



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA

Massas e Constantes de Decaimento em Modelos Holográficos

Flaviana Siller Thebaldi

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

**Orientador: Nelson Ricardo de Freitas
Braga**

Rio de Janeiro

Março de 2018

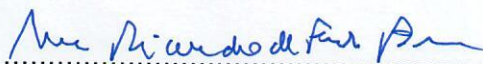
Massas e constantes de decaimento em modelos holográficos

Flavianna Siller Thebaldi

Nelson Ricardo de Freitas Braga

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

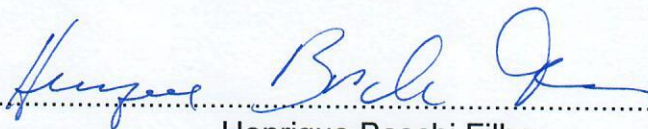
Aprovada por:



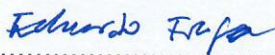
.....
Nelson Ricardo de Freitas Braga
(Presidente e Orientador)



.....
Marcelo Santos Guimarães



.....
Henrique Boschi Filho



.....
Eduardo Souza Fraga

T375 Thebaldi, Flaviana Siller

Massas e Constantes de Decaimento em Modelos Holográficos/Flaviana Siller Thebaldi - Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2018. xiv, 74f.

Orientador: Nelson Ricardo de Freitas Braga

Dissertação (mestrado) - UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-graduação em Física, 2018.

Referências Bibliográficas: f. 61-66.

1. Correspondência AdS/CFT. 2. Teoria Quântica de Campos. 3. Modelos Holográficos. I. Braga, Nelson Ricardo de Freitas. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Física. III. Massas e Constantes de Decaimento em Modelos Holográficos.

Resumo

Massas e Constantes de Decaimento em Modelos Holográficos

Flaviana Siller Thebaldi

Orientador: Nelson Ricardo de Freitas Braga

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Nesta dissertação serão apresentados modelos holográficos baseados na correspondência *AdS/CFT*. Estes têm por finalidade tratar as interações fortes no regime de baixas energias, onde a Cromodinâmica Quântica (QCD) é intratável pelo método perturbativo. Na sua formulação original a correspondência *AdS/CFT* estabelece uma dualidade entre uma Teoria de Calibre Conforme (CFT) em quatro dimensões e uma Teoria de Cordas em um espaço curvo de dez dimensões. Os modelos holográficos apresentados são uma aproximação da correspondência que viabilizam o cálculo de massas e constantes de decaimento para mésons vetoriais. Os espectros obtidos em cada modelo serão comparados com o espectro obtido experimentalmente.

Palavras-chave: Correspondência *AdS/CFT*, Teoria Quântica de Campos, Modelos Holográficos.

Abstract

Masses and Decay Constants in Holographic Models

Flaviana Siller Thebaldi

Orientador: Nelson Ricardo de Freitas Braga

Abstract da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

In this dissertation, holographic models based on the *AdS/CFT* correspondence will be presented. It will be done to deal with strong interactions in low energy regime. In this case the Quantum Chromodynamics fails to deal with it by perturbative way. In the original formulation of the correspondence a duality is established between a Conformal Field Theory (CFT) in four dimensions and a String Theory in a ten dimensioned curved space. The holographic models presented are approximations of the correspondence that enables the calculus of masses and decay constants for vector mesons. The spectrum obtained with the model will be compared with the experimental data.

Keywords: *AdS/CFT* correspondence, Quantum Field Theory, Holographic models.

Agradecimentos

Em poucas palavras espero expressar minha gratidão a todos que colaboraram de alguma forma com minha formação acadêmica e pessoal.

Agradeço a todos os professores que fizeram parte da minha caminhada acadêmica. Em especial agradeço ao Wesley Spalenza e ao Fernando Leal do IFES. Wesley que do ensino médio a graduação foi um grande motivador para que eu tomasse as decisões que tomei, inclusive a de vir ao Rio de Janeiro. E Fernando, que apesar de ter conhecido no último ano de graduação, foi também meu orientador e, mesmo em tão pouco tempo, não mediu esforços para me incentivar a sempre ir adiante. Agradeço também ao professor Raimundo da UFRJ. Sua rigidez e seriedade não sobrepujam sua paciência ao ensinar. E por fim agradeço principalmente ao meu orientador Nelson que durante estes dois anos exercitou sua paciência comigo. Sem as reuniões, aulas e diálogos este trabalho não teria se concretizado. Graças a sua experiência e didática aprendi um pouco mais a como ser uma pesquisadora futuramente.

Sou grata também aos amigos que fiz na UFRJ, pois foram eles os maiores responsáveis por meus momentos de desconstrução. Logo quando cheguei conheci a Lorryne e o Pedro que foram os amigos mais presentes neste período. A lorryne sempre pensando em como dominar o mundo com suas bactérias e o Pedro sempre tagarelando sobre qualquer coisa. Eles foram e são muito importantes para mim. Sempre lembrarei com muito carinho de nossos jantares e risadas no RU. Também fiz alguns poucos amigos no IF: John, Gabriel, Jilder, Charlie, entre outros. Garanto que os passeios de bicicleta, conversas de corredor, almoços e jantares serão sempre recordados. Ainda agradeço a Maria Clara com quem dividi não somente um quarto, mas pelo menos um ano da minha vida. Foi minha

companheira de academia, de ônibus, de terço, de compromissos da igreja, de mercado, de corrida (por um tempo haha), e do que mais pudéssomos fazer juntas.

Agradeço à meus pais, pois o amor e dedicação que têm comigo são refletidos nos ensinamentos e correções que me deram durante toda minha vida. Desde o início de meu interesse pela ciência, foram eles quem sustentaram e apoiaram minhas pequenas chances de ser o que sou hoje acadêmicamente. Embora a maior parte do tempo, neste período do mestrado, estivemos distantes fisicamente, nunca faltaram conversas aleatórias que rendiam boas risadas e palavras de perseverança. Agradeço ao Lucas, meu namorado, que se fez presente como pôde todos os dias, fossem eles bons ou ruins. Agradeço também a Maninha e França pelo cuidado que tiveram comigo e por todo o suporte que me deram enquanto estive longe de casa.

Sou grata também ao apoio financeiro da CNPq. Sem este auxílio a permanência na UFRJ nestes últimos dois anos seria inviável.

Por fim agradeço a Deus que providenciou tudo com muito cuidado.

Conteúdo

Sumário	vii
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	x
1 Introdução	1
2 Modelo de Parede Macia	14
2.1 Motivação	14
2.2 Desenvolvimento do modelo <i>de parede macia</i>	17
3 Constante de decaimento para hádrons	23
3.1 Alguns aspectos da QCD	24
3.2 Geração de pólos por hádrons em TQC	25
3.3 Funções de dois pontos para mésons vetoriais e a constante de decaimento	30
3.4 Prescrição para cálculo da constante de decaimento	33
4 Constante de decaimento para mésons vetoriais no modelo de parede macia	35
4.1 Função de dois pontos	35
4.2 Função de dois pontos no espaço de Fourier e Ação <i>on shell</i>	37
4.3 Constante de decaimento para mésons vetoriais	41

5	Modelo de parede macia modificado com corte UV	48
5.1	Validade do modelo	48
5.2	Ação <i>on shell</i>	49
5.3	Espectro e constantes de decaimento para mésons vetoriais	50
6	Massas e Constantes de decaimento no modelo de parede macia modificado com corte UV	53
6.1	Dados Experimentais e Erro Quadrático Médio	54
6.2	Resultados do Artigo	55
6.3	Valores Testados para os parâmetros k e $1/z_0$	57
7	Conclusão	59
	Referências Bibliográficas	62
A	Equação de Sturm-Liouville e suas Propriedades	68
B	Construção da função de Green em um problema de Sturm-Liouville	71
C	Representação de Källén-Lehmann	74

Lista de Figuras

- 1.1 Processo de colisão entre um elétron energético com momento inicial k e um próton em repouso, com troca de energia pelo fóton com momento q . O espalhamento profundamente inelástico é caracterizado quando a quantidade de energia trocada no processo é muito grande. 5
- 1.2 Na ilustração (a) vê-se a interação entre um par de quark e antiquark. Esta interação ocorre por meio da troca de glúons representados pelo “tubinho” azul. Aumentando a distância entre o par a interação fica cada vez mais forte como é ilustrado em (b). Quanto mais se afastam o quark e o antiquark, maior é a energia necessária para separá-los. Desta forma, na ilustração (c), com esta grande quantidade de energia há a criação de outro par de quark e antiquark. Logo têm-se agora dois pares de quark e antiquark, mostrado em (d). 10
- 2.1 Representação simples do modelo de parede dura. No ponto z_0 da coordenada radial do espaço de Anti de Sitter é imposto um corte para quebrar a invariância conforme do espaço dual. 15
- 6.1 Raízes da função de Tricomi para o charmônio com parâmetros $k_c = 1.2$ GeV e $1/z_0 = 12.5$ GeV. 55
- 6.2 Raízes da função de Tricomi para o botomônio com parâmetros $k_b = 3.4$ GeV e $1/z_0 = 12.5$ GeV. 56

Lista de Tabelas

1.1	No quadro de férmions têm-se os seis sabores de quark (down, up, strange, charm, bottom e top) e os léptons, englobando o elétron, o múon, o tau e seus respectivos neutrinos. Já no quadro dos bósons estão bóson escalar de Higgs e todas as partículas mediadoras das interações fundamentais, que são bósons de calibre com spin não nulo.	3
6.1	Valores experimentais de massa e constante de decaimento do Charmônio.	54
6.2	Valores experimentais de massa e constante de decaimento do botomônio. .	54
6.3	Valores experimentais de massa e constante de decaimento do Charmônio.	56
6.4	Valores experimentais de massa e constante de decaimento do botomônio. .	56
6.5	Melhores valores dos parâmetros k_c e $1/z_{0c}$ com respectivos erros.	57
6.6	Melhores valores dos parâmetros k_b e $1/z_{0b}$ com respectivos erros.	57
6.7	Melhores valores dos parâmetros k_c , k_b , $1/z_{0c}$ e $1/z_{0b}$	58
6.8	Massas e constantes de decaimento para o charmônio obtidos a partir do modelo com parâmetros ajustados.	58
6.9	Massas e constantes de decaimento para o botomônio obtidos a partir do modelo com parâmetros ajustados.	58

Capítulo 1

Introdução

Em física de partículas os fenômenos naturais são descritos pelas chamadas partículas elementares e por suas interações. O chamado Modelo Padrão [1] provê uma visão geral de como tais partículas interagem entre si formando toda a matéria conhecida. Para compreender como as partículas elementares se situam na estrutura da matéria, pode-se partir de um átomo. Dentro dele há elétrons que orbitam um núcleo, o qual é composto de prótons e de nêutrons. O elétron é umas das partículas fundamentais e poderia-se supor que o próton e o nêutron também o seriam. Porém estes são constituídos de quarks, os quais nunca foram detectados experimentalmente como partículas livres, mas somente em estados ligados. Por exemplo, as estruturas uud e udd são combinações de quarks u (up) e d ($dowm$) formando o próton e o nêutron, respectivamente. Além dos quarks u e d , há outras variedades destas partículas na natureza que são diferenciadas pela propriedade chamada de sabor (*flavor* do inglês). Sendo assim, os quarks são classificados em seis sabores: u (up) e d ($dowm$), já mencionados, s (*strange*), c (*charm*), b (*bottom*) e t (*top*). Estes possuem diferentes combinações de valores de carga elétrica e massa.

