibre e o grupo $SU(N)$ descreve a parte de interação. Na Correspondência, todos os modos interagem com a gravidade no lado da teoria de cordas em $AdS_5 \times S^5$, de modo que não há nenhum modo livre descrito nesse lado. Portanto, a teoria de cordas em $AdS_5 \times S^5$ está descrevendo a parte $SU(N)$ da teoria de calibre $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills. A parte $U(1)$ está relacionada com o movimento do centro de massa das D3-branas [2, 72].

Vamos agora checar a validade das aproximações utilizadas nas **Abordagens 1 e 2**. Antes, vamos reescrever as relações entre os parâmetros da teoria de calibre ($\mathcal{N} = 4$ SYM) e da teoria de cordas tipo IIB em $AdS_5 \times S^5$:

$$\begin{cases} g_{YM}^2 = 4\pi g_s \\ R^4 = 4\pi g_s N (\alpha')^2 = g_{YM}^2 N (\alpha')^2 = \lambda (\alpha')^2 = \lambda l_s^4 \implies \frac{R^4}{l_s^4} = \lambda \end{cases} \quad (4.67)$$

O regime perturbativo da teoria de calibre nas D3-branas é válido quando

$$g_{YM}^2 N \sim g_s N = \frac{R^4}{l_s^4} \ll 1. \quad (4.68)$$

Note que o parâmetro da expansão perturbativa que precisamos manter pequeno é $g_{YM}^2 N$ ao invés¹² de g_{YM}^2 . Por outro lado, a descrição em termos da supergravidade clássica é confiável quando o raio de curvatura do $AdS_5 \times S^5$, R , é grande comparado ao comprimento da corda, l_s , de modo a evitar correções devido aos estados massivos da teoria de cordas. Sendo assim, temos

$$\frac{R^4}{l_s^4} \sim g_s N \sim g_{YM}^2 N \gg 1. \quad (4.69)$$

Além disso, a fim de evitarmos correções a nível de loop, a aproximação da supergravidade clássica é confiável quando (veja (4.42))

$$N > g_s N \gg 1, \quad (4.70)$$

ou seja, temos que considerar também o limite em que N é grande. Isto implica que $g_s < 1$, ou seja, a supergravidade é fracamente acoplada¹³.

Visto que os regimes (4.68) e (4.69) são completamente incompatíveis, isto evita qualquer contradição devido ao fato de que as duas teorias são muito diferentes. Esta é a razão

¹²O fator N vem de se levar em consideração os fatores de Chan-Paton [2, 71, 102].

¹³A condição N grande é uma condição necessária, mas não suficiente, para termos uma descrição em que a supergravidade é fracamente acoplada. Uma característica importante de uma teoria fracamente acoplada é a existência de uma estrutura de espaço de Fock dentro de seu espaço de Hilbert, de modo que podemos nos referir a estados de $1, 2, \dots, n$ partículas de forma bem definida. Um estado genérico neste espaço de Fock é dado por uma combinação linear destes estados de $1, 2, \dots, n$ partículas, e a energia é, a menos de correções, proporcional a soma das energias de cada estado de n partículas [59, 61]. A teoria de calibre dual tem que possuir uma estrutura similar. De fato, esta estrutura emerge de forma natural em teorias de calibre no limite de N grande [2, 59].

pela qual a Correspondência AdS/CFT é chamada de *dualidade*, isto é, as duas teorias são, por conjectura, equivalentes, mas quando um lado descreve um regime perturbativo o outro descreve um regime não-perturbativo e vice-versa. Isto torna a Correspondência difícil de ser provada e útil ao mesmo tempo, já que podemos obter informação sobre o regime não-perturbativo de uma teoria de calibre via supergravidade clássica que, do ponto de vista operacional, é mais acessível.

Um fato muito importante que deve ser levado em consideração para que a Correspondência AdS/CFT seja válida é que as simetrias globais de ambos os lados sejam idênticas (veja Tabela 4.1). A razão para isto é simples: simetrias globais estão relacionadas à grandezas conservadas e, portanto, é natural se esperar que, ao descrever o mesmo sistema físico de duas maneiras diferentes, as grandezas conservadas sejam iguais em quantidade nas duas descrições. De fato, no lado da teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills, em sua fase superconforme, temos o supergrupo conforme $SU(2, 2|4)$ como simetria global, cujo subgrupo bosônico máximo é dado por¹⁴ $SU(2, 2) \times SU(4)_R$, que é isomorfo ao grupo $SO(2, 4) \times SO(6)_R$ [2, 30]. Lembrando que, no capítulo 3, vimos que o grupo $SO(2, 4)$ (assinatura de Lorentz) é o grupo de isometria do AdS_5 , e que ele atua na fronteira do AdS_5 , isto é, em 4 dimensões, como grupo conforme. O grupo $SO(6)_R$ é justamente o grupo de isometria 5-esfera, S^5 . Portanto, o subgrupo bosônico $SU(2, 2) \times SU(4)_R \cong SO(2, 4) \times SO(6)_R$ é exatamente o grupo de isometria do espaço $AdS_5 \times S^5$. O restante das simetrias para completar o supergrupo conforme $SU(2, 2|4)$, no caso da teoria de cordas tipo IIB em $AdS_5 \times S^5$, são quebradas pela configuração de N D3-branas, especificamente, metade das supersimetrias de Poincaré (16 das 32 supercargas da teoria de cordas tipo IIB) são quebradas¹⁵, mas são suplementadas por mais 16 supersimetrias conformes [30]. Este fato de que as supersimetrias são dobradas é,

¹⁴O subscrito “ R ” vem do fato do grupo $SU(4)_R \cong SO(6)_R$ ser uma simetria R . Uma simetria R é uma simetria que não comuta com a supersimetria. Este é o caso aqui, já que bósons e férmions estão em representações diferentes de $SU(4)_R$ [59].

¹⁵Uma vez que as D3-branas são objetos $\frac{1}{2}$ BPS (veja seções 4.1 e 4.2).

na teoria de campos, consequência da invariância superconforme, já que a superálgebra conforme contém duas vezes mais geradores fermiônicos que a superálgebra de Poincaré correspondente [2]. Portanto, o supergrupo conforme $SU(2, 2|4)$ aparece como simetria global em ambas as teorias. Além disso, as duas teorias possuem uma simetria discreta (a nível quântico), $SL(2, \mathbb{Z})$, sob a qual o parâmetro modular τ ,

$$\tau = \frac{\theta}{2\pi} + i \frac{4\pi}{g_{YM}^2} \equiv \frac{\chi}{2\pi} + i \frac{1}{g_s}, \quad (4.71)$$

é mapeado em

$$\tau \rightarrow \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}; \quad ad - bc = 1; \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}. \quad (4.72)$$

As constantes θ e χ são, respectivamente, o ângulo de instanton e o escalar de RR, $A_0 \equiv \chi$ (Axion). Esta simetria é também chamada de *dualidade S*, pois relaciona os regimes de acoplamento fraco e forte, por meio do mapeamento

$$g \rightarrow g' = \frac{1}{g}, \quad (4.73)$$

ou seja, se uma teoria está em um regime onde, por exemplo, $g > 1$ (acoplamento forte), podemos fazer uma dualidade S e passar para uma nova constante de acoplamento, g' , tal que $g' < 1$ (acoplamento fraco) e, portanto, um regime oposto ao anterior.

Grupos de Simetria e Supercargas de Poincaré	$\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills em $d = 4$ dimensões	Teoria de Cordas tipo IIB em $AdS_5 \times S^5$
$SU(2, 2 4)$	✓	✓
$SU(2, 2) \cong SO(2, 4)$	Simetria Conforme	Isometria de AdS_5
$SU(4)_R \cong SO(6)_R$	Simetria R	Isometria de S^5
Supercargas de Poincaré	16	16 (1/2 BPS)
$SL(2, \mathbb{Z})$	✓	✓

Tabela 4.1: Simetrias globais na Correspondência AdS/CFT.

Por fim, a Correspondência AdS/CFT pode ser formulada em três versões diferentes, a saber:

Versão Forte: Esta versão é a conjectura de Maldacena propriamente dita, isto é, para quaisquer valores dos parâmetros g_{YM} , g_s e N temos que a teoria de cordas tipo IIB em $AdS_5 \times S^5$ é equivalente a teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills $SU(N)$ em $d = 4$ dimensões com as seguintes identificações:

$$g_{YM}^2 = 4\pi g_s \text{ e } R^4 = 4\pi g_s N (\alpha')^2$$

Versão Intermediária (Limite de ‘t Hooft): Lembrando que o limite de ‘t Hooft (veja o capítulo 2) consiste em tomar o limite $N \rightarrow \infty$ mantendo $\lambda \equiv g_{YM}^2 N = 4\pi g_s N$ fixo. Neste limite, a expansão perturbativa da teoria de calibre corresponde a expansão perturbativa de uma teoria de cordas com constante de acoplamento, $g_s \sim \frac{1}{N} \rightarrow 0$ e, portanto, nesta versão da Correspondência AdS/CFT, temos a equivalência entre a teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills $SU(N)$ em $d = 4$ dimensões e a teoria de cordas tipo IIB *a nível clássico* em $AdS_5 \times S^5$. Neste caso, somente os diagramas a nível de árvore são relevantes, ou seja, podemos desprezar os efeitos quânticos a nível de loop. A expansão perturbativa da teoria de cordas se dá em potências de g_s . Equivalentemente, a expansão perturbativa na teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills se dá em potências de $\frac{1}{N}$ [30].

Versão Fraca: Esta versão corresponde a tomarmos o limite de ‘t Hooft e, além disso, considerarmos o limite $\lambda \gg 1$. Neste caso, temos que $\frac{R^4}{l_s^4} = \lambda \gg 1$, ou seja, estamos no limite da supergravidade. Visto que

$$l_P = g_s^{\frac{1}{4}} l_s, \tag{4.74}$$

temos

$$R^4 \sim g_s l_s^4 N \sim l_P^4 N \implies \frac{R^4}{l_P^4} \sim N \rightarrow \infty, \tag{4.75}$$

e, portanto, estamos na aproximação em que a *supergravidade é clássica*. Enquanto que na teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills, estamos no regime de acoplamento forte ($\lambda \gg 1$). Logo, nesta versão da Correspondência AdS/CFT, temos a equivalência entre a teoria

$\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills $SU(N)$ em $d = 4$ dimensões no regime de acoplamento forte ($\lambda \gg 1$) e a supergravidade a nível clássico. Esta é a versão mais útil da Correspondência para fins de cálculo e aplicação, pois podemos usar a supergravidade clássica para obter informações sobre o regime não-perturbativo da teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills em 4 dimensões (que não é acessível via métodos perturbativos). No lado da teoria de cordas, a expansão perturbativa se dá em potências de α' . Para mostrar o equivalente desta expansão na teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills, vamos expandir a lagrangiana efetiva, \mathcal{L} , em potências de α' em um espaço com escalar de curvatura (escalar de Ricci), \mathcal{R} , não-nulo. Neste caso o parâmetro de expansão é a combinação $\alpha'\mathcal{R}$ [30]. Sendo assim, temos que

$$\mathcal{L} = c_1\alpha'\mathcal{R} + c_2(\alpha'\mathcal{R})^2 + c_3(\alpha'\mathcal{R})^3 + \dots \quad (4.76)$$

Como estamos interessados na região que envolve o AdS_5 , o escalar de curvatura (veja o capítulo 3, equação (3.16)) é $\mathcal{R} \sim \frac{1}{R^2}$, logo, usando que $R^4 \sim \lambda(\alpha')^2$, temos

$$\mathcal{R} \sim \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{\alpha'}. \quad (4.77)$$

Substituindo este resultado em (4.76), obtemos

$$\mathcal{L} = c_1\lambda^{-\frac{1}{2}} + c_2\lambda^{-1} + c_3\lambda^{-\frac{3}{2}} + \dots \quad (4.78)$$

Portanto, a expansão em potências de α' na teoria de cordas equivale a expansão em potências de $\lambda^{-\frac{1}{2}}$ na teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills.

4.3.1 Prescrição de Witten

Embora a Correspondência AdS/CFT tenha sido proposta por Maldacena, em seu trabalho de 1998 [57] ele não deu nenhuma prescrição precisa de como calcular observáveis da teoria conforme (CFT) via supergravidade¹⁶ no AdS . Esta prescrição foi dada por

¹⁶A partir de agora vamos considerar apenas o espaço AdS_{d+1} . É possível mostrar, via redução dimensional de Kaluza-Klein [69, 77], que ao passar do espaço $AdS_5 \times S^5$ para o espaço AdS_5 , o efeito da redução em S^5 é gerar uma torre infinita de estados massivos (campos escalares) no espaço AdS_5 . Estes são os *modos de Kaluza-Klein*. Além disso, é possível mostrar [69, 77, 99] também, como teste da Correspondência AdS/CFT, que estes modos em AdS_5 correspondem aos operadores quirais da teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills.

Edward Witten [99] e, independentemente, por S. S. Gubser, I. R. Klebanov e A. M. Polyakov [40]. Nesta seção, vamos apresentar a prescrição proposta por Witten para o cálculo de observáveis na Correspondência AdS/CFT.