O elétron mantém-se ligado ao núcleo pela interação eletromagnética, muito bem compreendida pela Eletrodinâmica Quântica (*Quantum Electrodynamics* do inglês - QED) [2]. Já os quarks, embora interajam eletromagneticamente, permanecem unidos formando estados ligados devido à interação forte. Além disso, interagem fracamente, o que lhes concerne a habilidade de mudar o seu sabor. Esta mudança leva, por exemplo, ao de-

caimento β (beta), que consiste em um nêutron transformando-se em um próton com criação de um elétron e um anti-neutrino $\bar{\nu}_e$ [3]. Outro exemplo da interação fraca entre quarks é a fusão nuclear, onde é necessário que um próton se transforme em um nêutron criando um pósitron e^+ e um neutrino ν_e como parte do processo [4]. Nos dois casos a liberação do elétron e do pósitron energético é chamada de radiação beta e o neutrino criado classifica-se como uma partícula fundamental.

Além destas interações fundamentais da natureza tem-se ainda a interação gravitacional, que apesar de ser a mais fraca, é a mais perceptível macroscopicamente. A mesma é sempre atrativa e ocorre entre qualquer par de objetos que possuem massa e/ou energia. Faz-se muito significativa entre objetos de grandes massas, como por exemplo o planeta Terra e seu satélite natural a Lua, ou torna-se desprezível para partículas com massas bem pequenas quando as mesmas estão sujeitas a outras interações. Os quarks por exemplo, possuem massa, mas a interação entre eles é dominada pelas interações forte, eletromagnética e fraca. Da mesma forma o elétron está sujeito predominantemente às interações eletromagnética e fraca, e por fim os neutrinos interagem principalmente pela força fraca. É importante ressaltar que a gravitação não é contemplada no modelo padrão.

As partículas mediadoras das interações fundamentais também são classificadas como partículas elementares. A interação fraca é mediada pelos bósons W^+ , W^- e Z , já o gráviton G é o mediador da interação gravitacional, enquanto a interação forte ocorre pela troca de glúons g e a interação eletromagnética pela troca de fótons γ . Outras partículas elementares conhecidas são o múon (μ) e o tau (τ) [1], que são versões mais pesadas do elétron. Possuem mesma carga e spin, mas suas massas são diferentes, equivalendo a ≈ 200 vezes a mais para o múon e ≈ 3500 vezes a mais para o tau. Também deve-se acrescentar ao quadro de partículas elementares o bóson de Higgs. De todas as partículas fundamentais citadas até agora, o bóson de Higgs é a única com spin igual a zero, ou seja, é um escalar. Esta partícula foi descoberta pelos experimentos ATLAS [5, 6] e CMS [7, 8] no grande colisor de partículas (do inglês *Large Hadron Collider* - LHC) em

2012. O bóson de Higgs é responsável pelo mecanismo de geração de massa das outras partículas elementares. Os campos associados às outras partículas elementares possuem valor esperado no vácuo igual a zero, e diferentemente delas o bóson de Higgs possui valor esperado no vácuo não nulo. Em Teoria Quântica de Campos (TQC) pode-se imaginar o bóson de Higgs como uma excitação do campo de Higgs. Quando este campo interage com o de outras partículas elementares ocorre a transferência de energia em forma de massa. A quantidade de massa transferida depende da intensidade da interação.

Com exceção das partículas mediadoras e do bóson de Higgs, todas as outras partículas fundamentais são férmions, tendo a dinâmica descrita pela equação de Dirac [9]

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0. \quad (1.1)$$

Existem ainda na natureza as anti-partículas dos férmions. Elas possuem mesmo valor de massa e spin que suas respectivas partículas, mas as cargas são inversas. Na tabela 1.1 estão todas as partículas elementares organizadas em bósons e férmions.

Férmions			Bósons de Calibre	Bóson Escalar
Quarks	d	s	b	g γ W^\pm e Z G H
	u	c	t	
Léptons	e^-	μ^-	τ^-	
	ν_e	ν_μ	ν_τ	

Tabela 1.1: No quadro de férmions têm-se os seis sabores de quark (down, up, strange, charm, bottom e top) e os léptons, englobando o elétron, o múon, o tau e seus respectivos neutrinos. Já no quadro dos bósons estão bóson escalar de Higgs e todas as partículas mediadoras das interações fundamentais, que são bósons de calibre com spin não nulo.

Dentre estas partículas os quarks são as que possuem, além de spin $s = \frac{1}{2}$, carga elétrica fracionária e “carga de cor”. Esta última foi proposta por William Bardeen, Murray Gell-Mann e Harald Fritzsch em 1971 [10, 11] devido à descoberta do bárion Δ^{++} , obtido a partir de colisões de píons e nucleons. Este bárion possui três quarks de valência, momento total $J = \frac{3}{2}$, momento angular nulo $L = 0$ e carga elétrica $2e^+$. Como esta partícula está sujeita a estatística de Fermi-Dirac espera-se que no estado fundamental

seus constituintes possam ser diferenciáveis por seus números quânticos. Na época em que este experimento foi realizado, os números quânticos conhecidos eram limitados e como os quarks são férmions, os spins podem assumir valores $s = \pm\frac{1}{2}$. Dado o momento angular total os três quarks necessariamente possuíam spin alinhado para cima, $|u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle$. Mas no estado fundamental as partículas sujeitas a estatística de Fermi-Dirac devem se diferenciar por alguma propriedade. Foi então que para solucionar este problema atribuiu-se aos quarks uma “carga de cor” tornando-os distinguíveis no estado fundamental. Com a devida normalização Δ^{++} é representado como [12]

$$|\Delta^{++}, J = 3/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}|u_\alpha^\uparrow, u_\beta^\uparrow, u_\gamma^\uparrow\rangle, \quad (1.2)$$

onde α, β e γ são índices de cores. A combinação de quarks, antiquarks e glúons constitui partículas denominadas hádrons. Estas são caracterizadas por isospin I , número bariônico B , estranheza S e hipercarga Q [1, 13]. De acordo com o que é observado na natureza os hádrons são divididos em mésons e bárions, conforme os quarks, antiquarks e glúons se arranjam. Combinações que resultem em número bariônico zero são denominadas mésons, e combinações que resultem em número bariônico +1 são chamadas de bárions. Os quarks e anti quarks possuem número bariônico $1/3$ e $-1/3$, respectivamente, enquanto que para os glúons este valor é nulo. Portanto combinações de pares de quark e antiquark ($q\bar{q}$) caracterizam mésons e construções que possuem três quarks (qqq) de valência são denominadas bárions. Além dessas combinações são previstos teoricamente os *tetraquarks*, que são construções de dois quarks e dois antiquarks ($qq\bar{q}\bar{q}$) entrando na classificação de méson. Também são previstos os *pentaquarks* que possuem quatro quarks e um antiquark ($qqqq\bar{q}$) de valência sendo classificados como um bárion. Estes últimos já foram observados experimentalmente em 2015 [14] e ainda há buscas pelos tetraquarks. Existem também outras combinações que se classificam como mésons, como por exemplo partículas híbridas, que possuem um par quark e antiquark de valência e um ou mais glúons, e o glueballs, os quais constituem estados ligados de glúons e não possuem quarks ou antiquarks de

valência.

O modelo que dita as possíveis configurações de agrupamento de quarks foi proposto em 1964 independentemente por Murray Gell-Mann [15] através de um artigo publicado no *Physics Letters* e por George Zweig, que na época era um estudante de pós-graduação visitando o CERN e apenas escreveu um *preprint* [16]. O nome *quark* dado por Gell-Mann veio do trecho “*Three quarks for Muster mark.*” do livro *Finnegans wake* de James Joyce, já Zweig atribui o nome *aces* a estas mesmas quantidades. É importante ressaltar que por este modelo não são contemplados todos os hádrons conhecidos, como por exemplo os glueballs e mésons híbridos.

O primeiro experimento que evidenciou a existência de quarks foi o processo de espalhamento profundamente inelástico, o qual investiga a estrutura de um próton. Este processo pode ser descrito pelo diagrama de Feynman na figura (1.1).

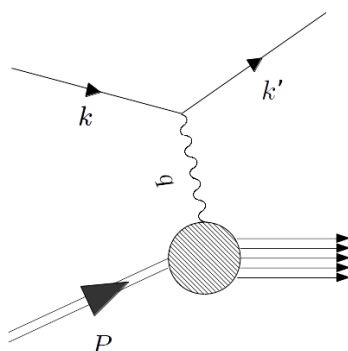


Figura 1.1: Processo de colisão entre um elétron energético com momento inicial k e um próton em repouso, com troca de energia pelo fóton com momento q . O espalhamento profundamente inelástico é caracterizado quando a quantidade de energia trocada no processo é muito grande.

A interação entre o elétron e o próton ocorre por meio do fóton representado pela linha interna do gráfico com momento q . Inicialmente o elétron com momento k colide com o próton de momento P . Após a colisão o elétron está com momento k' e transfere uma alta quantidade de energia para o próton, que acaba sendo espalhado viabilizando inúmeras possibilidades ao seu estado final. O círculo hachurado no vértice do próton representa justamente o desconhecimento de sua interação com o fóton, pois o próton é uma estrutura

formada por três quarks de valência (uud) e pode conter ainda um número indefinido de pares de quark e antiquarks e glúons no chamado mar de quarks [17]. As linhas que saem deste círculo representam os possíveis hádrons oriundos deste espalhamento, que dependerão da estrutura do próton, a qual está diretamente ligada à energia transferida no processo. Para o cálculo da amplitude de espalhamento deste processo é feita a média dos spins iniciais e a soma dos spins finais das partículas envolvidas. Desta forma a amplitude de espalhamento ao quadrado é dada por:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \propto \frac{1}{q^4} L_{\text{elétron}}^{\mu\nu} K_{\mu\nu}(X). \quad (1.3)$$

Os termos $L_{\text{elétron}}^{\mu\nu}$ e $K_{\mu\nu}(X)$ estão relacionados com os estados inicial e final do elétron e do próton, respectivamente. A variável X representa o estado final do próton, que pode se fragmentar em vários subprodutos. No caso de experimentos em que X não é determinado, o cálculo da seção de choque deve incluir todos os estados finais acessíveis e por isso é chamada de seção de choque inclusiva. Sendo assim, a seção de choque diferencial para o processo de colisão entre um elétron e um próton com troca de momento q , é escrita como [2]

$$\frac{d\sigma}{dE'd\omega} = \left(\frac{\alpha\hbar}{2E \sin^2(\theta/2)} \right)^2 [2W_1 \sin^2(\theta/2) + W_2 \cos^2(\theta/2)], \quad (1.4)$$

onde inicialmente o elétron possui momento $k = (E/c, \vec{p}_i)$ e o próton possui massa M e está em repouso. θ é o ângulo de espalhamento do elétron e $W_{1,2}$ são os fatores de forma dependentes apenas de duas variáveis independentes associadas ao módulo dos momentos do fóton q e do próton P . Note que $W_{\mu\nu}$ está relacionado à $K_{\mu\nu}(X)$ pela expressão

$$W_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4\pi M} \sum_X \int \cdots \int K_{\mu\nu}(X) \left(\frac{cd^3\mathbf{p}_4}{(pi)^3 2E_4} \right) \cdots \left(\frac{cd^3\mathbf{p}_n}{(pi)^3 2E_n} \right) \times (2\pi)^4 \delta(q+p-p_4-\cdots-p_n),$$

a qual pode ser escrita em termos dos fatores de forma W_1 e W_2

$$W_{\mu\nu} = W_1 \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{W_2}{(Mc)^2} \left[p^\mu - \left(\frac{q \cdot p}{q^2} \right) q^\mu \right] \left[p^\nu - \left(\frac{q \cdot p}{q^2} \right) q^\nu \right].$$

Ao considerar o caso de um processo elástico onde o estado final do próton é o próprio

próton, a seção de choque diferencial dada para qualquer valor de energia E' é [2]

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \left(\frac{\alpha\hbar}{4ME \sin^2(\theta/2)} \right)^2 \frac{E'}{E} [2K_1 \sin^2(\theta/2) + K_2 \cos^2(\theta/2)], \quad (1.5)$$

que também é conhecida como fórmula de Rosenbluth. Os termos K_1 e K_2 são funções desconhecidas que dependem do momento do fóton ao quadrado q^2 , e θ é o ângulo de desvio do elétron após o espalhamento.

As funções $W_{1,2}$ estão ligadas às estruturas envolvidas no espalhamento e devem depender de duas variáveis independentes, as quais por conveniência são escolhidas como q^2 e $x \equiv -\frac{q^2}{2q \cdot P}$. Ao determinar o estado final do próton após a colisão num processo de espalhamento profundamente inelástico as funções estruturais $W_{1,2}$ possuem valores fixos bem determinados. No caso em que tais funções se relacionam à $K_{1,2}$ [2] pela expressão

$$W_{1,2}(q^2, x) = -\frac{K_{1,2}}{2Mq^2} \delta(x - 1), \quad (1.6)$$

a colisão é elástica. Assim este é um caso especial da colisão profundamente inelástica. Em vista disso é possível partir da expressão (1.4) e chegar a fórmula de Rosenbluth (1.5).

Bjorken previu que em altas energias a dependência dessas funções estruturais associadas exclusivamente a q^2 desaparecem, resultando numa dependência única em x . Isto significa que o momento q trocado na colisão, neste limite de energia, é muito grande no processo de espalhamento profundamente inelástico. Logo as quantidades $-q^2$ e $q \cdot P$ também são muito grandes, porém a razão entre elas, que é proporcional a x , não. Este comportamento é conhecido como “*scaling* de Bjorken” [18, 19] e x é o parâmetro de Bjorken.

Fisicamente interpreta-se que as propriedades dos hádrons, neste caso o próton, examinados em energias muito altas, não são determinados por valores absolutos de energia, mas por quantidades cinemáticas adimensionais. Desta forma quando o elétron sonda o próton no limite de altas energias obtém-se uma resolução espacial melhorada da estrutura do próton e como o *scaling* implica numa independência de escala, é esperado uma

composição tipo ponto. Então Bjorken e Feynman sugeriram que no interior do próton existem objetos pontuais, os quais foram chamados de partons. Posteriormente, através de medidas de taxas do espalhamento transversal e longitudinal, veio a ser confirmado que os partons são na verdade, quarks. Logo, neste regime de altas energias, a interação do fóton ocorre essencialmente com um quark livre.

De acordo com Chris Llewellyn-Smith [20] a quantidade de momento do próton atribuída aos partons (quarks) poderia ser medida e posteriormente experimentos mostraram que esta fração correspondia a apenas uma parte do momento total do próton. Logo este modelo de partons poderia estar errado ou, o que de fato foi aceito, o restante do momento do próton poderia ser atribuído a partículas sem cargas elétricas, que neste caso eram os glúons. E esta foi a primeira evidência circunstancial da existência dos glúons.

Os glúons são partículas não massivas descritas por uma teoria de campos de calibre não-Abeliana, porém na década de 60, teorias deste tipo não eram tratáveis já que não se sabia como renormalizá-las. Foi Gerardus 't Hooft junto com Martinus Veltman que propuseram em 1971 a renormalização de teorias deste tipo [21]. Enquanto Giorgio Parisi [46] percebeu que para construir uma teoria de campo para as interações fortes é necessário levar em conta o escalamento de Bjorken assumindo que em altas energias os quarks não interagem fortemente uns com os outros e portanto estão livres. Isto significa que a constante de acoplamento da teoria das interações fortes deve diminuir à medida que a energia aumenta. Quando a constante de acoplamento de uma teoria diminui a medida que a energia aumenta significa que as partículas se tornam fracamente ligadas a medida que a distância entre elas diminui. Esta propriedade recebe o nome de *liberdade assintótica*. O primeiro trabalho [22] que apresenta uma teoria com esta propriedade foi exposto em uma conferência em Marseille por Kurt Symanzik [15].

Devido a constatação de Giorgio Parisi pode-se dizer então, que a teoria das interações fortes deve possuir esta propriedade. Porém isto ainda não havia sido demonstrado. Foram David Politzer, David Gross e Frank Wilczek [23, 24] os responsáveis por esta demons-

tração. Eles propuseram que as interações fortes fossem descritas pelo grupo de calibre SU(3) e que esta teoria possui a propriedade de liberdade assintótica. Anteriormente, em 1972, Gell-Mann e Harald Fritsch propuseram o nome Cromodinâmica Quântica (*Quantum Chromodynamics* do inglês - QCD) [11] a teoria das interações fortes. A liberdade assintótica na QCD provém da interação entre glúons, os quais, como já dito, são as partículas mediadoras da interação entre os quarks e que também interagem entre si.

Quando a constante de acoplamento é pequena pode-se tratar a QCD pelo método perturbativo e obter bons resultados. Porém em baixas energias a constante de acoplamento aumenta, e por isso neste regime é difícil obter informações de forma analítica da QCD pelo método perturbativo. Alternativamente esta análise pode ser desenvolvida pela QCD na rede ou do inglês *Lattice QCD* [25] ou por modelos efetivos como por exemplo o modelo D3/D7 [26].

Uma ilustração qualitativa da interação forte é feita a partir de um estado ligado de um par quark e antiquark no estado fundamental, ou seja, um méson. Enquanto o quark e o antiquark estão bem próximos a interação entre eles tem a forma de um potencial Coulombiano $\propto \frac{1}{r}$, e a medida que a distância entre eles aumenta as linhas de campo da interação gluônica ficam mais próximas, isto é, o potencial aumenta linearmente com a distância $\propto r$. Desta forma para separá-los seria necessário uma energia infinita. Logo o par não pode ser separado, caracterizando o confinamento, que é outra característica importante da QCD. Durante este processo também é possível que haja criação de outro par de quark e antiquark permanecendo então dois mésons e ainda havendo o confinamento. Este comportamento do potencial das interações fortes é identificado como potencial de Cornell [27]. Veja figura 1.2

Outro caminho para obter informações de uma teoria fortemente acoplada é pelo seu mapeamento em uma teoria gravitacional com constante de acoplamento pequena quando existe uma dualidade entre elas. Teorias que são duais estão relacionadas a nível fundamental, e embora aparentemente diferentes, são iguais do ponto de vista matemático

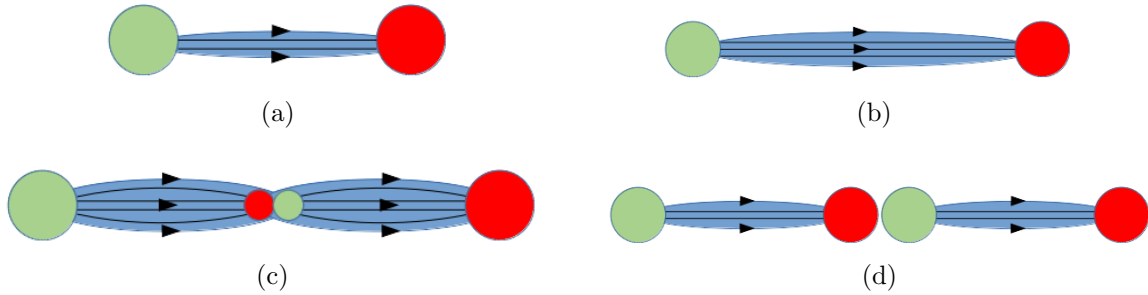


Figura 1.2: Na ilustração (a) vê-se a interação entre um par de quark e antiquark. Esta interação ocorre por meio da troca de glúons representados pelo “tubinho” azul. Aumentando a distância entre o par a interação fica cada vez mais forte como é ilustrado em (b). Quanto mais se afastam o quark e o antiquark, maior é a energia necessária para separá-los. Desta forma, na ilustração (c), com esta grande quantidade de energia há a criação de outro par de quark e antiquark. Logo têm-se agora dois pares de quark e antiquark, mostrado em (d).

e apresentam a mesma descrição física sob perspectivas diferentes. A aparente diferença entre elas vem da formulação física, por exemplo, suas lagrangeanas ou o espaço em que são definidas podem ser diferentes.

Geralmente estas dualidades ocorrem entre teorias com diferentes regimes de acoplamento. No regime em que o acoplamento de um lado da correspondência é fraco, no outro este acoplamento é forte e vice-versa.

Um exemplo é a dualidade entre uma teoria Super Yang-Mills em quatro dimensões $\mathcal{N} = 4$ SYM com uma teoria de supercordas definida em dez dimensões pelo produto direto dos espaços $AdS_5 \times S^5$. O espaço AdS_5 é o espaço de anti de Sitter (AdS) em cinco dimensões e S^5 é uma hipersfera de cinco dimensões, a qual está relacionada à estrutura supersimétrica da teoria. A teoria de supercordas é tomada no limite de supergravidade. Isto significa que quando a escala de energia da teoria é menor que a escala de excitação das cordas, tem-se uma teoria gravitacional supersimétrica. Portanto a dualidade se dá entre teorias de gravidade no espaço de anti de Sitter com uma teoria de campo invariante por transformações conformes no espaço chato. Esta dualidade foi encontrada por Maldacena e chamada de correspondência AdS/CFT [28].

Um importante aspecto a se constatar em uma dualidade são os grupos de simetrias

que as teorias estão sujeitas. No exemplo citado acima o grupo de isometria de S^5 é o grupo ortogonal especial que é aproximado ao grupo especial unitário $SO(6) \approx SU(4)$, o qual é o mesmo grupo de simetria-R da teoria $\mathcal{N} = 4$ SYM. Enquanto isso o grupo de isometria do espaço AdS é o grupo ortogonal especial $SO(4, 2)$. Este consiste em todas as rotações que não são impróprias, ou seja, são transformações lineares consistindo de uma combinação de uma rotação sobre um eixo e uma reflexão no plano perpendicular a este eixo. Uma teoria de campos conforme (do inglês *Conformal Field Theory* - CFT) em quatro dimensões possui este mesmo grupo de simetria. De modo mais amplo pode-se dizer que o grupo de isometria do espaço AdS_{d+1} é o $SO(d, 2)$. Este é o mesmo grupo de simetria de um espaço conforme em $(d-1, 1)$ dimensões. Naturalmente, por estas constatações, sugere-se que teorias gravitacionais no espaço de anti de Sitter são equivalentes a teorias de calibre na fronteira.

't Hooft em 1993 enunciou o princípio da holografia. Este princípio assegura que é possível descrever uma teoria quântica com gravitação em $D+1$ dimensões por meio de uma teoria quântica sem gravitação num espaço de D dimensões [29]. O mapeamento de teorias de calibre em termos de uma de uma teoria de supercordas no limite de supergravidade, ocorre entre espaços de diferentes dimensões. Portanto a correspondência AdS/CFT é uma realização do princípio holográfico.