A proposta de Witten é que as funções de correlação da CFT são dadas pela dependência da ação da supergravidade na fronteira do AdS . Em especial, as dimensões conformes dos operadores da teoria $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills correspondem as massas das partículas na supergravidade¹⁷. De forma mais geral, a prescrição de Witten consiste em identificar a função de partição da teoria de cordas, \mathcal{Z}_{AdS} , com a função de partição da CFT, \mathcal{Z}_{CFT} , ou seja,

$$\mathcal{Z}_{CFT} \equiv \mathcal{Z}_{AdS}. \quad (4.79)$$

Por simplicidade, vamos agora considerar um campo escalar sem massa, ϕ , no AdS_{d+1} . Seja ϕ_0 o valor do campo ϕ avaliado na fronteira do AdS_{d+1} . Segundo a prescrição dada por Witten [99], *o campo ϕ_0 atua como fonte para o operador \mathcal{O} da CFT definida na fronteira do AdS_{d+1}* , com acoplamento dado por:

$$\int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \phi_0 \mathcal{O}. \quad (4.80)$$

Como o campo ϕ_0 possui dimensão conforme 0, a invariância conforme impõe que a dimensão conforme do operador \mathcal{O} seja $\Delta = d$ [34, 99]. Neste caso, a função de partição da CFT, \mathcal{Z}_{CFT} , é dada por

$$\mathcal{Z}_{CFT}[\phi_0] = \left\langle \exp \left(\int d^d x \phi_0 \mathcal{O} \right) \right\rangle \quad (4.81)$$

Portanto, a prescrição de Witten, (4.79), fica sendo dada por

$$\left\langle \exp \left(\int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \phi_0 \mathcal{O} \right) \right\rangle \equiv \mathcal{Z}_{AdS}[\phi_0], \quad (4.82)$$

onde $\mathcal{Z}_{AdS}[\phi_0]$ pode ser escrito como uma integral funcional [64]:

$$\mathcal{Z}_{AdS}[\phi_0] = \int_{\phi_0} \mathcal{D}\phi e^{-I[\phi]}, \quad (4.83)$$

¹⁷Veremos isto em mais detalhes no próximo capítulo.

onde a integral funcional é feita sobre todos os campos ϕ (campos escalares sem massa neste caso) cujos valores na fronteira são ϕ_0 . Utilizando esta expressão, podemos escrever (4.82) como

$$\left\langle \exp \left(\int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \phi_0 \mathcal{O} \right) \right\rangle \equiv \int_{\phi_0} \mathcal{D}\phi e^{-I[\phi]}. \quad (4.84)$$

Visto que $\int_{\phi_0} \mathcal{D}\phi e^{-I[\phi]}$ ainda não é um objeto computável na teoria de cordas, vai ser conveniente considerarmos a aproximação da supergravidade clássica (versão fraca da Correspondência AdS/CFT, onde consideramos o limite de 't Hooft com $\lambda \gg 1$), na qual

$$\int_{\phi_0} \mathcal{D}\phi e^{-I[\phi]} \approx e^{-I_{SG}^{Cl}[\phi_0]}, \quad (4.85)$$

onde $e^{-I_{SG}^{Cl}[\phi_0]}$ é a ação clássica da supergravidade avaliada na fronteira do AdS_{d+1} . Nesta aproximação, temos que

$$\mathcal{Z}_{CFT}[\phi_0] = \left\langle \exp \left(\int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \phi_0 \mathcal{O} \right) \right\rangle \equiv e^{-I_{SG}^{Cl}[\phi_0]} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (4.86)$$

Se a aproximação da supergravidade não for uma boa aproximação, temos que levar em conta os termos $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$ e $O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$ que são, respectivamente, correções de gravitação quântica (na constante de Newton $G_N \sim \frac{1}{N^2}$) e correções devido aos estados massivos da teoria de cordas (correções em $\alpha' \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$). Portanto, a prescrição de Witten permite que calculemos a função de correlação de n -pontos associada a operadores escalares na CFT, $\langle \prod_n \mathcal{O}_n(x_n) \rangle$, com $n = 1, \dots, d$, via supergravidade clássica, da seguinte maneira:

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle = \frac{\delta^n I[\phi_0]}{\delta \phi_0(x_1) \dots \delta \phi_0(x_n)} \Big|_{\phi_0=0}. \quad (4.87)$$

Esta prescrição pode ser generalizada para outros tipos de campos no AdS_{d+1} , como campos de calibre, A_μ , por exemplo [99].

4.3.1.1 Discussão Sobre o Processo de Renormalização da Ação da Supergravidade no AdS

A aproximação clássica da supergravidade

$$\int_{\phi_0} \mathcal{D}\phi e^{-I[\phi]} \approx e^{-I_{SG}^{Cl}[\phi_0]} \quad (4.88)$$

faz sentido quando não há divergências infravermelhas na integração sobre AdS_{d+1} , de modo que $I[\phi]$ possa ser bem definida. Witten [99] argumenta que quando estas divergências aparecem, elas correspondem a renormalizações esperadas da CFT. No entanto, vale a pena discutir um pouco sobre este processo de renormalização no contexto da supergravidade.

Por conveniência, vamos agora passar para a representação Euclideana do AdS_{d+1} e usar a métrica na representação de semi-plano superior (veja capítulo 3, equação (3.28)):

$$ds^2 = \frac{1}{x_0^2} \left(\sum_{i=0}^d (dx^i)^2 \right). \quad (4.89)$$

É evidente, tendo em vista a métrica acima, que $I_{SG}^{Cl}[\phi]$ avaliado na fronteira, dada por $x_0 = 0$, é divergente. Portanto, a fim de extrair a informação física relevante, temos que renormalizar a ação $I_{SG}^{Cl}[\phi_0]$ adicionando a ela contra-termos que vão subtrair os infinitos presentes. Vale lembrar que este procedimento é feito após uma regularização¹⁸ de $I_{SG}^{Cl}[\phi_0]$. Após a renormalização, a parte finita de $I_{SG}^{Cl}[\phi_0]$ é dada por

$$I_{SGFinita}^{Cl}[\phi_0] = I_{SG}^{Cl}[\phi_0] - I_{contra-termo}, \quad (4.90)$$

onde $I_{contra-termo}$ é a ação de contra-termo local adicionada para subtrair a parte divergente da ação original, $I_{SG}^{Cl}[\phi_0]$. Portanto, a prescrição de Witten, (4.86), desconsiderando os termos de correção, passa a ser:

$$\left\langle \exp \left(\int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \phi_0 \mathcal{O} \right) \right\rangle \equiv e^{-I_{SGFinita}^{Cl}[\phi_0]}. \quad (4.91)$$

Logo,

$$W_{CFT}[\phi_0] = \ln \left\langle \exp \left(\int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \phi_0 \mathcal{O} \right) \right\rangle \equiv -I_{SGFinita}^{Cl}[\phi_0]. \quad (4.92)$$

Note, entretanto, que W_{CFT} é invariante sob o grupo conforme contanto que os contra-termos não quebrem esta invariância. Isto so é possível se todos os contra-termos forem

¹⁸A chamada prescrição do ϵ será o método de regularização que utilizaremos no próximo capítulo. Existe outro, que não abordaremos neste trabalho, conhecido como prescrição assintótica [65].

covariantes sob $SO(1, d + 1)$ (Versão Euclideana de $SO(2, d)$), que é o caso mais geral. Desse modo, as funções de correlação irão obedecer as restrições impostas pela invariância conforme. A famosa e interessante exceção ocorre quando $I_{\text{contra-termo}}$ contém pelo menos um termo não covariante, que inevitavelmente vai quebrar uma das simetrias do AdS ou, equivalentemente, da CFT. O fato interessante sobre isto é que a quebra da invariância conforme é uma forte evidência do caráter quântico da CFT, que está relacionado com as anomalias na álgebra de seus operadores quânticos [65]. O caso mais notável é a *anomalia de Weyl*, que aparece na Correspondência do campo gravitacional no AdS com o tensor de energia-momento na fronteira [45, 46].

Por fim, existe um procedimento sistemático de renormalização da ação da supergravidade no contexto da Correspondência AdS/CFT chamado *Renormalização Holográfica*. Não abordaremos este assunto nesta dissertação. O leitor interessado em saber mais detalhes sobre este método pode consultar [12, 29, 45, 46, 86].

Capítulo 5

Aplicação: O Campo Escalar na Correspondência AdS/CFT

No capítulo anterior vimos como a Correspondência AdS/CFT foi concebida a partir do modelo de D3-branas. Vimos também uma prescrição, proposta por Witten, para calcular funções de correlação na Correspondência. Neste capítulo vamos utilizar esta prescrição e aplicar no estudo do campo escalar na Correspondência AdS/CFT. Embora seja o mais simples dos campos, ele vai servir para ilustrar os métodos gerais usados na Correspondência tais como condições de contorno e regularização da ação efetiva, bem como a relação entre os parâmetros da CFT e os parâmetros do AdS (dimensão conforme de operadores da CFT e massa das partículas no AdS , por exemplo). Na seção 5.1, tratamos do campo escalar massivo no AdS_{d+1} , introduzindo sua ação, obtendo sua equação de movimento e analisando o comportamento da solução perto da fronteira. Na seção 5.2, calculamos explicitamente a função de 2-pontos associada a operadores escalares usando prescrição de Witten na aproximação da supergravidade clássica, e comparamos com o resultado conhecido da CFT. Por fim, na seção 5.3, fazemos uma discussão sobre a dimensão dos operadores da CFT do ponto de vista do limite unitário da CFT e do ponto de vista da quantização do campo escalar no AdS .

Observação: Em todo este capítulo vamos utilizar a representação Euclideana do AdS_{d+1} com a métrica na representação de semi-plano superior, (3.28), em coordenadas de Poin-

caré, $(x^0 \equiv z, x^i)$ com $i = 1, \dots, d$, e em unidades tais que $R = 1$, onde R é o raio do AdS_{d+1} .

5.1 O Campo Escalar no AdS_{d+1}

Esta seção tem por objetivo tratar do campo escalar massivo no AdS_{d+1} . Vamos obter a equação de movimento que este campo satisfaz em um espaço curvo e analisar o comportamento da solução desta equação perto da fronteira ($z = 0$). Esta seção é baseada em [77].

Um campo escalar no AdS_{d+1} é um campo que não se transforma quando fazemos qualquer transformação do grupo de isometria do AdS_{d+1} , ou seja, o $SO(1, d + 1)$ (Euclidiano). Em outras palavras, um campo escalar no AdS_{d+1} é um invariante segundo $SO(1, d + 1)$. Consideremos, então, um campo escalar massivo, $\phi(x^\mu)$, com $x^\mu = (x^0 \equiv z, x^i)$ e $i = 1, \dots, d$, no AdS_{d+1} . Sua ação é dada por:

$$I[\phi] = \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \sqrt{g} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2]. \quad (5.1)$$

Na representação Euclidiana de semi-plano superior, a métrica do AdS_{d+1} é escrita como

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} (dz^2 + (dx^i)^2), \quad (5.2)$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \frac{1}{z^2} \delta_{\mu\nu}, \\ g^{\mu\nu} &= z^2 \delta^{\mu\nu}, \\ \sqrt{g} &= z^{-(d+1)}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

A equação de movimento para o campo escalar no AdS_{d+1} é obtida via princípio variacional

$$\frac{\delta I[\phi]}{\delta \phi} = 0. \quad (5.4)$$

Logo, fazendo a variação de (5.1), obtemos

$$\delta I[\phi] = \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \sqrt{g} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \delta\phi + m^2 \phi \delta\phi]. \quad (5.5)$$

Integrando por partes o primeiro termo da equação acima e desprezando os termos de fronteira (já que $\delta\phi = 0$ nos extremos), temos que

$$\delta I[\phi] = \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x [-\partial_\mu(\sqrt{g}\partial^\mu\phi) + \sqrt{g}m^2\phi] \delta\phi, \quad (5.6)$$

portanto, usando o princípio variacional $\frac{\delta I}{\delta\phi} = 0$, obtemos a equação de movimento do campo escalar no AdS_{d+1} :

$$(\nabla_\mu \nabla^\mu - m^2)\phi = 0, \quad (5.7)$$

onde, por definição,

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu(\sqrt{g}\partial^\mu\phi). \quad (5.8)$$

Escrevendo (5.7) de forma mais explícita utilizando (5.3), obtemos

$$z^{d+1} \partial_z [z^{1-d} \partial_z \phi(z, x^i)] + z^2 \partial_i \partial_i \phi(z, x^i) - m^2 \phi(z, x^i) = 0. \quad (5.9)$$

Vamos agora reescrever o campo $\phi(z, x^i)$ em termos de sua transformada de Fourier:

$$\phi(z, x^i) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} \phi_k(z). \quad (5.10)$$

Logo, (5.9) torna-se:

$$z^{d+1} \partial_z [z^{1-d} \partial_z \phi_k(z)] - k^2 z^2 \phi_k(z) - m^2 \phi_k(z) = 0, \quad (5.11)$$

onde $k^2 = k_i k_i$. O objetivo aqui é resolver (5.9) perto da fronteira ($z = 0$). Utilizando o ansatz

$$\phi_k(z) \sim z^\Delta \quad (5.12)$$

em (5.11) e mantendo somente os termos dominantes perto de $z = 0$, é fácil verificar que Δ deve satisfazer a seguinte equação:

$$\Delta(\Delta - d) = m^2, \quad (5.13)$$

cujas soluções são:

$$\Delta_{\pm} = \frac{d}{2} \pm \nu, \quad (5.14)$$

onde ν é dado por:

$$\nu = \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2}. \quad (5.15)$$

Portanto, o comportamento da solução $\phi_k(z)$ perto da fronteira ($z = 0$) é dado por:

$$\phi_k(z) \approx A(k)z^{d-\Delta_+} + B(k)z^{\Delta_+} = A(k)z^{\frac{d}{2}-\nu} + B(k)z^{\frac{d}{2}+\nu}, \quad (5.16)$$

onde usamos que $\Delta_+ + \Delta_- = d$. Note que a solução proporcional a $z^{d-\Delta_+}$ é dominante perto da fronteira ($z = 0$) já que $\Delta_+ > 0 \forall m$. Portanto, a solução proporcional a z^{Δ_+} decai quando $z \rightarrow 0$ para qualquer valor de massa. Por fim, fazendo a transformada de Fourier inversa, obtemos:

$$\phi(z, x^i) \approx A(x^i)z^{\frac{d}{2}-\nu} + B(x^i)z^{\frac{d}{2}+\nu}, \quad z \sim 0. \quad (5.17)$$

Note que, como $\nu \in \mathbb{R}$, a massa do campo escalar no AdS_{d+1} tem que satisfazer:

$$m^2 \geq -\frac{d^2}{4}. \quad (5.18)$$

Esta é uma desigualdade importante conhecida como o *limite de Breitenlohner-Freedman* (BF) [21, 22]. Isto significa que campos escalares no AdS_{d+1} podem ser ligeiramente taquiônicos, mas suas massas devem satisfazer o limite BF¹.

Visto que em (5.17) o termo $z^{\frac{d}{2}-\nu} = z^{d-\Delta_+}$ é dominante no limite $z \rightarrow 0$ e que o termo $z^{\frac{d}{2}+\nu} = z^{\Delta_+} \rightarrow 0$ quando $z \rightarrow 0$, então

$$\phi(z, x^i) \approx A(x^i)z^{\frac{d}{2}-\nu}, \quad z \rightarrow 0. \quad (5.19)$$

Afim de avaliar o comportamento da solução acima na fronteira ($z = 0$), vamos tomar $z = \epsilon \rightarrow 0$ na equação acima:

$$\phi(z = \epsilon, x^i) \approx \epsilon^{\frac{d}{2}-\nu} A(x^i) = \epsilon^{d-\Delta_+} A(x^i). \quad (5.20)$$

¹A existência da supersimetria implica, com condições de contorno apropriadas [22], que a supergravidade no AdS é estável e com energia limitada inferiormente. Tipicamente teorias de supergravidade no AdS contem campos escalares com $m^2 < 0$ [2]. Entretanto, todas elas satisfazem o limite BF (5.18).

Como

$$d - \Delta_+ = \frac{1}{2} \left[d - d \left(1 + \frac{m^2}{d^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] < 0, \quad m^2 > 0, \quad (5.21)$$

temos que o termo dominante em (5.20) tipicamente vai divergir na fronteira ($z = \epsilon \rightarrow 0$)².

Voltando a prescrição de Witten, a fonte do operador \mathcal{O} da CFT é o valor do campo, neste caso o campo escalar $\phi(z, x^i)$, avaliado na fronteira, ou seja, $\phi(\epsilon \rightarrow 0, x^i)$. Sendo assim, é necessário removermos as divergências deste campo para que possamos identificá-lo como sendo a fonte de \mathcal{O} . Fazemos isto simplesmente extraindo o fator divergente do campo através de uma redefinição³ do mesmo:

$$\phi_0(x) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{\Delta_+ - d} \phi(\epsilon, x), \quad (5.22)$$

onde $\phi_0(x)$ é o valor do campo renormalizado na fronteira ($z = 0$) e $x \equiv x^i$. Com esta definição $\phi_0(x)$ é sempre finito na fronteira. Invertendo a equação acima, temos

$$\phi(\epsilon, x) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{d - \Delta_+} \phi_0(x). \quad (5.23)$$

Agora, vamos interpretar o significado de Δ_+ . Na prescrição de Witten o acoplamento da fonte $\phi(\epsilon, x)$ com o operador dual da CFT, $\mathcal{O}(\epsilon, x)$, na fronteira ($z = \epsilon$) é dado por:

$$\int_{z=\epsilon} d^d x \sqrt{\gamma_\epsilon} \phi(\epsilon, x) \mathcal{O}(\epsilon, x), \quad (5.24)$$

onde $\gamma_\epsilon = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{2d}$ é o determinante da métrica induzida na fronteira $z = \epsilon$. Usando (5.23) em (5.24), temos:

$$\int_{z=\epsilon} d^d x \phi_0(x) \epsilon^{-\Delta_+} \mathcal{O}(\epsilon, x). \quad (5.25)$$

Afim de obtermos uma integral finita e independente de ϵ quando $\epsilon \rightarrow 0$ devemos redefinir o operador da CFT na fronteira, $\mathcal{O}(\epsilon, x)$, de maneira análoga ao que fizemos com o campo $\phi(\epsilon, x)$ na fronteira $z = \epsilon$. Logo,

$$\mathcal{O}(\epsilon, x) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{\Delta_+} \mathcal{O}(x). \quad (5.26)$$

²Isto já era de se esperar, já que a métrica do AdS_{d+1} diverge na fronteira ($z = 0$) e, conseqüentemente, a ação também diverge.

³Esta redefinição, no caso do AdS_{d+1} , é sempre possível pois ela nada mais é do que uma transformação de escala, e transformações de escala são isometrias do AdS_{d+1} e simetrias da CFT na fronteira ($z = 0$).

Na CFT, passar de $z = 0$ para $z = \epsilon$ é uma transformação de escala (ou dilatação), que é uma simetria da teoria. Logo, isto sugere que $\Delta_+ \equiv \Delta$ deve ser interpretado como sendo a dimensão conforme do operador⁴ \mathcal{O} . Similarmente, a relação (5.23) implica que a fonte $\phi_0(x)$ tem dimensão de massa $d - \Delta_+$. Finalmente, reescrevendo (5.25) em termos das quantidades renormalizadas e fazendo o limite $\epsilon \rightarrow 0$, temos

$$\int_{z=0} d^d x \phi_0(x) \mathcal{O}(x). \quad (5.27)$$

5.2 Cálculo da Função de 2-Pontos $\langle \mathcal{O}_\nu(x) \mathcal{O}_\nu(y) \rangle$

Nesta seção vamos calcular explicitamente a função de 2-pontos $\langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) \rangle$ para $x \neq y$ associada a operadores escalares da CFT via supergravidade no AdS_{d+1} seguindo a abordagem de [64]. O objetivo principal aqui é mostrar que

$$\langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) \rangle = \frac{C}{|x - y|^{2\Delta}}, \quad (5.28)$$

que é a forma da função de 2-pontos imposta pela teoria conforme (CFT), veja (3.52). Além disso, vamos obter explicitamente a constante C . Este cálculo foi a primeira verificação da validade da Correspondência AdS/CFT, pelo menos na aproximação da supergravidade. Posteriormente, outras verificações bem-sucedidas foram feitas através do cálculo da função de 2- e 3-pontos e, em alguns casos, com interação, para campos escalares [35, 64, 66], campo vetoriais e espinoriais [43, 44, 54, 62, 99], campo gravitacional [63], campos de Rarita-Schwinger [53, 60, 78, 93], p -formas [3, 55] e tensor simétrico massivo [75].

Afim de calcular a função de 2-pontos associada a operadores escalares, usaremos um método de regularização conhecido como *prescrição do ϵ* [65] para regularizar a ação da supergravidade no AdS_{d+1} na camada de massa (satisfazendo a equação de movimento). Este método consiste nos seguintes procedimentos:

⁴Veremos na próxima seção que $\langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) \rangle \sim |x - y|^{-2\Delta}$, confirmando que $\Delta \equiv \Delta_+$ é, de fato, a dimensão conforme do operador \mathcal{O} .

1. Ao invés de usar a fronteira real do AdS_{d+1} , $z = 0$, vamos introduzir um corte, $z = \epsilon$, e formular o problema de contorno em termos desse corte. Neste trabalho vamos usar *condições de contorno de Dirichlet*. No entanto, outras condições de contorno podem ser utilizadas [64].
2. O valor do campo avaliado na fronteira, $\phi_0(x)$, que vai servir como fonte do operador \mathcal{O} , está relacionado com o valor do campo na fronteira de corte ($z = \epsilon$), $\phi(\epsilon, x)$, por uma transformação de escala:

$$\phi(\epsilon, x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^\lambda \phi_0(x). \quad (5.29)$$

O expoente λ é determinado pelo comportamento assintótico das soluções de campo no limite $\epsilon \rightarrow 0$. No caso do campo escalar, conforme vimos anteriormente, esta transformação de escala é dada por:

$$\phi(\epsilon, x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{d-\Delta} \phi_0(x), \quad \Delta \equiv \Delta_+. \quad (5.30)$$

3. Expressar a ação na camada de massa em termos de $\phi_0(x)$ e selecionar o termo independente de ϵ depois que o limite $\epsilon \rightarrow 0$ é tomado. Os termos que divergirem neste limite (termos de contato, isto é, funções delta e suas derivadas) serão compensados pelos contra-termos e, portanto, podem ser ignorados. Os termos $\mathcal{O}(\epsilon)$ ou maiores serão nulos no limite $\epsilon \rightarrow 0$.

Vamos, então, seguir estes procedimentos. Inicialmente, precisamos resolver a equação de movimento (5.11) no espaço de Fourier. Escrevendo de forma mais explícita os termos desta equação, obtemos

$$z^2 \phi_k''(z) + (1-d)z \phi_k'(z) + (-k^2 z^2 - m^2) \phi_k(z) = 0, \quad (5.31)$$

onde $' \equiv \partial_z$. Desse modo, vemos que esta equação é da forma (E.5), com $z \rightarrow iz$ e as

seguintes identificações:

$$2\alpha = d \implies \alpha = \frac{d}{2} \quad (5.32)$$

$$\alpha^2 - \nu^2 = -m^2 \implies \nu = \sqrt{m^2 + \frac{d^2}{4}} \quad (5.33)$$

$$\beta = k. \quad (5.34)$$

Portanto, a solução geral neste caso é dada por (E.7), ou seja,

$$\phi_k(z) = z^\alpha (c_1 K_\nu(kz) + c_2 I_\nu(kz)) = z^{\frac{d}{2}} (A(k) K_\nu(kz) + B(k) I_\nu(kz)), \quad (5.35)$$

onde absorvemos as constantes c_1 e c_2 nos coeficientes de Fourier $A(k)$ e $B(k)$. Assumindo a regularidade da solução em $z \rightarrow \infty$, isto é, queremos que a solução seja bem comportada no infinito (interior do AdS_{d+1}), obtemos

$$\phi_k(z) = z^{\frac{d}{2}} A(k) K_\nu(kz), \quad (5.36)$$

já que

$$K_\nu(z) \sim \frac{\pi}{\sqrt{2z}} e^{-z} \rightarrow 0 \quad z \rightarrow \infty, \quad (5.37)$$

$$I_\nu(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z \rightarrow \infty \quad z \rightarrow \infty. \quad (5.38)$$

Note que o critério de regularidade no interior do AdS_{d+1} fixa de forma unívoca $\phi_k(z)$.

Portanto, a solução para $\phi(z, x)$ é dada por:

$$\phi(z, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} A(k) z^{\frac{d}{2}} K_\nu(kz), \quad (5.39)$$

onde $x \equiv x^i = (x^1, x^2, \dots, x^d)$ e $k \equiv k^i = (k^1, k^2, \dots, k^d)$ e $k \cdot x = k_i x^i$. Expressando a equação acima na fronteira regularizada ($z = \epsilon$), temos que

$$\phi(\epsilon, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} A(k) \epsilon^{\frac{d}{2}} K_\nu(k\epsilon). \quad (5.40)$$

Agora, seja $\phi(\epsilon, k)$ a transformada de Fourier da solução da equação de campo na fronteira regularizada $z = \epsilon$. Então, é fácil mostrar que o coeficiente $A(k)$ pode ser obtido

expressando $\phi(\epsilon, x)$ em termos de sua transformada de fourier, isto é,

$$\phi(\epsilon, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} \phi(\epsilon, k) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} A(k) \epsilon^{\frac{d}{2}} K_\nu(k\epsilon), \quad (5.41)$$

portanto, temos que o coeficiente $A(k)$ é dado por:

$$A(k) = \epsilon^{-\frac{d}{2}} \frac{\phi(\epsilon, k)}{K_\nu(k\epsilon)}. \quad (5.42)$$

Logo, (5.39) torna-se:

$$\phi(z, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} \phi(\epsilon, k) \epsilon^{-\frac{d}{2}} z^{\frac{d}{2}} \frac{K_\nu(kz)}{K_\nu(k\epsilon)}, \quad (5.43)$$

Visto que

$$\phi(\epsilon, k) = \int d^d y e^{ik \cdot y} \phi(\epsilon, y), \quad (5.44)$$

temos

$$\phi(z, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int d^d y e^{-ik \cdot (x-y)} \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-\frac{d}{2}} z^{\frac{d}{2}} \frac{K_\nu(kz)}{K_\nu(k\epsilon)}. \quad (5.45)$$

Vamos agora olhar para a ação (5.1):

$$I[\phi] = \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \sqrt{g} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2]. \quad (5.46)$$

Fazendo uma integração por partes no primeiro termo e usando a equação de movimento (5.7), obtemos

$$I[\phi] = \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \partial_\mu (\sqrt{g} \phi(z, x) \partial_\mu \phi(z, x)) = \frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^d x \sqrt{\gamma_\epsilon} [\phi(z, x) (n^\mu \partial_\mu) \phi(z, x)]|_{z=\epsilon}, \quad (5.47)$$

onde $\gamma_\epsilon = \epsilon^{-2d}$ é o determinante da métrica induzida na fronteira ($z = \epsilon$) e $n^\mu = (-\epsilon, 0)$ é o vetor normal para fora da superfície $z = \epsilon$. Logo,

$$I[\phi] = -\frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^d x \epsilon^{1-d} \phi(\epsilon, x) [\partial_z \phi(z, x)]|_{z=\epsilon}. \quad (5.48)$$

Note que esta ação expressa como um termo de fronteira é que vai ser o funcional gerador das funções de correlação dos operadores da CFT, conforme a prescrição de Witten

estabelece (veja (4.91)). A origem deste termo de fronteira vem do princípio variacional, ou seja, afim de se ter uma ação estacionária, termos de fronteira, que vão depender das condições de contorno, devem ser adicionados à ação. Neste caso do campo escalar, a ação já é estacionária e o termo de fronteira apropriado surge naturalmente. Sendo assim, nenhum termo de fronteira adicional precisa ser introduzido. A importância destes termos de fronteira no contexto da Correspondência AdS/CFT foi originalmente analisada no caso de campos espinoriais [43], onde a ação é de primeira ordem nas derivadas e classicamente a ação é nula na camada de massa. Um análise semelhante para o campo escalar foi feita em [14].