A teoria de SYM possui grupo de calibre $SU(N)$ com constante de acoplamento g_{YM} , enquanto a teoria de supercordas com comprimento de corda $l_s = \sqrt{\alpha'}$ possui constante de acoplamento g_s em $AdS_5 \times S^5$ com raio de curvatura R . O mapeamento dos parâmetros livres do lado da teoria de campos conformes (g_{YM} e N) em termos dos parâmetros (g_s e $R/\sqrt{\alpha'}$) do lado da teoria de cordas é dado por [29]:

$$g_{YM}^2 = 2\pi g_s \quad \text{e} \quad 2g_{YM}^2 N = R^4/\alpha'^2. \quad (1.7)$$

Ainda pode-se definir o acoplamento de 't Hooft, $\lambda = g_{YM}^2 N$ [29, 30]. A relação entre λ e o raio de curvatura é dada por $R^4/\alpha'^2 = 2\lambda$ [29]. As relações entre os parâmetros

na equação (1.7) são exatas e valem para quaisquer valores de N e λ . Contudo, a correspondência *AdS/CFT* é tratável com maior facilidade quando está sujeita a uma das seguintes condições

1. o número de cores N da teoria de Super Yang Mills deve ser muito grande, enquanto o parâmetro λ de ser mantido fixo
2. o parâmetro de 't Hooft λ deve ser grande da mesma forma que o número de cores N

Pela condição 1 é garantido que a teoria de cordas seja perturbativa. Isto pode ser visto pelo mapa de parâmetros. Quando N é grande e λ é fixo é necessário que g_{YM} seja pequeno e conseqüentemente g_s também o será. É importante ressaltar que a constante de acoplamento efetiva da teoria *SYM* é dada pelo parâmetro de 't Hooft λ . A condição 2 implica que o parâmetro $\sqrt{\alpha'}/R \rightarrow 0$. Logo por esta aproximação vê-se que comprimento de corda é muito pequeno se comparado ao raio de curvatura.

Os limites tomados estabelecem uma dualidade fraca/forte no sentido de que o acoplamento forte da teoria *SYM* é mapeado no espaço $AdS_5 \times S^5$ fracamente curvo da teoria de supergravidade com acoplamento fraco. Estes limites foram sugeridos por 't Hooft em 1973. De modo geral pode-se dizer que o parâmetro N do grupo $SU(N)$ tende ao infinito possibilitando uma expansão da teoria em $1/N$. Esta é equivalente a uma expansão perturbativa em teorias de cordas livres, desde que $1/N \propto g_s$ para fixos valores de λ [31]. Devido ao limite de 't Hooft tomado, a correspondência *AdS/CFT* se torna mais facilmente tratável e não é diretamente utilizada para tratar a QCD, visto que a teoria definida na fronteira é uma teoria conforme de YM supersimétrica.

Portanto é necessário buscar alterações da correspondência de forma que a teoria definida na fronteira seja capaz de descrever as interações fortes. A princípio este problema pode ser enfrentado partindo de uma modificação espacial da teoria de supergravidade da correspondência *AdS/CFT*. Isto será feito com a finalidade de obter propriedades

das interações fortes no regime de baixas energias, como: explicar o confinamento e obter massas e constantes de decaimento de hádrons.

Capítulo 2

Modelo de Parede Macia

2.1 Motivação

A partir da correspondência *AdS/CFT* é possível, por um mapeamento de uma teoria de calibre em uma teoria de supergravidade, extrair informações da teoria de calibre com acoplamento forte. É importante ressaltar que a correspondência *AdS/CFT* conjecturada por Maldacena é exata. A teoria de cordas possui supersimetria e a teoria de calibre dual é conforme e supersimétrica. A QCD não é supersimétrica e nem conforme. Logo para se utilizar a correspondência é necessário uma aproximação, onde a supersimetria é desconsiderada e a invariância conforme é quebrada.

A supersimetria é representada pelo espaço compacto S^5 . Uma forma simples de procurar uma representação aproximada de uma teoria de calibre sem supersimetria é desconsiderar este espaço e usar apenas o espaço AdS_5 . Já a invariância conforme da teoria de calibre será quebrada pela modificação da geometria do espaço AdS . O efeito surtido na teoria de calibre pelas modificações no espaço de anti de Sitter apenas é possível devido a dualidade entre os dois espaços. Com esta aproximação para a correspondência a teoria de calibre com invariância conforme quebrada será uma aproximação para a QCD. Por isso são propostos modelos que permitem obter informações para a QCD a partir do

estudo do espaço de anti de Sitter modificado.

Esta modelagem para tratar problemas da QCD tem sido vastamente utilizada, apontando resultados bem interessantes e compatíveis com medidas experimentais. Um dos modelos propostos foi o modelo de parede dura (do inglês *Hard wall*) [32, 33, 34], o qual consiste em quebrar a invariância conforme da teoria na fronteira adicionando uma escala de energia ao espaço AdS. Isto é feito por meio de um corte infra-vermelho (do inglês *Infrared- IR*) na coordenada radial em um ponto arbitrário z_0 .

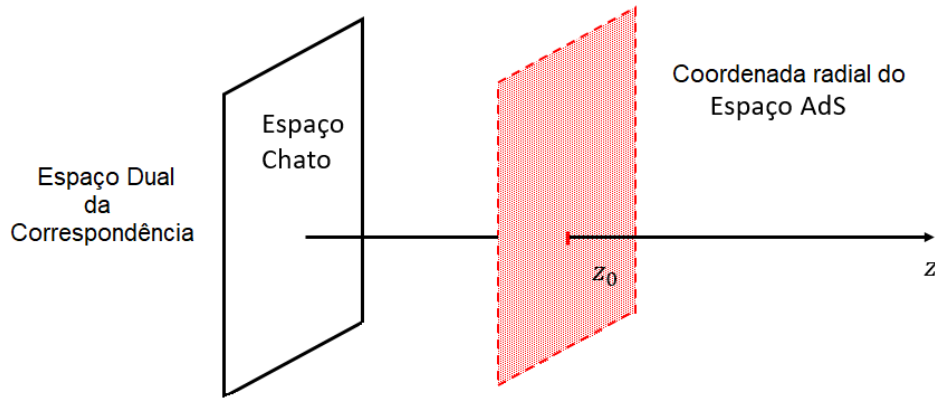


Figura 2.1: Representação simples do modelo de parede dura. No ponto z_0 da coordenada radial do espaço de Anti de Sitter é imposto um corte para quebrar a invariância conforme do espaço dual.

Esta condição restringe a existência de campos a uma região finita, como se fosse imposta uma parede. Neste modelo o confinamento de quarks é a pura realização do corte, o qual possibilita a existência de modos normalizáveis de campos correspondentes à operadores na teoria dual. A métrica do espaço de Anti de Sitter modificado pelo corte IR em z_0 é

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2), \quad 0 < z < z_0. \quad (2.1)$$

A ação do modelo também limitada por este corte

$$I = \int_0^{z_0} d^5x \sqrt{-g} \mathcal{L}. \quad (2.2)$$

Neste modelo de parede dura foi calculado o espectro de massa de *glueballs*, os quais são estados ligados de glúons. As soluções de campos obtidas para estas partículas são funções

de Bessel. Ele também prevê que no limite em que o nível de excitação radial n e o spin s das partículas são grandes a massa ao quadrado m^2 é proporcional a n ao quadrado e a s , também ao quadrado:

$$m^2 \sim n^2, s^2. \quad (2.3)$$

No entanto estes hádrons ainda não foram detectados diretamente, conseqüentemente não foram feitas medidas de suas massas. Em alguns experimentos foram encontradas partículas candidatas a serem glueballs, como por exemplo o méson $f_0(1710)$ [35, 36]. Porém, mesmo não conhecendo experimentalmente a relação entre massa e spin dos glueballs, a mesma já foi estabelecida para outros hádrons que podem ser detectados mais facilmente como prótons e nêutrons. Percebeu-se que para diferentes valores de spin de diferentes hádrons, suas massas apresentavam a seguinte relação

$$m_s^2 \sim s. \quad (2.4)$$

Também foi observado que para o mesmo hádron, mantendo o valor de seu spin constante, existe uma relação linear de sua massa quadrática com o nível de excitação radial

$$m_n^2 \sim n. \quad (2.5)$$

Na referência [37, 38] é apresentado um gráfico com medidas de massa ao quadrado do méson ρ em função do seu nível de excitação radial. Neste gráfico é observada a relação linear aproximada (2.5). Porém na referência [39] foi calculado o espectro de hádrons leves pelo modelo de parede dura e foram obtidas relações semelhantes às (2.3).

Essa discordância entre a relação obtida pelo modelo e a relação obtida experimentalmente para hádrons, mostrou a necessidade de desenvolver novas formulações que descrevam melhor a QCD a partir da teoria efetiva na fronteira da correspondência *AdS/CFT*.

Foi então proposto um modelo em que a modificação da geometria do espaço AdS ocorre de maneira menos brusca com a finalidade de encontrar novos resultados e que sejam compatíveis com o que é observado.

2.2 Desenvolvimento do modelo *de parede macia*

Um novo modelo holográfico pode ser construído a partir da modificação geométrica do espaço de Anti de Sitter. O objetivo dessa modificação é aproximar a teoria da fronteira à cromodinâmica quântica. Na introdução foi discutido o escalamento de Bjorken, do qual nota-se que os quarks se comportam como partículas livres no regime de altas energias. As quantidades observáveis como, seção de choque e amplitude de espalhamento, quando calculadas reportam a dependência única de um parâmetro adimensional refletindo a falta de uma escala da teoria neste regime. Logo assume-se que neste limite a QCD é um teoria conforme. Portanto é interessante que o modelo proposto inclua esta característica.

A distância infinitesimal entre dois pontos no espaço AdS_5 parametrizada em coordenadas de Poincaré é

$$ds^2 = e^{2A(z)}(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2), \quad 0 < z < \infty, \quad (2.6)$$

onde $A(z) = -\ln(z/R)$. A partir desta distância pode-se extrair a métrica do espaço

$$g^{\mu\nu} = e^{-2A(z)}\eta^{\mu\nu}, \quad \text{com} \quad \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$$

$$\text{e} \quad g = \det(g^{\mu\nu}) = -e^{10A(z)}. \quad (2.7)$$

Para o modelo de parede macia é sugerido que a modificação espacial do AdS seja dada pelo acréscimo de um parâmetro exponencial de um campo escalar na ação da teoria

$$I = \int d^5x \sqrt{-g} e^{-\phi(z)} \mathcal{L}, \quad (2.8)$$

onde tal campo depende apenas da coordenada radial z . Esta modificação permite que o corte no espaço AdS não seja necessariamente abrupto. No geral o parâmetro exponencial de fundo dependerá apenas das funções: $\phi(z)$ que é um parâmetro genérico, e $A(z)$, o qual vem da métrica do espaço curvo. Logo o comportamento do corte dependerá exclusivamente da escolha do parâmetro ϕ .

De forma a respeitar os comportamentos (2.4, 2.5) é necessário que o campo escalar ϕ tenha dependência $\propto z^2$. Isto possibilita o cálculo do espectro de massas e constantes de decaimento dos mésons vetoriais.

A escolha de um parâmetro ϕ positivo providencia uma influência sobre a dinâmica dos campos mais pronunciada na região IR que vai diminuindo a medida que segue para a região ultravioleta (UV) que é próxima a fronteira. Em contrapartida lembre-se que o modelo *hardwall* impunha um corte espacial brusco no valor z_0 bem fixado, em que os campos existiriam no espaço determinado até este ponto e deixariam de existir após. Pelo modelo com modificação na ação por uma exponencial o intervalo de existência dos campos não é mais limitado por um valor, mas é válido em todo o espaço real positivo, $0 < z < \infty$.

Ainda percebe-se que a quebra de invariância conforme respeita o comportamento assintótico do espectro de mésons altamente excitados, pois o espectro destes mésons não é determinado pelo comportamento dos campos no UV, mas sim pelo comportamento na região IR. Na região UV, ou seja, de altas energias, a constante de acoplamento da QCD é fraca dificultando a criação de estados ligados. Enquanto que na região IR, a constante de acoplamento será forte e os estados ligados são formados facilmente. Em comparação com o modelo de parede dura, que proporciona uma “quebra” abrupta do espaço, pode-se dizer que a nova modificação proposta é dada por uma “parede macia” (ou do inglês *Softwall*), já que ela ocorre de modo tênue.

No modelo de parede macia o méson vetorial é representado por um campo vetorial $V_m = (V_\mu, V_z)$ com $\mu = 0, 1, 2, 3$, que é dual ao vetor corrente $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ na teoria de calibre na fronteira. A ação é, portanto, reescrita como

$$I = \int d^4x dz \sqrt{-g} e^{-\phi(z)} \left\{ \frac{-1}{4g_5^2} F_{mn} F^{mn} \right\}. \quad (2.9)$$

Sendo $F_{mn} = \partial_m V_n - \partial_n V_m$ e $\phi(z) = k^2 z^2$ que é o campo escalar de fundo no AdS_5 proporcional a z^2 com constante k^2 . Note que z é a coordenada radial no AdS_5 e as

outras coordenadas constituem o espaço chato de quatro dimensões na fronteira com o espaço da teoria de calibre, que é tomada como uma aproximação, ou uma teoria efetiva, da QCD. A inserção do fator exponencial na ação da teoria é motivado somente pela fenomenologia, não existindo uma justificativa formal. Consequentemente é assumido que, a correspondência aproximada desta teoria com uma teoria de calibre é válida puramente no sentido fenomenológico considerando que as prescrições da correspondência *AdS/CFT* permaneçam legítimas. Da mesma forma será considerado que os campos dependem apenas das coordenadas do espaço *AdS₅* com a finalidade de excluir a supersimetria da teoria de cordas que existe na correspondência *AdS/CFT* exata.

Por último, o fator g_5 é o acoplamento da teoria de calibre com valor fixo [37]

$$g_5^2 = \frac{12\pi^2}{N_c}, \quad (2.10)$$

onde N_c é o número de cores da teoria de calibre. Busca-se um campo vetorial que satisfaça o princípio de mínima ação. Assim para a ação (2.9), obtem-se a seguinte equação de movimento:

$$\partial_m (\sqrt{-g} e^{-\phi(z)} F^{mn}) = 0. \quad (2.11)$$

Esta equação será destrinchada pelo índice $m = \mu, z$ e usando as idêntidades (2.7) obtidas pela métrica. Assim ela se torna

$$\partial_z (z^{-1} e^{-\phi(z)} \eta^{z\mu} \eta^{nq} F_{\mu q}) + \partial_\mu (z^{-1} e^{-\phi(z)} \eta^{\mu p} \eta^{nq} F_{pq}) = 0 \quad (2.12)$$

Note que $\eta^{\alpha\beta}$ é nulo para $\alpha \neq \beta$. Devido a isto é necessário que no primeiro termo se tenha $p = z$ e no segundo $p = \mu$. Ainda usando o calibre $V_z = 0$ a equação de movimento é reescrita como

$$\partial_z (z^{-1} e^{-\phi(z)} \eta^{nq} \partial_z V_q) + \partial_\mu (z^{-1} e^{-\phi(z)} \eta^{nq} (\partial_\mu V_q - \partial_q V_\mu)) = 0 \quad (2.13)$$

Considerando novamente o calibre $V_z = 0$ e a condição de Lorenz $\partial_\mu V^\mu = 0$, a qual afirma que o momento linear é perpendicular à solução de um méson vetorial no espaço dos

momentos, a equação de movimento se torna

$$\partial_z \left[z^{-1} e^{-\phi(z)} \partial_z V^\mu(x, z) \right] + z^{-1} e^{-\phi(z)} \partial^2 V^\mu(x, z) = 0. \quad (2.14)$$

E pode ser reescrita no espaço dos momentos,

$$\int d^4 q \left\{ z^{-1} e^{-\phi(z)} (-iq)^2 \tilde{V}^\mu(q, z) + \partial_z \left[z^{-1} e^{-\phi(z)} \partial_z \tilde{V}^\mu(q, z) \right] \right\} e^{-iq \cdot x} = 0, \quad (2.15)$$

onde foi usado a transformada de Fourier,

$$V(x, z) = \int d^4 q \tilde{V}^\mu(q, z) e^{-iq \cdot x}. \quad (2.16)$$

Não há valores de q e x na expressão (2.15) que levem a exponencial a zero. Logo o restante do integrando deve ser nulo, resultando na expressão:

$$\partial_z \left[z^{-1} e^{-\phi(z)} \partial_z \tilde{V}^\mu(q, z) \right] - q^2 z^{-1} e^{-\phi(z)} \tilde{V}^\mu(q, z) = 0. \quad (2.17)$$

Na correspondência *AdS/CFT* os estados físicos de partículas da teoria de calibre são associados às soluções normalizáveis dos campos obtidos da equação de movimento no espaço de anti de Sitter. Por isso as soluções de campos que interessam para cálculo de massas e constantes de decaimento devem ser normalizáveis. Em geral as soluções normalizáveis apresentam um espectro discreto de autovalores de momento ao quadrado relacionado a massa de partículas pela relação $-q^2 = m_n^2$. Desta forma a equação (2.17) apresenta uma solução $\psi(z)$ de modos normalizáveis quando $-q^2 = m_n^2$ é satisfeito. Sendo assim reescreve-se a expressão (2.17) como:

$$\partial_z \left[z^{-1} e^{-k^2 z^2} \partial_z \psi(z) \right] + m_n^2 z^{-1} e^{-k^2 z^2} \psi(z) = 0. \quad (2.18)$$

Substituindo a solução $\psi(z)$ por

$$\psi(z) = \frac{z}{R} \Psi(z) e^{k^2 z^2}, \quad (2.19)$$

é obtida uma equação num formato similar a equação de Schrödinger da mecânica quântica:

$$-\Psi''(z) + V(z)\Psi(z) = m_n^2 \Psi(z) \quad , \quad \text{com} \quad V(z) = \left(k^4 z^2 + \frac{3}{4z^2} \right). \quad (2.20)$$

O termo $V(z)$ corresponde ao potencial e os autovalores correspondentes as soluções normalizáveis são

$$m_n^2 = 4k^2(n + 1). \quad (2.21)$$

E a solução exata e normalizada para esta equação é dada por

$$\psi_n(z) = \frac{z^2 k^2}{R} \sqrt{\frac{2}{n+1}} L_n^1(k^2 z^2), \quad (2.22)$$

onde $L_n^1(k^2 z^2)$ é o polinômio associado de Laguerre e normalização foi feita da mesma forma que as funções de onda de uma equação de Schrödinger ordinária é feita,

$$\int_0^\infty \Psi_m^*(z) \Psi_n(z) dz = \delta_{mn}. \quad (2.23)$$

Veja que, a partir deste modelo as massas das partículas são obtidas pela expressão (2.21) do autovalor. A massa ao quadrado das partículas aumenta linearmente de acordo com o nível de excitação do campo vetorial na direção da coordenada z . Este é justamente o comportamento esperado para esta relação. Note também que o potencial da equação (2.20) descreve, de forma análoga, essencialmente um oscilador harmônico quando z assume valores muito grandes.

A escala das massas é fixada pelo coeficiente k que aparece na exponencial do campo escalar. Ele possui dimensão de massa pois a dimensão da coordenada radial é o inverso da massa ($[z] = M^{-1}$), fazendo com que a exponencial seja adimensional. O termo k é responsável pela violação da invariância de escala. No cálculo de massa dos mésons vetoriais é este termo que carrega a dimensão de massa na expressão (2.21).

Na seção 2.1 foram apresentados os comportamentos da massa ao quadrado com relação à excitação radial da partícula e também com relação à seu spin. Os cálculos matemáticos desenvolvidos até então foi para mésons vetoriais de spin $s = 1$. Na referência [37] foi tratado o caso em que estas partículas possuem diferentes valores de spin. Nesta situação os mésons com spin são criados a partir do operador corrente carregando o número quântico de spin atuando no vácuo. Desta forma os campos duais na

teoria de supergravidade também devem possuir spin e gerar modos normalizáveis a fim de determinar as massas e constantes de decaimento. Na teoria de interação os campos com spin na região do infravermelho adquirem massa pelo mecanismo de Higgs. Contudo que a massa nesta região permaneça finita, os modos com alto nível de excitação n não serão afetados. Nessa mesma referência é demonstrado que para grandes valores de spin s e altos valores de n , a relação confiável entre a massa e n e s para mésons vetoriais é dada por

$$m_{n,s}^2 = 4(n + s). \quad (2.24)$$

Esta relação é compatível com o comportamento esperado (2.4). Ainda na referência [37] foi inferida a relação para massa e spin de mésons axiais. Isto serve para mostrar que o comportamento (2.4) esperado para hádrons é bem estabelecido no modelo de parede macia. Neste caso, a relação aproximada obtida foi

$$m_{n,s}^2 \sim 4(n + s), \quad (2.25)$$

que é semelhante a relação para mésons com diferentes valores de spin.

Capítulo 3

Constante de decaimento para hádrons

No capítulo anterior foram obtidas massas para mésons vetoriais a partir do modelo de parede macia. Outra propriedade possível de se obter para estes mésons é a constante de decaimento. Em modelos holográficos essa constante é obtida a partir da função de dois pontos do operador corrente associado ao campo da partícula que decai.

O decaimento de hádrons pode ser classificado como decaimento hadrônico ou não hadrônico. Isto depende do estado final do processo. O decaimento hadrônico ocorre quando há formação de outros hádrons a partir daquele que decaiu. No decaimento não hadrônico o hádron decai em outras partículas que não são hádrons. Este estado final também é chamado de vácuo hadrônico.

Para entender o mecanismo de obtenção das constantes de decaimento por meio da holografia, é necessário primeiro compreender fisicamente o que é a constante de decaimento na QCD. Seu cálculo pode não ser trivial na teoria de calibre, mas este entendimento permite estabelecer uma relação concreta para essa constante no espaço de supergravidade dual, através da correspondência. Este capítulo foi construído a partir da referência [40].

3.1 Alguns aspectos da QCD

A QCD é a teoria quântica de campos que descreve as interações fortes. As partículas fundamentais desta teoria são os quarks, os antiquarks e os glúons. Os campos de quark e antiquarks são representados pelos espinores de Dirac, enquanto o glúon é representado por um campo vetorial

$$\psi_{\alpha,i,f}(x) \quad , \quad \bar{\psi}_{\alpha,i,f}(x) \quad \text{e} \quad A_a^\mu(x). \quad (3.1)$$

O índice α indica o elemento de matriz do spinor, enquanto o índice $i = 1, 2, 3$ (ou vermelho, verde e azul) representa as três possíveis cores que um quark ou anti quark pode ter. Por último o índice f é o número quântico de sabor, indicando o tipo de quark ou anti quark ($f=up, down, strange, charm, bottom \text{ e } top$). De acordo com as transformações do grupo da QCD, são gerados oito possíveis campos de glúon indicados pelo índice $a = 1, 2, \dots, 8$. Para estruturar uma TQC, deve-se construir a Lagrangeana de acordo com as simetrias que se deseja incorporar à teoria. A QCD é invariante de Lorentz, isto significa que as representações dos campos fundamentais se transformam igualmente em qualquer lugar do espaço, não havendo uma direção privilegiada para tais transformações e o espaço que estes campos vivem é homogêneo. Ela também possui invariância local de cor e outras simetrias associadas ao número quântico sabor. A lagrangeana desta teoria tem a forma [40, 41, 42]:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Nela estão os campos de quarks e antiquarks. Os campos de glúons estão no termo $F_a^{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}^a t_a = \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu] \quad , \quad \text{com} \quad D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu, \quad (3.3)$$

onde D_μ é uma derivada covariante e $A_\mu(x) = A_\mu^a t_a$. Como consequência da invariância de calibre, os campos de glúon mediam as interações fortes. A constante g é o acoplamento das interações fortes e t_a é o gerador do grupo de cores.