Seguindo ainda o primeiro procedimento da prescrição do ϵ , temos que expressar a ação (5.48) em termos dos campos $\phi(\epsilon, x)$. Para isto, precisamos calcular $[\partial_z \phi(z, x)]|_{z=\epsilon}$. De (5.45), temos que

$$\partial_z \phi(z, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int d^d y e^{-ik \cdot (x-y)} \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-\frac{d}{2}} z^{\frac{d}{2}-1} \left[\left(\frac{d}{2} + \nu \right) \frac{K_\nu(kz)}{K_\nu(k\epsilon)} - kz \frac{K_{\nu+1}(kz)}{K_\nu(k\epsilon)} \right], \quad (5.49)$$

onde usamos a regra da cadeia e a identidade (E.8) para a derivada da função $K_\nu(kz)$. Fazendo $z = \epsilon$, obtemos

$$\partial_z \phi(z, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int d^d y e^{-ik \cdot (x-y)} \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-1} \left[\left(\frac{d}{2} + \nu \right) - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)} \right]. \quad (5.50)$$

Logo,

$$\phi(\epsilon, x) [\partial_z \phi(z, x)]|_{z=\epsilon} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_{z=\epsilon} d^d y e^{-ik \cdot (x-y)} \phi(\epsilon, x) \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-1} \left[\left(\frac{d}{2} + \nu \right) - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)} \right]. \quad (5.51)$$

Inserindo a expressão acima em (5.48), obtemos

$$I[\phi]|_{z=\epsilon} = -\frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^d x d^d y \phi(\epsilon, x) \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} \left[\left(\frac{d}{2} + \nu \right) - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)} \right]. \quad (5.52)$$

Observe que

$$\left(\frac{d}{2} + \nu \right) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} \propto \delta^d(x-y) \quad (5.53)$$

é justamente um termo de contato e, segundo o terceiro procedimento da prescrição ϵ , podemos desconsiderar este termo, pois ele será compensado por um contra-termo e, portanto, não irá contribuir com o resultado físico. Além disso, estamos considerando funções de correlação tais que $x \neq y$. Logo, $\delta^d(x - y) = 0$. Deste modo, temos que

$$I[\phi]|_{z=\epsilon} = \frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^d x d^d y \phi(\epsilon, x) \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} \left[k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)} \right]. \quad (5.54)$$

Foi apontado em [35] que devemos tomar o limite $\epsilon \rightarrow 0$ de forma cuidadosa, em particular no final de todos os cálculos, ou seja, quando extrairmos todo o comportamento assintótico de (5.54). Para isto, precisamos usar as expansões em série da função de Bessel Modificada $K_\nu(z)$ quando $z \rightarrow 0$. Vamos analisar este problema no caso $\nu > 0$ ($\nu \notin \mathbb{Z}$), lembrando que

$$\nu = \sqrt{m^2 + \frac{d^2}{4}}. \quad (5.55)$$

Sendo assim, precisamos expandir

$$k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)} \quad (5.56)$$

em potências de $k\epsilon$ para $k\epsilon \rightarrow 0$ e selecionar os termos relevantes. Para $\nu \notin \mathbb{Z}$ devemos usar a expansão (E.9), especificamente, o primeiro termo de cada parcela. Fazendo isto, obtemos

$$\begin{aligned} k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)} &\approx 2\nu \left(1 - \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^{2\nu} + \frac{\Gamma(-(\nu+1))}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^{2(\nu+1)} \right) \\ &- 2\nu \left(\frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} \frac{\Gamma(-(\nu+1))}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^{2(2\nu+1)} \right). \end{aligned} \quad (5.57)$$

Inserindo este comportamento assintótico de volta em (5.54) e, de acordo o segundo procedimento da prescrição ϵ , fazendo a transformação de escala

$$\phi(\epsilon, x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{d-\Delta} \phi_0(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{\frac{d}{2}-\nu} \phi_0(x), \quad (5.58)$$

obtemos

$$I[\phi_0] = -\nu \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} 2^{-2\nu} \int_{z=0} d^d x d^d y \phi_0(x) \phi_0(y) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} k^{2\nu}, \quad (5.59)$$

onde, de acordo com o terceiro procedimento da prescrição ϵ , selecionamos o termo independente de ϵ e ignoramos os termos de contato (divergentes no limite $\epsilon \rightarrow 0$) e os termos $\mathcal{O}(\epsilon^2) \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Para resolver a integral (5.59) usamos a expressão (E.14), com $\rho = 2\nu$:

$$I[\phi_0] = -\frac{\nu}{\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(\nu + \frac{d}{2})}{\Gamma(\nu)} \int_{z=0} d^d x d^d y \frac{\phi_0(x)\phi_0(y)}{|x-y|^{d+2\nu}}. \quad (5.60)$$

Por fim, fazendo uso da prescrição de Witten

$$\left\langle \exp \left(\int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \phi_0 \mathcal{O} \right) \right\rangle \equiv e^{-I[\phi_0]} \implies W_{CFT}[\phi_0] = -I[\phi_0], \quad (5.61)$$

e da equação (4.87), obtemos finalmente

$$\langle \mathcal{O}_{\nu>0}(x) \mathcal{O}_{\nu>0}(y) \rangle = \frac{2\nu}{\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(\nu + \frac{d}{2})}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{|x-y|^{d+2\nu}} = \frac{2\nu}{\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(\nu + \frac{d}{2})}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{|x-y|^{2\Delta}}, \quad (5.62)$$

que é o resultado esperado para a função de 2-pontos em um teoria conforme, como vimos no capítulo 3, equação (3.52) com a constante C dada por:

$$C = \frac{2\nu}{\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(\nu + \frac{d}{2})}{\Gamma(\nu)}. \quad (5.63)$$

Além disso, verificamos que

$$\Delta \equiv \Delta_+ = \frac{d}{2} + \nu = \frac{d}{2} + \sqrt{m^2 + \frac{d^2}{4}} \quad (5.64)$$

é de fato a dimensão conforme do operador \mathcal{O} da CFT na fronteira ($z = 0$). Em particular, no caso em que o campo escalar é não-massivo, ou seja, $m = 0$, temos que $\nu = \frac{d}{2}$ e, portanto,

$$\left\langle \mathcal{O}_{\nu=\frac{d}{2}}(x) \mathcal{O}_{\nu=\frac{d}{2}}(y) \right\rangle = \frac{d}{\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{1}{|x-y|^{2d}}. \quad (5.65)$$

Logo, $\Delta = d$, como já tínhamos antecipado no final do capítulo anterior quando apresentamos a prescrição de Witten. Este resultado, junto com (5.62), pode ser obtido de maneira relativamente simples utilizando um método muito elegante, proposto também por Witten [99], conhecido como *truque de Witten*, que utiliza apenas as propriedades de invariância do AdS sob $SO(1, d+1)$. Veja mais detalhes em [69, 99].

Finalmente, no caso em que ν é inteiro não-nulo o resultado que obtemos para a função de 2-pontos, (5.62), não é modificado. Entretanto, devemos usar a expansão (E.10) e a integral (E.16).

5.3 Discussão

Na seção anterior, calculamos explicitamente a função de 2-pontos $\langle \mathcal{O}_\nu(x)\mathcal{O}_\nu(y) \rangle$, dada por (5.62), via Correspondência AdS/CFT. Este cálculo, portanto, nos permite concluir que a dimensão conforme Δ dos operadores na fronteira do AdS_{d+1} , onde é definida a CFT, está diretamente relacionada com massa m do campo escalar no AdS_{d+1} através de

$$\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2}. \quad (5.66)$$

Entretanto, quando resolvemos a equação de movimento do campo escalar perto da fronteira do AdS_{d+1} ($z \approx 0$), vimos que a massa m do campo escalar e a dimensão conforme Δ do operador da CFT correspondente, \mathcal{O} , estão relacionados por

$$\Delta(\Delta - d) = m^2. \quad (5.67)$$

Esta equação, conforme vimos na seção 5.1, possui duas soluções:

$$\Delta = \begin{cases} \Delta_+ = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2}, \\ \Delta_- = \frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2}. \end{cases} \quad (5.68)$$

Além disso, vimos que o campo escalar perto da fronteira se comporta como

$$\phi(z, x) \approx z^{\Delta_-}(\phi_0(x) + \mathcal{O}(z^2)) + z^{\Delta_+}(\Phi(x) + \mathcal{O}(z^2)) \quad z \approx 0, \quad (5.69)$$

onde $\phi_0(x)$ foi interpretado como sendo a fonte que se acopla ao operador \mathcal{O} na fronteira, enquanto que campo $\Phi(x)$ é interpretado como uma *flutuação quântica* no AdS_{d+1} [5, 52]. Porém, ainda assim, a prescrição de Witten (5.61) aparentemente só é capaz de reproduzir a função de 2-pontos para operadores com dimensão $\Delta = \Delta_+$, como se só esta

solução para Δ fosse admissível. Se isto for verdade, então inferimos, via Correspondência AdS_{d+1}/CFT_d, que a dimensão de operadores escalares na CFT é limitada inferiormente por

$$\Delta \geq \frac{d}{2}, \quad (5.70)$$

o que é incompatível com o limite unitário (3.47) para operadores escalares em uma CFT d -dimensional, que estabelece

$$\Delta \geq \frac{d-2}{2} = \frac{d}{2} - 1 < \frac{d}{2}. \quad (5.71)$$

Existem vários exemplos da Correspondência AdS/CFT onde os operadores da CFT possuem dimensão $\Delta < \frac{d}{2}$ (veja as referências em [52]).

De fato, do ponto de vista do limite unitário acima, temos que (expressando o Δ_{\pm} em termos da massa m), para

$$m^2 > 1 - \frac{d^2}{4}, \quad (5.72)$$

apenas a solução $\Delta = \Delta_+$ é admissível. Enquanto que, para

$$-\frac{d^2}{4} \leq m^2 < 1 - \frac{d^2}{4}, \quad (5.73)$$

ambos Δ_{\pm} são admissíveis. Lembrando que $m^2 \geq -\frac{d^2}{4}$ é o limite BF (5.18). Note que nesta faixa de massas, o valor mínimo permitido pelo limite unitário (5.71) é atingido quando a dimensão do operador é Δ_- , isto é,

$$\Delta_- = \frac{d}{2} - \sqrt{m^2 + \frac{d^2}{4}} \Big|_{m^2=1-\frac{d^2}{4}} = \frac{d}{2} - 1. \quad (5.74)$$

Portanto, se a Correspondência AdS/CFT é correta, deve haver alguma prescrição que permita obter funções de correlação para operadores escalares cuja dimensão seja $\Delta = \Delta_-$, se a massa estiver no intervalo dado por (5.73). Vamos apresentar esta prescrição mais adiante, nos restringindo apenas ao método em si. Antes disto, é importante observar que no intervalo (5.73) temos a impressão de que há duas teorias conformes na fronteira provenientes do mesmo campo escalar no AdS_{d+1}, ou seja, uma CFT cujos operadores

possuem dimensão Δ_+ e outra cujos operadores possuem dimensão Δ_- . Esta ambiguidade possui um análogo no lado do AdS_{d+1} , no que se refere a quantização do campo escalar neste espaço. Já se sabe desde os trabalhos de Breitenlohner e Freedman [21, 22] que se a massa do campo escalar estiver no intervalo dado por (5.73), então existem duas condições de contorno que vão levar a duas formas de quantização possíveis para o campo escalar no AdS , chamadas de *condições de contorno regulares e irregulares*, que corresponde a escolher quantizar o campo escalar utilizando os chamados *modos regulares*

$$\phi_R(z, x) \sim z^{\Delta_+} \Phi(x), \quad (5.75)$$

ou os *modos irregulares*

$$\phi_I(z, x) \sim z^{\Delta_-} \phi_0(x), \quad (5.76)$$

respectivamente. Ambos os modos existem no AdS_{d+1} , veja (5.69). Neste sentido, do ponto de vista do AdS , no intervalo dado por (5.72) apenas a quantização com o modo regular (5.75) é possível, pois é o único modo *normalizável*⁵, enquanto que o modo irregular (5.76) neste caso é *não-normalizável* e, portanto, vai servir como fonte do operador na fronteira. Do ponto de vista da CFT isto implica que a dimensão dos operadores vai ser dada apenas por $\Delta = \Delta_+$. Por outro lado, conforme explicado acima, no intervalo de massa dado por (5.73), ambos os modos (5.75) e (5.76) são normalizáveis [77] e, portanto, tanto um quanto o outro podem ser escolhidos para quantizar o campo escalar no AdS_{d+1} . No lado da CFT isto significa que:

- Se o modo regular $\phi_R \sim z^{\Delta_+} \Phi(x)$ é quantizado no $AdS \implies$ na CFT, \mathcal{O} tem dimensão Δ_+ e $\phi_0(x)$ é a fonte que aparece na prescrição de Witten (4.91).
- Se o modo irregular $\phi_I \sim z^{\Delta_-} \phi_0(x)$ é quantizado no $AdS \implies$ na CFT, \mathcal{O} tem dimensão Δ_- e $\Phi(x)$ é a fonte que aparece na prescrição de Witten (4.91).

⁵Normalizável no sentido de que o produto escalar de Klein-Gordon, definido (**no espaço de Minkowski**) por:

$$(\phi_1, \phi_2) = i \int_{\Sigma} d^d x \sqrt{g} g^{tt} (\phi_1^* \partial_t \phi_2 - \partial_t \phi_1^* \phi_2), \quad (5.77)$$

é finito [5, 77]. Onde $\Sigma \subset AdS_{d+1}$ é uma superfície tipo-espaço.

Toda esta discussão apresentada acima foi proposta e estudada por Balasubramanian, Kraus e Lawrence [5] no contexto da Correspondência AdS/CFT.

No início desta seção concluímos que a prescrição de Witten (5.61) só conseguiu capturar o modo regular no AdS_{d+1} , pois obtemos a função de 2-pontos para operadores cuja dimensão é $\Delta = \Delta_+$. Entretanto, não fizemos nenhuma hipótese sobre o intervalo de massa que estávamos considerando ((5.72) ou (5.73)), com exceção do limite BF (5.18). De fato, a prescrição de Witten, como foi apresentada no capítulo anterior, é válida apenas para o tratamento das condições de contorno regulares [65], para as quais o campo $\Phi(x)$ é a flutuação quântica no AdS_{d+1} e, portanto, vai compor o espaço de Hilbert dos estados físicos da teoria quântica no AdS , o campo $\phi_0(x)$ é a fonte e Δ_+ é a dimensão conforme do operador na fronteira. Finalmente, o método adequado para o tratamento das condições de contorno irregulares, isto é, a prescrição para obter funções de correlação de operadores com dimensão conforme $\Delta = \Delta_-$, foi proposto originalmente por Klebanov e Witten [52]. Este método é baseado na interpretação física de $\Phi(x)$ em (5.69), já que foi sugerido em [5] que $\Phi(x)$ está relacionado com o valor esperado de \mathcal{O} . Especificamente, esta relação é dada por [52]:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\nu} \langle \mathcal{O}(x) \rangle. \quad (5.78)$$

Logo, do ponto de vista da CFT, $\phi_0(x)$ e $2\nu\Phi(x)$ são variáveis conjugadas, de modo que para trocar $\Delta_+ \leftrightarrow \Delta_-$ é necessário $\phi_0(x) \leftrightarrow 2\nu\Phi(x)$, e esta inversão é obtida por uma transformação canônica [51]. A nível de árvore, esta transformação corresponde a uma transformada de Legendre, isto é, o funcional gerador das funções de correlação para operadores com dimensão Δ_- é obtido fazendo a transformada de Legendre do funcional gerador das funções de correlação para operadores com dimensão Δ_+ [52]. Esta prescrição, portanto, permite definir funções de correlação de operadores com dimensão Δ_- . Vejamos como isto funciona. Seguindo os passos de [52], inicialmente definimos um novo funcional

no espaço de Fourier (por conveniência)

$$J[\phi_0, \Phi] = I[\phi_0] + 2\nu \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \phi_0(k) \Phi(-k), \quad (5.79)$$

onde $I[\phi_0]$ é a ação (5.60) no espaço de Fourier, dada por:

$$I[\phi_0] = \nu \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \phi_0(k) \phi_0(-k) \left(\frac{k}{2}\right)^{2\nu}, \quad (5.80)$$

e $\nu = \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2}$. O funcional transformado, $\tilde{I}[\Phi]$, é o mínimo de $J[\phi_0, \Phi]$ com respeito a ϕ_0 mantendo Φ fixo, isto é,

$$\tilde{I}[\Phi] = \left. \frac{\delta J[\phi_0, \Phi]}{\delta \phi_0} \right|_{\phi_0 \text{ minimo}}. \quad (5.81)$$

Desse modo, é possível mostrar [52] que

$$\tilde{I}[\Phi] = -\nu \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \Phi(k) \Phi(-k) \left(\frac{k}{2}\right)^{-2\nu}. \quad (5.82)$$

Voltando para o espaço de posição e usando a equação (4.87), obtemos finalmente

$$\langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) \rangle = \frac{(2\Delta_- - d) \Gamma(\Delta_-)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\Delta_- - \frac{d}{2})} \frac{1}{|x-y|^{2\Delta_-}}, \quad (5.83)$$

onde

$$\Delta_- = \frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2} \quad (5.84)$$

é a dimensão conforme do operador \mathcal{O} . Portanto, neste caso podemos concluir, de acordo com [5], que o campo $\phi_R \sim z^{\Delta_+} \Phi(x)$ é a fonte e $\phi_I \sim z^{\Delta_-} \phi_0(x)$ é a flutuação quântica no AdS_{d+1} . Em adição, temos que ter o vínculo

$$-\frac{d^2}{4} \leq m^2 < 1 - \frac{d^2}{4} \quad (5.85)$$

para que a quantização no AdS usando o modo irregular ϕ_I seja consistente [5, 21, 22].