Por fim os estados possíveis de partículas hadrônicas no espaço da QCD, de acordo com as simetrias desejadas para a construção desta teoria, são estados ligados sem cor, estados não ligados coloridos, entre outros.

3.2 Geração de pólos por hádrons em TQC

A QCD é uma teoria quântica de campos que descreve as interações fortes. As partículas fundamentais desta interação são os quarks e os glúons. Sozinhos ou em grupos formam as partículas chamadas de hádrons.

Da lagrangeana da QCD obtêm-se a Hamiltoniana hermitiana e os hádrons podem ser designados como auto-estados $|\lambda\rangle$. Estas partículas carregam momento, sabor, paridade e outros números quânticos associados as simetrias da QCD. Propriedades físicas como massas e constantes de decaimento podem ser extraídas a partir da interpretação dos pólos gerados nas funções de Green, amplitudes de espalhamento e seções de choque.

Uma das formas de buscar estas informações é considerar a representação de Källén-Lehmann [9]. Esta normalmente é obtida da função de dois pontos ordenada temporalmente na teoria de interação. Uma relação de completeza é inserida entre os campos, levando a uma soma dos propagadores de partículas livres e da função espectral. Uma explicação mais detalhada e exemplificada é dada no apêndice C.

Na QCD os hádrons carregam carga de cor e de acordo com as transformações do grupo de representação da teoria de interação forte, esta carga se manifesta em três possibilidades ou três cores. Logo o operador de campo de um único quark não cria estados sem cor. Para que a representação de Källén-Lehmann seja mantida, é necessário garantir de alguma forma que estes quarks isolados não existam no espaço de estados da QCD. Com isto a ausência desta representação para quarks livres pode ser usada como um critério para o confinamento. Ou seja, os propagadores de quarks e glúons fundamentais não devem possuir pólos de partículas tipo-tempo (reais), devem ser do tipo-espaço (virtuais). Quando as partículas são do tipo-tempo, o quadrimomento é positivo $p^2 = E^2 - \vec{p}^2 > 0$.

Por outro lado os estados ligados são singletos de cor. Isto significa que para um determinado estado só pode haver uma cor ou ser um estado neutro. Os estados ligados podem aparecer como pólos em funções de n-pontos. Desta forma é possível derivar uma representação espectral para eles. Como exemplo toma-se a função de quatro pontos para quarks

$$\Pi_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle 0|T\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\gamma(x_3)\bar{\psi}_\delta(x_4)|0\rangle, \quad (3.4)$$

onde $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(y)$ são spinores de Dirac com índices α, β, γ e δ . Eles representam os campos de quarks e antiquarks respectivamente.

O par de campos de quarks e antiquarks $\psi\bar{\psi}$ contraídos a uma matriz de Dirac $(\gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma_5, \mathbb{1}, i\gamma_5)$ forma o operador de um estado ligado, que é o méson. Se na função de quatro pontos do exemplo for inserido um conjunto completo de auto-estados de hádrons $|\lambda\rangle$, serão produzidos pólos de estados ligados. Isto é possível pois o operador de um méson leva a um singleto de cor.

Como o objetivo é trabalhar com uma função de dois pontos que envolva partículas de estados ligados, esta função de quatro pontos será simplificada tornando os pontos x_1 e x_2 do primeiro par quark e antiquark equivalentes $x_1 = x_2 \equiv x$. Da mesma forma tornar-se-ão equivalente os pontos x_3 e x_4 do segundo par, $x_3 = x_4 \equiv y$. Daí a função de quatro pontos se torna

$$\Pi_{\alpha\beta\gamma\delta}(x, y) = \langle 0|T\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x)\psi_\gamma(y)\bar{\psi}_\delta(y)|0\rangle. \quad (3.5)$$

A construção operatorial de um méson geralmente é dada por um par de quark e antiquark contraído a uma matriz de Dirac 4×4 denotada por Γ

$$j^\Gamma(x) := \bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x), \quad (3.6)$$

onde j^Γ é o operador corrente que cria o estado ligado. A matriz Γ é responsável pela designação do tipo de méson que será construído. Quando ela assume a forma de uma matriz de Dirac para vetores γ^μ o operador corrente será denotado por $J^\mu(x)$ e designará portanto, um méson vetorial.

Seguindo esta lógica, se a matriz Γ for uma das matrizes de Dirac $\{\gamma^\mu\gamma_5, \mathbb{1}, i\gamma_5\}$ que designam, respectivamente, vetores axiais, escalares e pseudoescalares, consequentemente os mésons serão denominados como vetores axiais, escalares e pseudoescalares. Os operadores corrente serão representados por

$$\begin{aligned}\psi(x)\gamma^\mu\bar{\psi}(x) &= J^\mu(x) \quad , & \psi(x)\gamma^\mu\gamma_5\bar{\psi}(x) &= K^\mu(x), \\ \psi(x)\mathbb{1}\bar{\psi}(x) &= S(x) \quad , & \psi(x)i\gamma_5\bar{\psi}(x) &= P(x).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Sendo assim contraindo a função (3.5) com a matriz Γ será possível obter as seguintes funções de dois pontos ou, também chamados de funções de correlação de correntes

$$\Gamma'_{\beta\alpha}\Pi_{\alpha\beta\gamma\delta}(x,y)\Gamma_{\delta\gamma} = \begin{cases} \langle 0|TJ^\mu(x)J^\nu(y)|0\rangle, & \text{se } \Gamma = \gamma^\mu \\ \langle 0|TK^\mu(x)K^\nu(y)|0\rangle, & \text{se } \Gamma = \gamma^\mu\gamma_5 \\ \langle 0|TS(x)S(y)|0\rangle, & \text{se } \Gamma = \mathbb{1} \\ \langle 0|TP(x)P(y)|0\rangle, & \text{se } \Gamma = i\gamma_5 \end{cases}\tag{3.8}$$

Estas funções de dois pontos podem ser vistas como propagadores de mésons que possuam a composição de campos J^μ , K^μ , P e S . Como já discutido anteriormente para os hádrons só faz sentido interpretar pólos oriundos de correntes que relacionem os operados de quarks formando estados ligados. Ao simplificar a função de quatro pontos (3.4) em uma função de correlação de correntes de dois pontos, é possível filtrar as informações desnecessárias do espaço de estados. Como por exemplo, os estados não ligados de quarks e antiquarks.

Funções de onda de estados ligados de quarks

Até o momento foram mostradas transições vácuo-vácuo de operadores ordenados temporalmente. Mas para o cálculo da constante de decaimento de um processo em que um hádron decai em outras partículas não hadrônicas, é necessário estudar as transições entre o estado de partícula e o vácuo hadrônico.

Para isto os elementos de transição entre um hádron com auto estado $|\lambda\rangle$ com momento

p e o vácuo são introduzidos, definindo as funções de onda de estados ligados de hádrons:

$$\chi(x_1, x_2, p) := \langle 0 | T \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | \lambda \rangle. \quad (3.9)$$

Esta quantidade é construída a partir dos campos de um quark e um antiquark constituindo um méson.

O momento total dos hádrons está na camada de massa ($p^2 = m_\chi^2$), ou seja, satisfaz as equações de movimento. Os números quânticos são fixos. Devido a invariância translacional a amplitude de transição vácuo-vácuo pode depender da coordenada translacional $z := x_1 - x_2$ vezes um fator de fase

$$\chi(x_1, x_2, p) \sim e^{\delta} \chi(z, p). \quad (3.10)$$

Esta invariância translacional será demonstrada mais adiante para a função de correlação de dois pontos pelo uso do operador de translação.

Constante de Decaimento na QCD

No decaimento de um hádron são geradas, no estado final, partículas que podem ser ou não hadrônicas. Em TQC estes decaimentos podem ser quantificados por meio de uma de transição entre o estado de uma partícula e o estado final. No caso em que se obtém no estado final o vácuo hadrônico, ou seja, partículas que não são hádrons, o elemento de transição é calculado pela contração da função de estado ligado com a matriz Γ

$$- \Gamma \chi(x, x, p) = \langle 0 | j^\Gamma(x) | \lambda \rangle = \langle 0 | j^\Gamma(0) | \lambda \rangle e^{-ip \cdot x}. \quad (3.11)$$

Os campos de quarks e antiquarks devem ser tomados no mesmo ponto $x_1 = x_2$ ou $z = 0$, constituindo estado ligados invariantes de calibre [40]. Isto significa que no espaço dos momentos a integração é feita sobre o momento relativo entre as duas partículas que constituem o méson.

Tomando $\Gamma = \gamma^\mu$ será obtida a amplitude de transição para o operador corrente de um méson vetorial com momento p

$$- \Gamma_{\beta\alpha} \chi_{\alpha\beta}(x, x, p) = -\gamma_{\beta\alpha}^\mu \langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x) | \lambda_p \rangle. \quad (3.12)$$

Sabendo que $\bar{\psi}_\beta = \psi_\gamma^\dagger \gamma_{\gamma\beta}^0$ a expressão se torna

$$-\Gamma_{\beta\alpha}\chi_{\alpha\beta}(x, x, p) = -\gamma_{\beta\alpha}^\mu \langle 0 | \psi_\alpha(x) \psi_\gamma^\dagger(x) \gamma_{\gamma\beta}^0 | \lambda \rangle. \quad (3.13)$$

Usando a propriedade de anticomutação entre os espinores de Dirac [9]

$$\{ \psi_\alpha(x), \psi_\gamma^\dagger(y) \} = \delta^{(3)}(x - y) \delta_{\alpha\gamma}, \quad (3.14)$$

obtem-se:

$$\begin{aligned} -\Gamma_{\beta\alpha}\chi_{\alpha\beta}(x, x, p) &= -\gamma_{\beta\alpha}^\mu \left(\langle 0 | \delta^{(3)}(0) \delta_{\alpha\gamma} | \lambda_p \rangle - \langle 0 | \psi_\delta^\dagger(x) \psi_\alpha(x) | \lambda_p \rangle \right) \gamma_{\delta\beta}^0 \\ &= \langle 0 | \bar{\psi}_\beta(x) \gamma_{\beta\alpha}^\mu \psi_\alpha(x) | \lambda_a \rangle - (\text{constante}). \end{aligned} \quad (3.15)$$

O termo constante é considerado como um fator de fundo e pode ser negligenciado, pois sempre possuirá o mesmo valor. Entao não faz diferença contabiliza-lo ou não, desde que sempre seja desprezado caso apareça em outros cálculos.

Portanto usando a definição (3.6) de corrente de mésons, é obtido os elementos de matriz de uma transição de um méson vetorial para o vácuo hadrônico

$$-\Gamma_{\beta\alpha}\chi_{\alpha\beta}(x, x, p) = \langle 0 | J^\mu(x) | \lambda_p \rangle. \quad (3.16)$$

Usando o operador de translação, o vetor corrente J_μ é reescrito como

$$J^\mu(x) = e^{i\hat{p}\cdot x} J^\mu(0) e^{-i\hat{p}\cdot x}, \quad (3.17)$$

onde \hat{p} é o operador momento e x é a coordenada espacial. A expressão final da matriz de transição que descreve o decaimento não hadrônico é

$$-\Gamma_{\beta\alpha}\chi_{\alpha\beta}(x, x, p) = \langle 0 | J^\mu(x) | \lambda_p \rangle = \langle 0 | J^\mu(0) | \lambda_p \rangle e^{-ip\cdot x}. \quad (3.18)$$

Esta transição é quantificada por uma constante que possua a mesma polarização do méson

$$\langle 0 | J^\mu(x) | \lambda_p \rangle = F_\lambda e^\mu e^{-ip\cdot x}, \quad (3.19)$$

onde é definido que

$$\langle 0|J^\mu(0)|\lambda_p\rangle = F_\lambda e^\mu. \quad (3.20)$$

Desta forma o valor constante F_λ é chamado de constante de decaimento para mésons vetoriais direcionado pelo vetor unitário de polarização e^μ .