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas Futuras

6.1 Sumário

Neste trabalho, fizemos um estudo introdutório da Correspondência AdS/CFT, conjecturada por Maldacena em 1997, focando especialmente nos seus aspectos conceituais e nas principais ideias que levaram à sua formulação a partir do modelo de D3-branas. Dentro deste estudo introdutório, incluímos também uma aplicação básica (o campo escalar no AdS_{d+1}) de modo a testar a conjectura de Maldacena e ilustrar os métodos gerais utilizados nesta área de pesquisa no que se refere ao cálculo de observáveis, sobretudo o cálculo de funções de correlação.

No capítulo 2, vimos a necessidade de dimensões extras para uma descrição apropriada de uma teoria quântica da gravitação e para a consistência da própria Correspondência AdS/CFT. Tudo isto em conexão com o *Teorema de Weinberg-Witten* e o *Princípio Holográfico*. Vimos também que uma dimensão extra, associada à coordenada z do AdS_{d+1} , surge naturalmente por meio da abordagem do grupo de renormalização, e que ela é interpretada como sendo a escala de energia da CFT na fronteira. Mostramos que os graus de liberdade dos dois lados da Correspondência escalam da mesma forma e, além disso, que a aproximação semiclássica no AdS é uma boa aproximação se a CFT possuir muitos graus de liberdade. Finalmente, concluímos que no *limite de 't Hooft* a expansão perturbativa de uma teoria de calibre é equivalente a expansão perturbativa de uma teoria de cordas

fechadas, já sugerindo uma possível relação entre teorias de calibre no limite de N grande (limite de 't Hooft) e teoria de cordas.

No capítulo 3, o aspecto mais importante foi a verificação (no caso particular em que $d = 4$) de que *o grupo de isometrias do AdS_{d+1} atua na fronteira como o grupo conforme em d dimensões*, isto é, o grupo $SO(1, d + 1)$ (Euclideano) é isomorfo ao grupo conforme em d dimensões. Portanto, dado esse isomorfismo, temos que as representações irredutíveis destes grupos são idênticas, ou seja, em uma dada representação vai haver um campo clássico no AdS_{d+1} e um operador (ou campo) na CFT_d que se transforma de acordo com tal representação. Logo, os números quânticos desta representação vão determinar os parâmetros de ambos, isto é, do campo no AdS_{d+1} (como massa e spin) e do operador da CFT_d (como dimensão conforme e spin), ou seja, os parâmetros do AdS e da CFT vão estar relacionados. Deste ponto de vista, podemos pensar na Correspondência AdS/CFT de uma forma mais geral, no sentido de que *qualquer teoria definida no AdS_{d+1} é equivalente a uma teoria conforme (CFT) na sua fronteira d -dimensional*, embora originalmente ela tenha surgido como uma equivalência entre uma teoria de cordas em 10 dimensões e uma teoria de calibre em 4 dimensões. O estudo feito no capítulo 5 sobre campo escalar no AdS_{d+1} corrobora esta ideia.

No capítulo 4, foram estudados os principais aspectos que levou Maldacena a conjecturar a equivalência entre a teoria de cordas tipo IIB em $AdS_5 \times S^5$ e a teoria conforme $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills com grupo de simetria $SU(N)$ em 4 dimensões. O aspecto de maior destaque foi a equivalência entre a solução de p -brana extrema com N unidades de carga na supergravidade e a descrição em termos de N D3-branas na teoria de cordas que permitiu que fizéssemos duas descrições do mesmo sistema físico, culminando, portanto, com a Correspondência AdS/CFT. Embora seja apenas uma conjectura, a Correspondência AdS/CFT tem se mostrado correta pelo menos em sua versão fraca, isto é, no regime em que podemos usar a supergravidade clássica no AdS .

6.2 Perspectivas Futuras

A fim de poder estender a Correspondência AdS/CFT para a fenomenologia da física de partículas, especialmente no estudo do regime não-perturbativo (baixas energias) da QCD, precisamos quebrar a supersimetria e a simetria conforme da CFT na fronteira, de modo a poder reproduzir confinamento, gap de massa, entre outras propriedades da QCD a baixas energias, por exemplo [100]. Uma maneira de quebrar a simetria conforme é deformando ou introduzindo um corte no espaço AdS em alguma posição $z = z_0$ [73, 74]. Em um próximo trabalho, vamos estudar o regime não-perturbativo de teorias de calibre via Correspondência AdS/CFT. Em particular, modelos que sejam o mais próximo possível da QCD, com o objetivo de estudar o confinamento e propriedades térmicas desta teoria, como transições de fase confinamento/desconfinamento, por exemplo [6, 19, 20].

Recentemente, um dos mais interessantes desenvolvimentos em termos de aplicações da Correspondência AdS/CFT, tem sido a sua utilização no estudo de problemas ligados à física da matéria condensada [38, 41, 79, 82]. De fato, na matéria condensada há vários sistemas fortemente interagentes de modo que podemos usar os métodos da Correspondência AdS/CFT na aproximação da supergravidade clássica. Neste sentido, podemos modelar o comportamento de líquidos de fermi [81], metais estranhos [42, 80] e os chamados supercondutores holográficos [25, 47]. Tendo em vista todos estes sistemas fortemente interagentes que podem ser estudados à luz da Correspondência AdS/CFT, pretendemos também, em um trabalho futuro, estudar um ou mais sistemas destes, especialmente a descrição holográfica da supercondutividade.

Apêndice A

Dedução das Equações de Einstein com Constante Cosmológica

O objetivo deste apêndice é deduzir as equações de Einstein (3.2) na presença do termo de constante cosmológica, Λ .

A equação de Einstein pode ser obtida via princípio variacional, isto é,

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde S é a ação de Einstein-Hilbert com constante Cosmológica (3.1).

Vamos então fazer uma variação em (3.1) e impor que esta seja nula. Veremos que esta imposição resultará nas eqs. de Einstein (3.2). Fazendo isso, obtemos

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{16\pi G_{d+1}} \int d^{d+1}x \delta[\sqrt{-g}(R - 2\Lambda)] \\ &= \frac{1}{16\pi G_{d+1}} \int d^{d+1}x [\delta(\sqrt{-g}R) - 2\Lambda\delta\sqrt{-g}] \\ &= \frac{1}{16\pi G_{d+1}} \int d^{d+1}x [\delta\sqrt{-g}R + \sqrt{-g}\delta R - 2\Lambda\delta\sqrt{-g}]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Lembrando que $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, temos

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G_{d+1}} \int d^{d+1}x [\delta\sqrt{-g}R + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) - 2\Lambda\delta\sqrt{-g}]. \quad (\text{A.3})$$

A variação do tensor de Ricci, $\delta R_{\mu\nu}$, vai gerar um termo de superfície que vamos desprezar, já que sua contribuição, até primeira ordem, é nula [31, 94]. Com isso, ficamos com

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G_{d+1}} \int d^{d+1}x [R\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - 2\Lambda\delta\sqrt{-g}]. \quad (\text{A.4})$$

Usando o resultado já conhecido [31, 94] para $\delta\sqrt{-g}$

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.5})$$

e substituindo em (A.4), obtemos

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G_{d+1}} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} [R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}] \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.6})$$

Portanto, impondo $\delta S = 0$ para variações arbitrárias, $\delta g^{\mu\nu}$, obtemos em primeira ordem

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.7})$$

que são as eqs. de Einstein (3.2) com constante cosmológica Λ .

Apêndice B

Sistemas de Coordenadas

Neste apêndice descrevemos outros dois sistemas de coordenadas utilizados para representar o *AdS*: Coordenadas Estereográficas (ou Polares) e Coordenadas Globais. Nas coordenadas estereográficas a métrica do *AdS* pode ser escrita numa forma que se assemelha à métrica do espaço plano em coordenadas polares, enquanto que as coordenadas globais são úteis na quantização dos campos no *AdS* [4]. Dentro deste contexto, discutimos um pouco sobre o problema da quantização dos campos no *AdS* com o objetivo de estabelecer alguns conceitos importantes, que podem ser aplicados a diversas situações além da mencionada neste apêndice.

B.1 Coordenadas Estereográficas (ou Polares)

Dentro dos sistemas de coordenadas utilizados para descrever o *AdS*, as coordenadas estereográficas, (ρ, x^ν) , são as menos utilizadas em aplicações físicas, porém, por completudeza, vamos introduzi-las aqui neste apêndice. Elas são definidas da seguinte maneira [69]

$$X^0 = \rho \frac{1 + x^2}{1 - x^2} \quad (\text{B.1})$$

$$X^\nu = \rho \frac{2x^\nu}{1 - x^2}, \quad \nu = 1, \dots, d + 1 \quad (\text{B.2})$$

onde

$$x^2 \equiv (x^1)^2 + \dots + (x^d)^2 - (x^{d+1})^2. \quad (\text{B.3})$$

Portanto, o AdS_{d+1} , definido por (3.7), em coordenadas estereográficas é equivalente a

$$\rho^2 = b^2 \rightarrow \rho = b. \quad (\text{B.4})$$

Tomando as diferenciais das relações (B.1) e (B.2), temos que

$$dX^0 = d\rho \frac{1+x^2}{1-x^2} + 4\rho \frac{x_\nu dx^\nu}{(1-x^2)^2} \quad (\text{B.5})$$

$$dX^\nu = d\rho \frac{2x^\nu}{1-x^2} + \frac{2\rho}{(1-x^2)^2} [(1-x^2)\delta_\mu^\nu + 2x^\nu x_\mu] dx^\mu. \quad (\text{B.6})$$

Agora, reescrevendo a métrica (3.8) em termos das coordenadas (ρ, x^ν) , obtemos a métrica do AdS_{d+1} no espaço de imersão $\mathbb{R}^{2,d}$

$$ds^2 = -d\rho^2 + \frac{4\rho^2}{(1-x^2)^2} dx^2 = -d\rho^2 + \frac{4b^2}{(1-x^2)^2} dx^2, \quad (\text{B.7})$$

onde usamos (B.4) para expressar ρ em termos do raio de curvatura do AdS_{d+1} , b . Nestas coordenadas a métrica fatora em uma parte “radial” e uma parte “angular”. Podemos ainda escrever a métrica (B.7) de maneira mais compacta como

$$ds^2 = -d\rho^2 + g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{B.8})$$

onde

$$g_{\mu\nu} = \frac{4b^2}{(1-x^2)^2} \eta_{\mu\nu}; \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, +, \dots, -). \quad (\text{B.9})$$

B.2 Coordenadas Globais

As coordenadas globais (ρ, τ, Ω_i) são definidas por [2, 101]:

$$X^0 = b \cosh \rho \cos \tau \quad (\text{B.10})$$

$$X^i = b \sinh \rho \Omega_i \quad (\text{B.11})$$

$$X^{d+1} = b \cosh \rho \sin \tau, \quad (\text{B.12})$$

Onde $\rho \geq 0$, $0 \leq \tau < 2\pi$ com $\tau = 0$ e $\tau = 2\pi$ identificados e $\sum_{i=1}^d \Omega_i^2 = 1$. Nestas coordenadas a métrica do AdS_{d+1} se escreve como

$$ds^2 = b^2 (-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{d-1}^2), \quad (\text{B.13})$$

onde $d\Omega_{d-1}^2$ é a métrica em S^{d-1} . As coordenadas (ρ, τ, Ω_i) são chamadas de globais pois elas cobrem todo o espaço, ao contrário das coordenadas de Poincaré, que cobrem apenas parte do AdS .

Note que o AdS_{d+1} nestas coordenadas tem topologia S^1 (tempo) $\times \mathbb{R}^d$ (espaço), visto que

$$ds^2 \approx b^2(-d\tau^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{d-1}^2), \quad (\text{B.14})$$

nas vizinhanças de $\rho = 0$. Portanto, há a presença de curvas tipo-tempo fechadas, o que é um problema no que se refere à estrutura causal do espaço-tempo [94]. Afim de evitar a violação da causalidade e, com isso, tornar possível a identificação de τ como a coordenada temporal é necessário estender (“*unwrap*”) seu intervalo de modo que $\tau \in \mathbb{R}$, ou seja, $-\infty < \tau < \infty$. Esta extensão pode ser feita tomando cópias do espaço AdS original que, juntas, formam o chamado *espaço de cobertura do AdS*, denotado por $CAdS$ (veja Figura B.1) [4]. Nesse caso o AdS_{d+1} passa a ter topologia \mathbb{R}^{d+1} .