3.3 Funções de dois pontos para mésons vetoriais e a constante de decaimento

É possível estabelecer uma relação entre a função de dois pontos para mésons vetoriais e a constante de decaimento. Isto é feito a partir dos resultados obtidos na seção anterior para as transições do estado de um hádron com estado final de vácuo hadrônico. Desta forma será possível calcular a constante de decaimento a partir do cálculo da função de dois pontos.

Considere a função de correlação de dois pontos do operador corrente correspondente ao méson vetorial

$$\langle 0|TJ_\mu(x)J_\nu(y)|0\rangle = \Theta(x^0 - y^0)\langle 0|J_\mu(x)J_\nu(y)|0\rangle + \Theta(y^0 - x^0)\langle 0|J_\nu(y)J_\mu(x)|0\rangle. \quad (3.21)$$

Esta expressão é invariante por translação. Isto significa que sua dependência em x e y pode ser substituída por outra variável definida como a diferença das duas, ou seja $x - y \equiv z$. Usando o operador de translação (3.17) o primeiro termo da equação (3.21) é dado por

$$\langle 0|J_\mu(x)J_\nu(y)|0\rangle = \langle 0|e^{i\hat{p}\cdot x}J_\mu(0)e^{-i\hat{p}\cdot x}e^{i\hat{p}\cdot y}J_\nu(0)e^{-i\hat{p}\cdot y}|0\rangle. \quad (3.22)$$

Sabendo que $\hat{p}|0\rangle = 0$ pode-se escrever $\langle 0| = \langle 0|e^{-i\hat{p}\cdot y}$ e $e^{i\hat{p}\cdot y}|0\rangle = |0\rangle$, daí

$$\begin{aligned} \langle 0|J_\mu(x)J_\nu(y)|0\rangle &= \langle 0|e^{-i\hat{p}\cdot y}e^{i\hat{p}\cdot x}J_\mu(0)e^{-i\hat{p}\cdot x}e^{i\hat{p}\cdot y}J_\nu(0)e^{-i\hat{p}\cdot y}|0\rangle \\ &= \langle 0|e^{i\hat{p}\cdot(x-y)}J_\mu(0)e^{-i\hat{p}\cdot(x-y)}J_\nu(0)|0\rangle \\ &= \langle 0|J_\mu(x-y)J_\nu(0)|0\rangle \\ &= \langle 0|J_\mu(z)J_\nu(0)|0\rangle. \end{aligned} \quad (3.23)$$

O mesmo pode ser feito para o segundo termo. Daí a expressão (3.21) é reescrita em termos da coordenada z

$$\langle 0|TJ_\mu(z)J_\nu(0)|0\rangle = \Theta(z^0)\langle 0|J_\mu(z)J_\nu(0)|0\rangle + \Theta(-z^0)\langle 0|J_\nu(-z)J_\mu(0)|0\rangle. \quad (3.24)$$

Entre os operadores de corrente é inserida a relação de completeza dos estados de partículas hadrônicas com momento quadrivetorial p [9, 40]

$$\mathbb{1} = \sum_\lambda \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p \theta(p^0)\delta(p^2 - m^2)|\lambda\rangle\langle\lambda| = \sum_\lambda \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_{\vec{p}}} |\lambda\rangle\langle\lambda|. \quad (3.25)$$

Com isto a expressão para a função de dois pontos (3.21) se torna

$$\begin{aligned} \langle 0|TJ_\mu(z)J_\nu(0)|0\rangle &= \sum_\lambda \frac{\Theta(z^0)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_{\vec{p}}} \langle 0|J_\mu(z)|\lambda\rangle\langle\lambda|J_\nu(0)|0\rangle + \\ &+ \sum_\lambda \frac{\Theta(-z^0)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_{\vec{p}}} \langle 0|J_\nu(-z)|\lambda\rangle\langle\lambda|J_\mu(0)|0\rangle. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Usando a definição para a constante de decaimento obtida pela matriz de transição de um estado de partícula para o vácuo hadrônico (3.20), obtém-se:

$$\begin{aligned} \langle 0|TJ_\mu(z)J_\nu(0)|0\rangle &= \sum_\lambda \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_{\vec{p}}} \left[\frac{\Theta(z^0)}{(2\pi)^3} \epsilon_\mu F_\lambda e^{-ip\cdot z} \epsilon_\nu^* F_\lambda^* + \frac{\Theta(-z^0)}{(2\pi)^3} \epsilon_\nu F_\lambda e^{ip\cdot z} \epsilon_\mu^* F_\lambda^* \right] \\ &= \sum_\lambda \left[\frac{\Theta(z^0)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip\cdot z} + \frac{\Theta(-z^0)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_{\vec{p}}} e^{ip\cdot z} \right] F_\lambda^2 \epsilon_\mu \epsilon_\nu. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Os vetores de polarização indicam direções no espaço real, por isso eles são auto-adjuntos $\epsilon_\mu^* = \epsilon_\mu$. Desta forma foi possível colocá-los em evidência e o seu produto interno indica a polarização da função de correlação para dois mésons vetoriais. Os termos integrais são exatamente equivalentes a definição do propagador de campos escalares livres com momento p em teoria quântica de campos

$$D_\lambda(z) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip\cdot z}. \quad (3.28)$$

Desta forma a expressão (3.27) é reescrita

$$\langle 0|TJ_\mu(z)J_\nu(0)|0\rangle = \sum_\lambda \left[\Theta(z^0)D(z) + \Theta(-z^0)D(-z) \right] F_\lambda^2 \epsilon_\mu \epsilon_\nu. \quad (3.29)$$

E a expressão dentro do colchetes é a definição do propagador de Feynman

$$D_F(z) = \begin{cases} D(z), & z^0 > 0 \\ D(-z), & z^0 < 0 \end{cases} . \quad (3.30)$$

Desta forma a expressão para a função de dois pontos é reescrita em termos de propagadores livres

$$\begin{aligned} \langle 0|T J_\mu(z) J_\nu(0)|0\rangle &= \sum_\lambda D_F(z, m_\lambda) F_\lambda^2 \epsilon_\mu \epsilon_\nu \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot z} \sum_\lambda \frac{i F_\lambda^2}{p^2 - m_\lambda^2} \epsilon_\mu \epsilon_\nu . \end{aligned} \quad (3.31)$$

O propagador de Feynman (3.30) é definido num espaço com assinatura de Minkowski $(-, +, +, +)$. É conveniente escrevê-lo num espaço com assinatura Euclidiana $(+, +, +, +)$. Isto será feito via rotação de Wick, onde é necessário redefinir as coordenada por uma mudança de variáveis

$$t = it_E , \quad \vec{z} = \vec{z}_E , \quad p^0 = -ip_E^0 \text{ e } \vec{p} = \vec{p}_E . \quad (3.32)$$

Para saber mais sobre rotação de Wick consulte as referências [9, 30]. A função de dois pontos, portanto, pode ser escrita no espaço das coordenadas como

$$\langle 0|T J_\mu(z) J_\nu(0)|0\rangle = \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} e^{-ip_E \cdot z} \sum_\lambda \frac{F_\lambda^2}{p^2 - m_\lambda^2} \epsilon_\mu \epsilon_\nu . \quad (3.33)$$

Repare que esta integral tem a cara da transformada de Fourier definida em (2.16). Sendo assim a anti-transformada poderia ser escrita como

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \langle 0|T J_\mu(x) J_\nu(y)|0\rangle &= \sum_\lambda \frac{F_\lambda^2}{p^2 - m_\lambda^2} \epsilon_\mu \epsilon_\nu \\ &= \Pi(p^2) \epsilon_\mu \epsilon_\nu , \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde foi definida a função de dois pontos no espaço dos momentos

$$\Pi(p^2) \equiv \sum_\lambda \frac{F_\lambda^2}{p^2 - m_\lambda^2} . \quad (3.35)$$

Desta forma é visível que a função de dois pontos no espaço dos momentos é igual a uma soma sobre os pólos de momento quando este é igual a massa das partículas m_λ associada aos operadores corrente. Note ainda que os resíduos destes pólos são as constantes de decaimento ao quadrado de mésons vetoriais F_λ^2 .

3.4 Prescrição para cálculo da constante de decaimento

Na seção 3.2 foi definida a matriz de transição do estado de uma partícula para o estado de vácuo hadrônico. A partir dela foi possível achar uma expressão para o cálculo da constante de decaimento no processo de decaimento não hadrônico. Da expressão (3.20) tem-se que

$$\langle 0|J_\mu(0)|\lambda\rangle = \epsilon_\mu F_\lambda. \quad (3.36)$$

Porém para os cálculos seguintes será usado uma redefinição para esta matriz de transição, onde a constante de decaimento será dada por unidade de massa, $f_n = F_\lambda/m_\lambda$. Logo

$$\langle 0|J_\mu(0)|\lambda\rangle = \epsilon_\mu f_\lambda m_\lambda. \quad (3.37)$$

Identifica-se a constante de decaimento para um processo ao calcular a função de correlação de dois pontos do modelo holográfico para QCD. Nessa função de dois pontos é notado a existência de pólos quando $-q^2 = m_\lambda^2$, sendo que todos os resíduos destes pólos são positivos. Portanto pode-se interpretá-los como estados ligados em que m'_λ s representariam massas. De forma simplificada suponha que a função de correlação de dois pontos calculada tenha a forma da equação (3.35), onde $p^2 = -q^2$:

$$\Pi(-q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_\lambda^2}{-q^2 - m_\lambda^2} \quad (3.38)$$

onde F_λ é, por enquanto, uma constante qualquer. Multiplicando esta expressão por $(-q^2 - m_i^2)$ dos dois lados e posteriormente tomando o limite de $-q^2 \rightarrow m_i^2$ é obtido

$$\lim_{-q^2 \rightarrow m_i^2} (-q^2 - m_i^2)\Pi(-q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{-q^2 \rightarrow m_i^2} \left[(-q^2 - m_i^2) \frac{F_\lambda^2}{-q^2 - m_\lambda^2} \right]. \quad (3.39)$$

Note que as contribuições para que esta quantidade seja diferente de zero ocorrem quando $m_i^2 = m_\lambda^2$. Se $m_i^2 \neq m_\lambda^2$ o numerador é zero pelo limite tomado. Daí, por esta prescrição, obtem-se:

$$F_\lambda^2 = \lim_{-q^2 \rightarrow m_\lambda^2} \{(-q^2 - m_\lambda^2) \Pi(-q^2)\}, \quad (3.40)$$

onde Π é a função de dois pontos. Logo a constante F_λ é calculada como sendo o resíduo da função de dois pontos no polo m_λ .

Capítulo 4

Constante de decaimento para mésons vetoriais no modelo de parede macia

4.1 Função de dois pontos

Em teorias quânticas de campos a função de correlação, ou função de n-pontos, é calculada pelo valor esperado no vácuo do produto ordenado temporalmente dos operadores de campos

$$\Pi(x_1, \dots, x_n) = \langle 0|T \{ \hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n) \} |0\rangle. \quad (4.1)$$

Tais funções de correlação podem ser obtidas a partir do funcional gerador. Este, no formalismo de integrais de caminho, é definido por [30]

$$\mathcal{Z}[j] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi] + i \int d^4x j(x)\phi(x)}, \quad (4.2)$$

onde $j(x)$ é chamado de fonte dos campos ϕ que vivem neste espaço e $S[\phi]$ é a ação da teoria. No formalismo de integrais de caminho o espaço-tempo é discretizado. Desta forma é definido o operador $\mathcal{D}\phi$, o qual representa a integração sobre os campos definidos em cada ponto deste espaço-tempo

$$\mathcal{D}\phi \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \int d\phi(x_i). \quad (4.3)$$

A derivação do funcional gerador em relação a n-campos resulta na função de correlação de n-pontos [30]

$$\langle 0|T \left\{ \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) \right\} |0\rangle = \frac{\delta}{i\delta j(x_1)} \dots \frac{\delta}{i\delta j(x_n)} \mathcal{Z}[j] \Big|_{j=0}, \quad (4.4)$$

onde as fontes $j(x)$ de cada campo são tomadas como nulas após as derivadas.