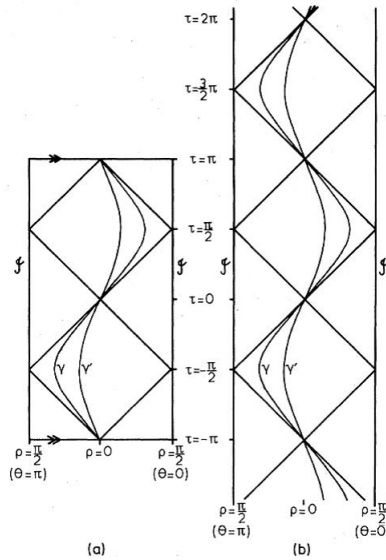


Figura B.1: Diagrama de Penrose (para detalhes sobre a origem e a construção destes diagramas veja [68]) representando o (a) AdS e (b) seu espaço de cobertura, $CAdS$. Fonte: [4].

Vamos analisar agora a estrutura topológica da fronteira ($\rho \rightarrow \infty$ em (B.13)) do AdS_{d+1} . Para isto, vamos primeiramente compactificar o AdS_{d+1} fazendo a mudança de

coordenadas em (B.13)

$$\tan \theta = \cosh \rho, \quad (\text{B.15})$$

que mapeia pontos no infinito em pontos a uma distancia finita (a função $\tan^{-1} x$ mapeia $(-\infty, \infty)$ em $(-\pi/2, \pi/2)$). Com isso, obtemos o AdS_{d+1} compactificado, cuja métrica em termos da nova coordenada fica dada por

$$ds^2 = \frac{b^2}{\cos^2 \theta} (-d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{d-1}^2), \quad (\text{B.16})$$

onde $0 \leq \theta < \pi/2$. Note que esta métrica é conforme à

$$d\tilde{s}^2 = (-d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{d-1}^2), \quad (\text{B.17})$$

com fator conforme $\Omega^2 = \frac{\cos^2 \theta}{b^2}$. Esta é a métrica do universo estático de Einstein [31], que nada mais é do que a compactificação conforme do espaço de Minkowski $(d+1)$ -dimensional. No entanto, para o AdS_{d+1} , θ toma valores entre 0 e $\pi/2$, ao contrário do espaço de Minkowski, onde θ assume valores entre 0 e π . Por isso, dizemos que o AdS é conforme à metade do universo estático de Einstein.

A fronteira do AdS_{d+1} compactificado conformalmente, (B.17), localiza-se em $\theta = \pi/2$, onde

$$d\tilde{s}^2 = (-d\tau^2 + d\Omega_{d-1}^2). \quad (\text{B.18})$$

Logo, vemos que a estrutura topológica da fronteira do AdS_{d+1} é cilíndrica¹, $\mathbb{R} \times S^{d-1}$, que por sua vez corresponde à topologia do espaço de Minkowski d -dimensional compactificado conformalmente. Portanto, verificamos mais uma vez, por meio de outro sistema de coordenadas, que a fronteira conforme do AdS_{d+1} é, de fato, o espaço de Minkowski d -dimensional, como tinha que ser, pois a identificação da fronteira do AdS como sendo o espaço de Minkowski (ou Euclideano após uma rotação de Wick) independe do sistema de coordenadas.

¹Aqui estamos nos referindo ao espaço de cobertura, onde $-\infty < \tau < \infty$. É usual na literatura se referir ao $CAdS$ como sendo simplesmente o AdS .

B.2.1 Uma Discussão sobre a Quantização dos Campos no AdS

O chamado *problema de Cauchy* [31, 94] consiste em encontrar a evolução causal de um sistema físico a partir de condições iniciais. As condições iniciais são especificadas em uma hipersuperfície tipo-espaço ($X^0 = 0$, por exemplo) denominada *superfície de Cauchy*. Podemos pensar nestas condições iniciais na superfície de Cauchy como sendo a especificação do estado do sistema em um determinado instante de tempo. Uma vez especificadas estas condições, a dinâmica do sistema fica completamente determinada para todos os tempos futuros. Para isto, é necessário que o espaço-tempo seja *globalmente hiperbólico*, isto é, um espaço-tempo que admite superfícies de Cauchy. Portanto, para obtermos a dinâmica dos campos quânticos (até mesmo para campos clássicos) de maneira unívoca no AdS , é preciso que este seja globalmente hiperbólico. Consequentemente, teremos um problema de Cauchy bem definido. No entanto, o AdS não é globalmente hiperbólico [49], ou seja, não há superfícies de Cauchy neste espaço, pois a informação está sempre sendo perdida ou ganha da sua fronteira tipo-tempo. Podemos entender isto da seguinte maneira:

Dadas condições iniciais no AdS , definidas em $X^0 \equiv t = 0$, não podemos determinar univocamente a dinâmica dos campos para todos os tempos, por ele não ser globalmente hiperbólico. Sendo assim, após um determinado intervalo de tempo, perdemos completamente o controle da evolução temporal do sistema. Isto significa que a informação, ou seja, a luz, composta de fótons (partículas sem massa), pode se propagar e chegar na fronteira, que fica no infinito, em um tempo finito. Vamos mostrar isso. Considere a métrica (B.13). Vamos calcular o tempo que a luz leva para sair de um ponto do AdS e chegar até a fronteira ($\rho = \infty$). Supomos, por simplicidade, que a luz viaja na direção radial ($d\Omega_{d-1}^2 = 0$). Para a propagação de luz, temos $ds^2 = 0$. Logo

$$0 = b^2(-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2), \quad (\text{B.19})$$

com isso, obtemos

$$d\tau = \operatorname{sech}\rho d\rho \implies \int_{t_0}^t d\tau = \int_0^\infty \operatorname{sech}\rho d\rho, \quad (\text{B.20})$$

resultando em

$$\Delta t \equiv t - t_0 = \frac{\pi}{2}, \quad (\text{B.21})$$

ou seja, um intervalo de tempo finito. Como $-\infty < \tau < \infty$, isto significa que a informação não só consegue chegar na fronteira em um tempo finito, como também pode ser perdida em um tempo finito, pois nada impede que ela possa ir além da fronteira. O mesmo ocorre com a informação que está se propagando do infinito e “entrando” no *AdS* em instantes de tempo finitos. Sendo assim, é evidente que isto causará um problema na definição de uma teoria quântica de campos consistente (com dinâmica causal univocamente determinada) no *AdS*. Entretanto, podemos contornar este problema impondo condições de contorno no infinito, ou seja, na superfície $\theta = \pi/2$ via compactificação conforme, (B.17). Deste modo, podemos estabelecer uma quantização dos campos consistente no *AdS* [4, 17, 22].

Apêndice C

Formas Diferenciais

Este apêndice tem por objetivo fazer uma breve revisão sobre formas diferenciais, que é um formalismo conveniente muito utilizado em supergravidade e teoria cordas.

C.1 Conceitos e Definições Importantes

Uma p -forma, A , é um tensor de rank p , $A_{\mu_1 \dots \mu_p}$, completamente antissimétrico. Denotaremos uma p -forma de rank p por A_p , com os p índices omitidos. O produto de uma p -forma A_p por uma q -forma B_q é denotado por

$$A_p \wedge B_q \equiv A_p B_q,$$

onde \wedge é o símbolo que denota o chamado *produto exterior*. O produto exterior acima é definido da seguinte maneira¹

$$(A \wedge B)_{\mu_1 \dots \mu_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p!q!} A_{[\mu_1 \dots \mu_p} B_{\mu_{p+1} \dots \mu_{p+q}]}, \quad (\text{C.1})$$

onde $[]$ denota antissimetrização. Logo, o produto de uma p -forma A_p por uma q -forma B_q é um tensor completamente antissimétrico com $p+q$ índices e, portanto, é uma $(p+q)$ -forma, C_{p+q} . O produto exterior possui a propriedade

$$A_p \wedge B_q = (-1)^{pq} B_q \wedge A_p. \quad (\text{C.2})$$

¹Estamos utilizando as convenções de [71].

O operador de *derivada exterior*, d , leva uma p -forma em uma $(p + 1)$ -forma, e é definido como

$$(dA)_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = (p + 1) \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]} \quad (\text{C.3})$$

Este operador possui uma importante propriedade que é a de *nilpotência*, isto é,

$$d^2 = 0. \quad (\text{C.4})$$

A integral de uma d -forma em d dimensões

$$\int d^0 x \wedge \dots \wedge d^{d-1} x A_{01 \dots d-1} \equiv \int d^d x A_d \equiv \int A_d, \quad (\text{C.5})$$

é um invariante por transformações de coordenadas, visto que a transformação do tensor antissimétrico é compensada pela transformação da medida de integração. Ainda em d dimensões podemos definir a d -forma de volume, ω , como sendo

$$\omega \equiv \omega_{\mu_1 \dots \mu_d} = \sqrt{g} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d}, \quad (\text{C.6})$$

onde $g = \det g_{\mu\nu}$ e $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d}$ é o símbolo de Levi-Civita, definido de tal modo que se transforma como um tensor. Portanto, o volume de uma variedade \mathcal{M} , $V(\mathcal{M})$, se escreve como:

$$V(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} \omega = \int_{\mathcal{M}} d^d x \sqrt{g}. \quad (\text{C.7})$$

Analogamente, podemos integrar uma p -forma sobre uma subvariedade p -dimensional, Σ . Além disso, vale o *Teorema de Stokes* no caso de uma variedade com fronteira:

$$\int_{\Sigma} dA_{p-1} = \int_{\partial\Sigma} A_{p-1}, \quad (\text{C.8})$$

onde $\partial\Sigma$ é a fronteira de Σ .

Outra definição importante dentro deste formalismo de formas diferenciais é o *Hodge dual*, simbolizado por $*$. A aplicação do Hodge dual leva uma p -forma, A_p , em uma $(d - p)$ -forma, A_{d-p} , onde d é a dimensão do espaço-tempo. O operador $*$ é definido como

$$(*A)_{\mu_1 \dots \mu_{d-p}} = \frac{1}{p!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{d-p}}^{\nu_1 \dots \nu_p} A_{\nu_1 \dots \nu_p}. \quad (\text{C.9})$$

Uma p -forma F_p é dita *auto-dual* se satisfaz

$$*F = F \iff F = **F. \quad (\text{C.10})$$

É claro que esta condição de auto-dualidade vai depender da dimensão d e do rank p da p -forma. Além disso, esta condição não é satisfeita para ambas as assinaturas de Lorentz e Euclideana. De fato, é possível mostrar [33] que

$$** = \begin{cases} (-1)^{p(d-p)} & \text{(Euclideano)} \\ (-1)^{p(d-p)+1} & \text{(Minkowski)} \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

Em particular, a 5-forma, $F_5 = dA_4$, da teoria de cordas tipo IIB em $d = 10$ dimensões é auto-dual somente na assinatura de Lorentz. No entanto, mesmo em assinatura Euclideana, continua sendo verdade que a solução descrevendo uma D3-brana na supergravidade terá a forma [69]

$$F_5 = H_5 + *H_5. \quad (\text{C.12})$$

Por fim, é muito comum representar uma p -forma por meio de uma expansão na base das diferenciais, dx^μ , ou seja,

$$A_p = \frac{1}{p!} A_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (\text{C.13})$$

O fatorial é apenas para compensar a soma sobre permutações de modo que cada componente independente apareça apenas uma vez. Nesta base, a derivada exterior, d , é representada como

$$d = \partial_\mu dx^\mu. \quad (\text{C.14})$$

Desse modo, aplicando (C.14) em (C.13), obtemos [33]

$$dA_p = \frac{1}{(p+1)!} \partial_\mu A_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (\text{C.15})$$

Visto que o produto $dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$ é completamente antissimétrico, após a operação de tomar a derivada exterior é preciso antissimetrizar $\partial_\mu A_{\mu_1 \dots \mu_p}$.

Apêndice D

Solução de Reissner-Nordström em (3+1) Dimensões

Neste apêndice descrevemos a solução de Reissner-Nordström no contexto da relatividade geral em (3+1) dimensões a fim de fazer um paralelo com as soluções correspondendo a p -branas na supergravidade em (9 + 1) dimensões discutidas no capítulo 4.

A *solução de Reissner-Nordström* é uma solução das equações de Einstein-Maxwell [31]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (\text{D.1})$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento. A solução de Reissner-Nordström é dada por [28]:

$$ds^2 = -dt^2 \left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{q}{\rho^2}\right) + \frac{d\rho^2}{\left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{q}{\rho^2}\right)} + \rho^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (\text{D.2})$$

e corresponde a um buraco negro esfericamente simétrico com massa m e carga elétrica (ou magnética) q em (3 + 1) dimensões. Os horizontes deste buraco negro são as duas raízes de

$$1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{q}{\rho^2} = 0, \quad (\text{D.3})$$

ou seja,

$$\rho_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - q^2}. \quad (\text{D.4})$$

Note que a condição $\rho_+ \geq \rho_-$, vista no capítulo 4, neste caso também implica em uma desigualdade entre a massa e a carga do buraco negro, isto é,

$$\rho_+ \geq \rho_- \implies m \geq |q|, \quad (\text{D.5})$$

de modo que no contexto de uma teoria supersimétrica este é o limite BPS, (4.25). Em particular, se

$$m = |q|, \quad (\text{D.6})$$

temos um *buraco negro extremo*, que é o equivalente (3 + 1)-dimensional da p -brana extrema em (9 + 1) dimensões, (4.26). Neste caso extremo, podemos reescrever a métrica (D.2) de uma maneira interessante fazendo a mudança de coordenadas

$$\rho = r + m. \quad (\text{D.7})$$

Logo, (D.2) torna-se:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 \left(1 + \frac{q}{r}\right)^{-2} + \left(1 + \frac{q}{r}\right)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \\ &= -[H(\vec{x})]^{-2} dt^2 + [H(\vec{x})]^2 d\vec{x}^2, \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

onde $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ e

$$H(\vec{x}) = 1 + \frac{q}{|\vec{x}|}, \quad (\text{D.9})$$

com $H(\vec{x})$ sendo uma função harmônica em 3 dimensões espaciais e com a condição de contorno que $H(\vec{x}) \rightarrow 1$ quando $\vec{x} \rightarrow \infty$, ou seja, o espaço-tempo é assintoticamente Minkowski.

Note que a solução (D.8) em (3 + 1) dimensões é muito semelhante à solução (4.48) em (9 + 1) dimensões, como tinha que ser, pois a solução (4.48) é apenas uma generalização de (D.8) para mais dimensões.

Por fim, no caso em que $q = 0$ em (D.2), temos

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{\rho}\right) dt^2 + \frac{d\rho^2}{\left(1 - \frac{2m}{\rho}\right)} + \rho^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (\text{D.10})$$

que é justamente a *solução de Schwarzschild*, correspondendo a um buraco negro esfericamente simétrico e neutro ($q = 0$).

Apêndice E

Formulário

Este apêndice tem como propósito reunir algumas fórmulas úteis que vão ser utilizadas ao longo de todo o Capítulo 5. Todas as expressões matemáticas e fórmulas foram retiradas de [1, 37, 64]

E.1 Funções de Bessel Modificadas: Fórmulas Úteis e Expansões em Série

A equação diferencial de Bessel modificada é dada por

$$z^2 w''(z) + zw'(z) - (z^2 + \nu^2)w(z) = 0. \quad (\text{E.1})$$

A solução geral desta equação é da forma

$$w(z) = c_1 I_\nu(z) + c_2 K_\nu(z), \quad (\text{E.2})$$

onde c_1 e c_2 são constantes que vão depender das condições iniciais. $I_\nu(z)$ é a função de Bessel modificada de 1º tipo, $K_\nu(z)$ a função de Bessel modificada de 2º tipo e ν é a ordem da função de Bessel.

Alguns valores particulares que estas funções assumem:

- $I_0(0) = 0$
- $I_\nu(0) = 0$, para $\text{Re}(\nu) > 0$

- $K_0(0) = \infty$
- $K_\nu(0) = \infty$

No que se refere ao comportamento assintótico ($z \rightarrow \infty$) destas funções, temos

$$I_\nu(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z \quad (\text{E.3})$$

$$K_\nu(z) \sim \frac{\pi}{\sqrt{2z}} e^{-z}. \quad (\text{E.4})$$

A equação diferencial que aparece no Capítulo 5 é um caso particular de uma equação diferencial mais geral cuja solução envolve funções de Bessel. Esta equação tem a forma genérica

$$z^2 w''(z) + (1 - 2\alpha)z w'(z) + (z^2 \beta^2 + \alpha^2 - \nu^2)w(z) = 0, \quad (\text{E.5})$$

onde α e β são parâmetros a determinar. A solução geral desta equação é dada por:

$$w(z) = z^\alpha (c_1 J_\nu(\beta z) + c_2 N_\nu(\beta z)), \quad (\text{E.6})$$

onde $J_\nu(z)$ é a função de Bessel de primeiro tipo e $N_\nu(z)$ é a função de Bessel de segundo tipo, ou função de Neumann. Se $z \rightarrow iz$ em (E.5), a solução geral fica sendo dada por:

$$w(z) = z^\alpha (c_1 K_\nu(\beta z) + c_2 I_\nu(\beta z)). \quad (\text{E.7})$$

Uma identidade muito útil, e que também será utilizada, relacionando a derivada da função $K_\nu(z)$ com a própria função é a seguinte:

$$\frac{dK_\nu(z)}{dz} = -K_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} K_\nu(z) = \frac{\nu}{z} K_\nu(z) - K_{\nu+1}(z). \quad (\text{E.8})$$

Tendo em vista que no Capítulo 5 vamos trabalhar apenas com a função de Bessel $K_\nu(z)$, colocamos aqui a expansão em série em torno de $z = 0$ apenas para esta função em particular, nos casos em que ν é não-inteiro, inteiro não-nulo e nulo.

Para ν não-inteiro:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \Gamma(1 - \nu) \left[\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{n \geq 0} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma(n + 1 - \nu)} - \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n \geq 0} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma(n + 1 + \nu)} \right]. \quad (\text{E.9})$$

Para ν inteiro não-nulo:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{n=0}^{\nu-1} (-1)^n \frac{\Gamma(\nu-n)}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \quad (\text{E.10})$$

$$- (-1)^\nu \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n \geq 0} \left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{\lambda(n+1) + \lambda(\nu+n+1)}{2} \right] \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma(n+\nu+1)},$$

onde

$$\lambda(1) = -\gamma \quad (\text{E.11})$$

$$\lambda(n) = -\gamma + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} \quad (n \geq 2), \quad (\text{E.12})$$

e γ é a constante de Euler-Mascheroni ($\gamma \approx 0.577$).

Para $\nu = 0$:

$$K_0(z) = - \sum_{n \geq 0} \left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) - \lambda(n+1) \right] \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma(n+1)}. \quad (\text{E.13})$$

E.2 Integração no Espaço dos Momentos

Para $\rho \neq -d, -d-2, \dots$, temos

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} k^\rho = C_\rho \frac{1}{|x|^{d+\rho}}, \quad (\text{E.14})$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} \frac{k_i k_j}{k^2} k^\rho = -\frac{1}{\rho} \left\{ \delta_{ij} - (\rho+d) \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right\} \frac{C_\rho}{|x|^{d+\rho}}, \quad (\text{E.15})$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} k^\rho \ln k = \frac{dC_\rho}{d\rho} \frac{1}{|x|^{d+\rho}} + C_\rho \frac{\ln|x|}{|x|^{d+\rho}}, \quad (\text{E.16})$$

onde

$$C_\rho = \frac{2^\rho}{\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-\rho}{2}\right)}. \quad (\text{E.17})$$

Observação: Note que a integral (E.15) pode ser obtida derivando (E.14) com relação a x_i e x_j . Podemos checar a validade de (E.15) contraindo os índices i, j e comparando com (E.14).

Referências Bibliográficas

- [1] <http://functions.wolfram.com/Bessel-TypeFunctions/>. 105
- [2] AHARONY, O., GUBSER, S. S., MALDACENA, J., OOGURI, H., AND OZ, Y. “Large N Field Theories, String Theory and Gravity”. *Phys. Rept.*, **323** (1999), 183–386, [[arXiv: hep-th/9905111v3](https://arxiv.org/abs/hep-th/9905111v3)]. 3, 5, 17, 18, 20, 23, 28, 44, 45, 47, 48, 49, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 75, 95
- [3] ARUTYUNOV, G. E., AND FROLOV, S. A. “Antisymmetric Tensor Field on AdS_5 ”. *Phys. Lett.* **B441** (1998), 173–177, [[arXiv: hep-th/9807046v2](https://arxiv.org/abs/hep-th/9807046v2)]. 77
- [4] AVIS, S. J., ISHAM, C. J., AND STOREY, D. “Quantum field theory in anti-de Sitter space-time”. *Phys. Rev.* **D18** (1978), 3565. 94, 96, 99
- [5] BALASUBRAMANIAN, V., KRAUS, P., AND LAWRENCE, A. “Bulk vs. Boundary Dynamics in Anti-de Sitter Spacetime”. *Phys. Rev.* **D59** (1999), [[arXiv: hep-th/9805171v4](https://arxiv.org/abs/hep-th/9805171v4)]. 84, 86, 87, 88
- [6] BAYONA, C. A. B., BOSCHI-FILHO, H., BRAGA, N. R. F., AND ZAYAS, L. A. P. “On a Holographic Model for Confinement/Deconfinement”. *Phys. Rev.* **D77** (2008), [[arXiv: hep-th/0705.1529v3](https://arxiv.org/abs/hep-th/0705.1529v3)]. 91
- [7] BAYONA, C. A. M. B. “Um Estudo da Correspondência AdS/CFT ”, 2005. Dissertação de Mestrado, UFRJ. 5

-
- [8] BEKENSTEIN, J. D. “*Black Holes and Entropy*”. *Phys. Rev.* **D7** (1973), 2333. 9, 13
- [9] BEKENSTEIN, J. D. “*Generalized Second Law of Thermodynamics in Black-hole Physics*”. *Phys. Rev.* **D9** (1974), 3292. 13
- [10] BEKENSTEIN, J. D. “*Entropy Bounds and Black Hole Remnants*”. *Phys. Rev.* **D49** (1994), 1912–1921, [[arXiv: gr-qc/9307035](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9307035)]. 13
- [11] BENGTTSSON, I. “*ANTI-DE SITTER SPACE*”, [<http://www.fysik.su.se/ingemar/Kurs.pdf>]. Lecture notes, Stockholm University (Fall 1998). 30
- [12] BIANCHI, M., FREEDMAN, D. Z., AND SKENDERIS, K. “*Holographic Renormalization*”. *Nucl. Phys.* **B631** (2002), 159–194, [[arXiv: hep-th/0112119v2](https://arxiv.org/abs/hep-th/0112119v2)]. 71
- [13] BLOOM, E. D., COWARD, D. H., DESTAEBLER, H., DREES, J., MILLER, G., MO, L. W., TAYLOR, R. E., BREIDENBACH, M., FRIEDMAN, J. I., HARTMANN, G. C., AND KENDALL, H. W. “*High-Energy Inelastic $e-p$ Scattering at 6° and 10°* ”. *Phys. Rev. Lett.* **23**, 930 (1969). 32
- [14] BOSCHI, H., AND BRAGA, N. R. F. “*Remark on the Variational Principle in the AdS/CFT Correspondence for the Scalar Field*”. *Phys. Lett.* **B471** (1999), 162–170, [[arXiv:hep-th/9910233v1](https://arxiv.org/abs/hep-th/9910233v1)]. 81
- [15] BOSCHI-FILHO, H., AND BRAGA, N. R. F. “*Compact AdS space, Brane geometry and the AdS/CFT Correspondence*”. *Phys. Rev.* **D66** (2001), [[arXiv: hep-th/0112196v2](https://arxiv.org/abs/hep-th/0112196v2)]. 27, 28
- [16] BOSCHI-FILHO, H., AND BRAGA, N. R. F. “*Field spectrum and degrees of freedom in AdS/CFT correspondence and Randall Sundrum model*”. *Phys. Rev.* **B608** (2001), 319–332, [[arXiv: hep-th/0012196v2](https://arxiv.org/abs/hep-th/0012196v2)]. 28

- [17] BOSCHI-FILHO, H., AND BRAGA, N. R. F. “Quantum fields in anti de Sitter spacetime and degrees of freedom in the bulk/boundary correspondence”. *Phys. Rev.* **B505** (2001), 263–266, [[arXiv: hep-th/0009039v2](#)]. 28, 99
- [18] BOSCHI-FILHO, H., AND BRAGA, N. R. F. “Isometries of a $D3$ -Brane Space”. *Class. Quant. Grav.*, **21** (2004), 2427–2433, [[arXiv: hep-th/0311012v2](#)]. 39
- [19] BOSCHI-FILHO, H., AND BRAGA, N. R. F. “QCD/String Holographic Mapping and Glueball Mass Spectrum”. *Eur. Phys. J.* **C32** (2004), 529–533, [[arXiv: hep-th/0209080v3](#)]. 91
- [20] BOSCHI-FILHO, H., BRAGA, N. R. F., AND FERREIRA, C. N. “Heavy Quark Potential at Finite Temperature from Gauge/String Duality”. *Phys. Rev.* **D74** (2006), [[arXiv: hep-th/0607038v4](#)]. 91
- [21] BREITENLOHNER, P., AND FREEDMAN, D. Z. “Positive Energy in Anti-De Sitter Backgrounds and Gauged Extended Supergravity”. *Phys. Lett.* **115B** (1982), 197, 75, 86, 88
- [22] BREITENLOHNER, P., AND FREEDMAN, D. Z. “Stability in Gauged Extended Supergravity”. *Ann. Phys.* **144** (1982), 249–281. 75, 86, 88, 99
- [23] BURGESS, C., AND QUEVEDO, F. “Bosonization as Duality”. *Nucl. Phys.* **B421** (1994), 373–390, [[arXiv: hep-th/9401105v1](#)]. 4
- [24] BURGESS, C., AND QUEVEDO, F. “Nonabelian Bosonization as Duality”. *Phys. Lett.* **B329** (1994), 457–462, [[arXiv: hep-th/9403173v2](#)]. 4
- [25] CAI, R.-G., LI, L., LI, L.-F., AND YANG, R.-Q. “Introduction to Holographic Superconductor Models”. *Sci. China-Phys Mech. Astron.* (2015), [[arXiv: hep-th/1502.00437v3](#)]. 91

- [26] CARLO, V. D. “*Conformal compactification and anti-de Sitter space*”, [<http://www.fysik.su.se/ingemar/releteri/valentinamaster.pdf>]. Dissertação de Mestrado, Stockholm University. 30, 31
- [27] COLEMAN, S. “*Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures*”, reprint ed. Cambridge University Press, 1988. 3
- [28] D’AURIA, R., AND FRE’, P. “*BPS Black Holes in Supergravity*”. Lecture Notes for the SIGRAV Graduate School in Contemporary Relativity (1998), [[arXiv: hep-th/9812160v2](https://arxiv.org/abs/hep-th/9812160v2)]. 47, 49, 50, 57, 103
- [29] DE HARO, S., SKENDERIS, K., AND SOLODUKHIN, S. N. “*Holographic Reconstruction of Spacetime and Renormalization in the AdS/CFT Correspondence*”. *Commun. Math. Phys.* **217** (2001), 595–622, [[arXiv: hep-th/0002230v3](https://arxiv.org/abs/hep-th/0002230v3)]. 71
- [30] D’HOKER, E., AND FREEDMAN, D. Z. “*Supersymmetric Gauge Theories and the AdS/CFT Correspondence*”. [[arXiv: hep-th/0201253v2](https://arxiv.org/abs/hep-th/0201253v2)]. 5, 47, 49, 50, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 62, 64, 66, 67
- [31] D’INVERNO, R. “*Introducing Einstein’s Relativity*”, 1 ed. Clarendon Press, 1992. 15, 38, 92, 93, 97, 98, 103
- [32] DIRAC, P. A. M. “*The Theory of Magnetic Poles*”. *Phys. Rev.* **74** (1948), 817. 47
- [33] FLANDERS, H. “*Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*”, 1 ed. Dover Publications, 1989. 102
- [34] FRANCESCO, P. D., MATHIEU, P., AND SÉNÉCHAL, D. “*Conformal Field Theory*”, 1 ed. Springer, 1997. 33, 36, 37, 68
- [35] FREEDMAN, D. Z., MATHUR, S. D., MATUSIS, A., AND RASTELLI, L. “*Correlation Functions in the CFT_d/AdS_{d+1} Correspondence*”. *Nucl. Phys.* **B546** (1999), 96–118, [[arXiv: hep-th/9804058v2](https://arxiv.org/abs/hep-th/9804058v2)]. 77, 82

- [36] FRIEDMAN, M. B. J. I., KENDALL, H. W., BLOOM, E. D., COWARD, D. H., DESTAEBLER, H., DREES, J., MO, L. W., AND TAYLOR, R. E. “*Observed Behavior of Highly Inelastic Electron-Proton Scattering*”. *Phys. Rev. Lett.* **23**, 935 (1969). 32
- [37] GRADSHTEYN, I. S., AND RYZHIK, I. M. “*Table of Integrals, Series, and Products*”, 7 ed. Academic Press, 2007. 105
- [38] GREEN, A. G. “*An Introduction to Gauge Gravity Duality and Its Application in Condensed Matter*”. *Contemporary Physics* **54** (2013), [[arXiv: hep-th/1304.5908v1](#)]. 91
- [39] GREEN, M. B., SCHWARZ, J. H., AND WITTEN, E. “*Superstring Theory*”, 25th anniversary ed., vol. 1 e 2. Cambridge University Press, 2012. 2
- [40] GUBSER, S., KLEBANOV, I., AND POLYAKOV, A. “*Gauge Theory Correlators from Non-Critical String Theory*”. *Phys. Lett.* **B428** (1998), 105–114, [[arXiv: hep-th/9802109v2](#)]. 68
- [41] HARTNOLL, S. A. “*Lectures on Holographic Methods for Condensed Matter Physics*”. *Class. Quant. Grav.* **26** (2009), [[arXiv: hep-th/0903.3246v3](#)]. 91
- [42] HARTNOLL, S. A., POLCHINSKI, J., SILVERSTEIN, E., AND TONG, D. “*Towards Strange Metallic Holography*”. *JHEP* **1004** (2010), [[arXiv: hep-th/0912.1061v2](#)]. 91
- [43] HENNEAUX, M. “*Boundary Terms in the AdS/CFT Correspondence for Spinor Fields*”. Proceedings of the International Workshop ?ISMP? held in Tbilissi in September of 1998 (1999), [[arXiv: hep-th/9902137v1](#)]. 77, 81
- [44] HENNINGSON, M., AND SFETSOS, K. “*Spinors and the AdS/CFT Correspondence*”. *Phys. Lett.* **B431** (1998), 63–68, [[arXiv: hep-th/9803251v2](#)]. 77

- [45] HENNINGSON, M., AND SKENDERIS, K. “*The Holographic Weyl anomaly*”. *JHEP* **9807** (1998), [[arXiv: hep-th/9806087v2](#)]. 71
- [46] HENNINGSON, M., AND SKENDERIS, K. “*Holography and the Weyl anomaly*”. *Fortsch. Phys.* **48** (2000), 125–128, [[arXiv: hep-th/9812032v1](#)]. 71
- [47] HOROWITZ, G. T. “*Introduction to Holographic Superconductors*”. To appear in the proceedings of the 5th Aegean Summer School (2010), [[arXiv: hep-th/1002.1722v2](#)]. 91
- [48] HOROWITZ, G. T., AND STROMINGER, A. “*Black Strings and p-Branes*”. *Nucl. Phys.* **B360** (1991), 197–209. 47
- [49] ISHIBASHI, A., AND WALD, R. M. “*Dynamics in Non-Globally-Hyperbolic Static Spacetimes III: Anti-de Sitter Spacetime*”. *Class. Quant. Grav.* **21** (2004), 2981–3014, [[arXiv: hep-th/0402184v4](#)]. 98
- [50] KLEBANOV, I. R. “*World Volume Approach to Absorption by Non-dilatonic Branes*”. *Nucl. Phys.* **B496** (1997), 231–242, [[arXiv: hep-th/9702076v2](#)]. 43
- [51] KLEBANOV, I. R. “*TASI Lectures: Introduction to the AdS/CFT Correspondence*”. Lectures at TASI, Boulder, June 1999 (1999), [[arXiv: hep-th/0009139v2](#)]. 5, 87
- [52] KLEBANOV, I. R., AND WITTEN, E. “*AdS/CFT Correspondence and Symmetry Breaking*”. *Nucl. Phys.* **B556** (1999), 89–114, [[arXiv: hep-th/9905104v2](#)]. 84, 85, 87, 88
- [53] KOSHELEV, A. S., AND RYTCHKOV, O. A. “*Note on the Massive Rarita-Schwinger Field in the AdS/CFT correspondence*”. *Phys. Lett.* **B450** (1999), 368–376, [[arXiv: hep-th/9812238v1](#)]. 77
- [54] L’YI, W. S. “*Coordinate-space Holographic Projection of Fields and an Application to Massive Vector Fields*”. [[arXiv: hep-th/9808051v5](#)]. 77

- [55] L'YI, W. S. “*Generating Functionals of Correlation Functions of p -form Currents in AdS/CFT Correspondence*”. [[arXiv: hep-th/9809132v2](#)]. 77
- [56] MACK, G., AND SALAM, A. “*Finite Component Field Representations of the Conformal Group*”. *Ann. Phys.* **53** (1969). 36
- [57] MALDACENA, J. “*The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*”. *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998), 231–252, [[arXiv: hep-th/9711200v3](#)]. 3, 39, 59, 62, 67
- [58] MALDACENA, J. “*TASI 2003 Lectures on AdS/CFT*”. [[arXiv: hep-th/0309246v5](#)]. 20
- [59] MALDACENA, J. “*The Gauge/Gravity Duality*”. Chapter of the book “Black Holes in Higher Dimensions” to be published by Cambridge University Press (2014), [[arXiv: hep-th/1106.6073v2](#)]. 58, 63, 64
- [60] MATLOCK, P., AND VISWANATHAN, K. S. “*The AdS/CFT Correspondence for the Massive Rarita-Schwinger Field*”. *Phys. Rev.* **D61** (2000), [[arXiv: hep-th/9906077v3](#)]. 77
- [61] MCGREEVY, J. “*Holographic duality with a view toward many-body physics*”. *Adv. High Energy Phys.* (2010), [[arXiv: hep-th/0909.0518v3](#)]. 5, 17, 19, 22, 63
- [62] MÜCK, W., AND VISWANATHAN, K. S. “*Conformal Field Theory Correlators from Classical Field Theory on Anti-de Sitter Space II. Vector and Spinor Fields*”. *Phys. Rev.* **D58** (1998), [[arXiv: hep-th/9805145v2](#)]. 77
- [63] MÜCK, W., AND VISWANATHAN, K. S. “*The Graviton in the AdS-CFT correspondence: Solution via the Dirichlet Boundary value problem*”. [[arXiv: hep-th/9810151v1](#)]. 77

- [64] MINCES, P., AND RIVELLES, V. O. “*Scalar Field Theory in the AdS/CFT Correspondence Revisited*”. *Nucl. Phys.* **B572** (2000), 651–669, [[arXiv: hep-th/9907079v4](#)]. 68, 77, 78, 105
- [65] MUCK, W. “*Studies on the AdS/CFT Correspondence*”. Tese de Doutorado. Martin-Luther-Universitat Halle-Wittenberg, Alemanha. (1999). 70, 71, 77, 87
- [66] MUCK, W., AND VISWANATHAN, K. “*Conformal Field Theory Correlators from Classical Scalar Field Theory on AdS_{d+1}* ”. *Phys. Rev.* **D58** (1998), [[arXiv: hep-th/9804035v4](#)]. 77
- [67] NEPOMECHIE, R. I. “*Magnetic Monopoles from Antisymmetric Tensor Gauge Fields*”. *Phys. Rev.* **D31** (1985), 1921. 47
- [68] PENROSE, R., AND RINDLER, W. “*Spinors and Space-Time: Spinor and Twistor Methods in Space-Time Geometry*”, reprinted ed., vol. 2. 1988. 96
- [69] PETERSEN, J. L. “*Introduction to the Maldacena Conjecture on AdS/CFT*”. *Int. J. Mod. Phys.* **A14** (1999), 3597–3672, [[arXiv: hep-th/9902131v2](#)]. 5, 25, 26, 28, 43, 46, 47, 48, 54, 55, 57, 67, 83, 94, 102
- [70] POLCHINSKI, J. “*Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges*”. *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995), [[arXiv: hep-th/9510017v3](#)]. 52, 55, 57
- [71] POLCHINSKI, J. “*String Theory*”, 6 ed., vol. 1 e 2. Cambridge University Press, 2005. 1, 45, 46, 63, 100
- [72] POLCHINSKI, J. “*Introduction to Gauge/Gravity Duality*”. TASI Lectures (2010), [[arXiv: hep-th/1010.6134v1](#)]. 5, 55, 57, 62
- [73] POLCHINSKI, J., AND STRASSLER, M. J. “*Hard Scattering and Gauge/String Duality*”. *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002), [[arXiv: hep-th/0109174v1](#)]. 91

- [74] POLCHINSKI, J., AND STRASSLER, M. J. “Deep Inelastic Scattering and Gauge/String Duality”. *JHEP* **05** (2003). 91
- [75] POLISHCHUK, A. “Massive Symmetric Tensor Field on AdS”. *JHEP* **9907** (1999), [arXiv: hep-th/9905048v4]. 77
- [76] POLYAKOV, A. M. “Conformal Symmetry of Critical Fluctuations”. *JETP Lett.* **12**, 381 (1970). 32
- [77] RAMALLO, A. V. “Introduction to the AdS/CFT correspondence”. [arXiv: hep-th/1310.4319v3]. Lectures at the third IDPASC school (2013). 5, 10, 12, 17, 19, 22, 52, 53, 54, 58, 67, 73, 86
- [78] RASHKOV, R. C. “Note on the Boundary Terms in AdS/CFT Correspondence for Rarita-Schwinger Field”. *Mod. Phys. Lett.* **A14** (1999), 1783–1796, [arXiv: hep-th/9904098v4]. 77
- [79] SACHDEV, S. “Condensed matter and AdS/CFT”. Lectures at the 5th Aegean summer school (2010), [arXiv: hep-th/1002.2947v1]. 91
- [80] SACHDEV, S. “Strange Metals and the AdS/CFT Correspondence”. *J. Stat. Mech.* **1011** (2010), [arXiv: hep-th/1010.0682v3]. 91
- [81] SACHDEV, S. “A model of a Fermi Liquid Using Gauge-Gravity Duality”. *Phys. Rev.* **D84** (2011), [arXiv: hep-th/1107.5321v2]. 91
- [82] SACHDEV, S. “What Can Gauge-Gravity Duality Teach us About Condensed Matter Physics?”. *Annual Review of Condensed Matter Physics* **3** (2012), [arXiv: hep-th/1108.1197v4]. 91
- [83] SCHWARTZ, M. D. “Quantum Field Theory and the Standard Model”, 1 ed. Cambridge University Press, 2014. 29

- [84] SCHWARZ, J. H. “*Lectures on Superstring and M Theory Dualities*”. Lectures given at the ICTP Spring School (March 1996) and the TASI Summer School (June 1996), [[arXiv: hep-th/9607201v2](#)]. 49
- [85] SEIBERG, N., AND WITTEN, E. “*Electric-Magnetic Duality, Monopole Condensation, And Confinement In $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*”. *Nucl. Phys.* **B426** (1994), [[arXiv: hep-th/9407087v1](#)]. 4
- [86] SKENDERIS, K. “*Lecture Notes on Holographic Renormalization*”. *Class. Quant. Grav.* **19** (2002), 5849–5876, [[arXiv: hep-th/0209067v2](#)]. 71
- [87] STELLE, K. S. “*BPS Branes in Supergravity*”. Lectures given at the ICTP Summer School (1996/1997), [[arXiv: hep-th/9803116v3](#)]. 47, 48, 49, 50, 57
- [88] SUSSKIND, L. “*The World As A Hologram*”. *J. Math. Phys.* **36** (1995), 6377–6396, [[arXiv: hep-th/9409089v2](#)]. 3
- [89] SUSSKIND, L., AND WITTEN, E. “*The holographic bound in anti-de Sitter space*”. [[arXiv: hep-th/9805114](#)]. 13
- [90] ’T HOOFT, G. “*Dimensional Reduction In Quantum Gravity*”. [[arXiv: gr-qc/9310026](#)]. 3
- [91] ’T HOOFT, G. “*A Planar Diagram Theory for Strong Interactions*”. *Nucl. Phys.* **B72**, 461 (1974). 3, 17
- [92] TEITELBOIM, C. “*Monopoles of Higher Rank*”. *Phys. Lett.* **B167** (1986), 69–72. 47
- [93] VOLOVICH, A. “*Rarita-Schwinger Field in the AdS/CFT Correspondence*”. *JHEP* **9809** (1998), [[arXiv: hep-th/9809009v1](#)]. 77

-
- [94] WALD, R. M. “*General Relativity*”, 1 ed. The University of Chicago Press, 1984. 15, 26, 92, 93, 96, 98
- [95] WEINBERG, S., AND WITTEN, E. “*Limits On Massless Particles*”. *Phys. Lett.* **B96**, 59 (1980). 8
- [96] WILSON, K. G. “*Confinement of Quarks*”. *Phys. Rev.* **D10** (1974), 2445–2459. 3
- [97] WITTEN, E. “*Quantum Field Theory and the Jones Polynomial*”. *Commun. Math. Phys.* **121**, 351 (1989). 4
- [98] WITTEN, E. “*Bound States Of Strings And p-Branes*”. *Nucl. Phys.* **B460** (1995), [\[arXiv: hep-th/9510135v2\]](#). 54, 55
- [99] WITTEN, E. “*Anti-de-Sitter Space and Holography*”. *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2** (1998), 253–291, [\[arXiv: hep-th/9802150v2\]](#). 3, 26, 28, 29, 43, 67, 68, 69, 70, 77, 83
- [100] WITTEN, E. “*Anti-de Sitter Space, Thermal Phase Transition, And Confinement in Gauge Theories*”. *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998), 505–532, [\[arXiv: hep-th/9803131v2\]](#). 91
- [101] ZHAO, P. “*Black Hole in Anti-de Sitter Spacetime*”. Essay presented in the Lent term Part III seminar series. Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Cambridge. 26, 95
- [102] ZWIEBACH, B. “*A First Course in String Theory*”, 2 ed. Cambridge University Press, 2009. 2, 16, 26, 54, 63