Na correspondência *AdS/CFT* os operadores de estados de partículas na teoria de calibre são associados a campos normalizáveis no espaço de anti de Sitter. Para calcular a função de n-pontos dos campos no espaço *AdS* é necessário estabelecer uma conexão do funcional gerador no espaço *AdS* com o funcional gerador calculado no espaço de calibre. Isto é feito a partir da prescrição de Witten baseada nos trabalhos de Gubser, Klebanov e Polyakov [50].

A prescrição de Witten diz que o funcional gerador das funções de correlação dos operadores \mathcal{O} da teoria de calibre deve ser equivalente ao funcional gerador dos campos ϕ associados na teoria de cordas

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}[\phi_0]_{CFT} = \mathcal{Z}_{\phi}[\phi_0]_{AdS}. \quad (4.5)$$

Note que para o funcional gerador da teoria conforme ϕ_0 se comporta como fonte, enquanto que para o funcional gerador no AdS ϕ_0 é o valor no campo na fronteira. O funcional gerador para os campos ϕ pode ser aproximado tomando-se o limite de supergravidade clássica, resultando na expressão

$$\mathcal{Z}_{\phi}[\phi_0] = e^{-S_{sugra}[\phi_0]}. \quad (4.6)$$

S_{sugra} é a ação calculada na camada de massa. Para obtê-la é necessário encontrar as soluções clássicas da equação de movimento e substituí-las na ação. No limite de supergravidade, a prescrição para o funcional gerador das funções de correlação dos operadores \mathcal{O} na teoria de calibre é

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}[\phi_0]_{CFT} = \mathcal{Z}_{\phi}[\phi_0]_{AdS} = e^{-S_{sugra}[\phi_0]}. \quad (4.7)$$

Desta forma, a função de dois pontos de um operador \mathcal{O} na teoria de calibre que corresponde a um campo no espaço de anti de Sitter é calculado por

$$\langle 0|T\{\mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y)\}|0\rangle = \frac{\delta^2}{\delta\phi_0(x)\phi_0(y)} e^{-S_{\text{sugra}}[\phi_0]} \Big|_{\phi_0=0}, \quad (4.8)$$

onde as fontes do funcional gerador são os campos ϕ_0 que possuem valores tomados na fronteira. Para o caso de mésons vetoriais os campos de calibre no espaço de anti de Sitter são associados a operadores de corrente J^μ . A prescrição de Witten neste caso implica que o funcional gerador tenha a forma

$$\mathcal{Z}_{J_\mu[V_\mu^0]}_{CFT} = \int \mathcal{D}[\text{campos}] e^{-S + \int d^4x J_\mu(x) V_\mu^0(x)} = e^{-S_{\text{sugra}}[J_\mu[V_\mu^0]]}. \quad (4.9)$$

Então a função de dois pontos do operador corrente J^μ associado ao campo V^μ do méson vetorial é dada por

$$\langle 0|J_\mu(x)J_\nu(y)|0\rangle = \frac{\delta^2}{\delta V^{0\mu}(x)V^{0\nu}(y)} e^{-S_{\text{sugra}}[J_\mu[V_\mu^0]]} \Big|_{V_\mu^0=0}, \quad (4.10)$$

onde os campos $V_\mu^0(x) = \lim_{z \rightarrow 0} V_\mu(x, z)$ tomados na fronteira são as fontes dos operadores corrente.

4.2 Função de dois pontos no espaço de Fourier e Ação *on shell*

Na seção anterior foi obtida a expressão (4.10) para o cálculo da função de correlação de dois pontos do operador corrente J^μ . As fontes $V^{0\mu}$ do funcional gerador são os campos correspondentes ao operador tomados na fronteira. Nesta seção a expressão (4.10) para função de correlação será avaliada no espaço dos momentos, pois a relação (3.35) mostra como a constante de decaimento é obtida pela função de dois pontos no espaço dos momentos. Da equação (3.23) sabe-se que a função de dois pontos é invariante de translação e pode ser reescrita como

$$\langle 0|J_\mu(x)J_\nu(y)|0\rangle = \langle 0|J_\mu(x)J_\nu(0)|0\rangle, \quad (4.11)$$

onde no lado direito da expressão $x \rightarrow x - y$. O campo vetorial será escrito em termos de uma função de Green:

$$V^\mu(x, z) = \int d^4x' G(x, x'; z) V^\mu(x', z = 0). \quad (4.12)$$

Esta função de Green $G(x, x'; z)$ deve satisfazer a equação de movimento (2.14) do campo V^μ , ou seja,

$$\partial_z [z^{-1} e^{-\phi(z)} \partial_z G(x, x'; z)] + z^{-1} e^{-\phi(z)} \partial^2 G(x, x'; z) = 0, \quad (4.13)$$

e deve ser avaliada na fronteira como

$$G(x, x'; z = 0) = \delta(x - x'). \quad (4.14)$$

A transformada de Fourier para a função de Green, onde $x - x' = u$, é definida:

$$\mathcal{V}(q, z) = \int d^4u e^{iqu} G(u, z). \quad (4.15)$$

Note ainda que: $\mathcal{V}(q, z = 0) = \int d^4u e^{iqu} G(u, z = 0) = \int d^4u e^{iqu} \delta(u) = 1$. A função de Green é reescrita como anti-transformada de Fourier e é substituída na expressão do campo vetorial:

$$V^\mu(x, z) = \int d^4x' \int d^4q' e^{-iq' \cdot (x - x')} \mathcal{V}(q', z) V^\mu(x', z = 0). \quad (4.16)$$

Ao escrever a transformada do campo vetorial na equação (4.16), será obtido uma expressão que permite a decomposição deste campo no espaço dos momentos em termos de um propagador *bulk-to-boundary* e dos valores do campo na fronteira. Sendo assim é possível determinar a função de dois pontos. Esta é reescrita no espaço dos momentos utilizando a transformada de Fourier como se segue:

$$\begin{aligned} \tilde{V}^\mu(q, z) &= \int d^4x e^{iq \cdot x} V^\mu(x, z) \\ &= \int d^4x e^{iq \cdot x} \int d^4x' \int d^4q' e^{-iq' \cdot (x - x')} \mathcal{V}(q', z) V^\mu(x', z = 0) \\ &= \mathcal{V}(q, z) \int d^4x' e^{iq \cdot x'} V^\mu(x', z = 0) \\ &= \mathcal{V}(q, z) \tilde{V}^\mu(q, z = 0). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Neste resultado $\mathcal{V}(q, z)$ representa o propagador *bulk-to-boundary* e $V^\mu(x, z = 0)$ é o valor do campo vetorial na fronteira. Repare que o campo no espaço dos momentos é escrito como a multiplicação destes dois termos, enquanto que no espaço das posições ele é escrito como uma integral, veja equação (4.15). Utilizando a identidade $F_{mn}F^{mn} = 2\partial_m V_n F^{mn}$ na expressão para ação (2.9), pode-se reescrevê-la:

$$I = \int d^4x dz \sqrt{-g} e^{-\phi(z)} \left(\frac{-1}{2g_5^2} \partial_m V_n F^{mn} \right). \quad (4.18)$$

Faz-se uma integração por partes,

$$\partial_m V_n \sqrt{-g} e^{-\phi(z)} F^{mn} = \partial_m (\sqrt{-g} e^{-\phi(z)} V_n F^{mn}) - \partial_m (\sqrt{-g} e^{-\phi(z)} F^{mn}) V_n$$

onde o segundo termo do lado direito é a equação de movimento (2.11). Logo este termo é nulo e a expressão para a ação *on shell* fica:

$$I_{onshell} = \frac{-1}{2g_5^2} \int d^4x dz \partial_m (\sqrt{-g} e^{-\phi(z)} V_n F^{mn}). \quad (4.19)$$

O índice de soma $m = \mu, z$ assume os valores $\mu = 0, 1, 2, 3$ para as coordenadas do espaço chato na fronteira e z para coordenada radial no espaço *AdS*. A métrica para o espaço *AdS* no modelo de parede macia foi dada no capítulo 2 pela equação (2.7). Usando-a na equação (4.19) são obtidos dois termos, onde um deles possui uma derivada total em z , e os outros uma derivada total em x

$$\begin{aligned} I_{onshell} &= \frac{-1}{2g_5^2} \int_0^\infty dz \int_{-\infty}^\infty d^4x \partial_\mu (z^{-1} e^{-\phi(z)} \eta^{\mu p} \eta^{nq} V_n F_{pq}) + \\ &+ \frac{-1}{2g_5^2} \int_{-\infty}^\infty d^4x \int_0^\infty dz \partial_z (z^{-1} e^{-\phi(z)} \eta^{zp} \eta^{nq} V_n F_{pq}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Para o primeiro termo a integral é calculada em x e para o segundo, a integral é calculada em z . Desta forma obtém-se quatro termos que são os resultados das integrais tomados

nos limites de integração

$$\begin{aligned}
I_{onshell} &= -\frac{1}{2\tilde{g}_5^2} \int_0^\infty dz \lim_{x \rightarrow \infty} (z^{-1} e^{-\phi(z)} \eta^{\mu p} \eta^{nq} V_n F_{pq}) + \\
&+ \frac{1}{2\tilde{g}_5^2} \int_0^\infty dz \lim_{x \rightarrow -\infty} (z^{-1} e^{-\phi(z)} \eta^{\mu p} \eta^{nq} V_n F_{pq}) - \\
&- \frac{1}{2\tilde{g}_5^2} \int_{-\infty}^\infty d^4x \lim_{z \rightarrow \infty} (z^{-1} e^{-\phi(z)} \eta^{zp} \eta^{nq} V_n F_{pq}) + \\
&+ \frac{1}{2\tilde{g}_5^2} \int_{-\infty}^\infty d^4x \lim_{z \rightarrow 0} (z^{-1} e^{-\phi(z)} \eta^{zp} \eta^{nq} V_n F_{pq}). \tag{4.21}
\end{aligned}$$

O primeiro termo é nulo pois a solução é tomada como uma superposição de ondas planas para que seja uma solução normalizável. O segundo termo vai a zero, pois quando as coordenadas transversais tendem a menos infinito a solução de campo vetorial é nula já que possui aspecto de onda plana. O terceiro termo é zero devido a dependência inversa de z . Portanto só resta o último termo,

$$I_{onshell} = \frac{1}{2\tilde{g}_5^2} \int_{-\infty}^\infty d^4x \lim_{z \rightarrow 0} (z^{-1} e^{-\phi(z)} \eta^{zp} \eta^{nq} V_n F_{pq}), \tag{4.22}$$

no qual o índice p necessariamente é igual a z , caso contrário o termo $\eta^{zp}|_{p \neq z}$ é nulo. Logo a expressão toma a forma

$$I_{onshell} = \frac{1}{2\tilde{g}_5^2} \int_{-\infty}^\infty d^4x \lim_{z \rightarrow 0} (z^{-1} e^{-\phi(z)} \eta^{nq} V_n F_{zq}). \tag{4.23}$$

Devido ao gauge $V_z = 0$ escreve-se $F_{zq} = \partial_z V_q$, obtendo:

$$I_{onshell} = \frac{1}{2\tilde{g}_5^2} \int_{-\infty}^\infty d^4x \lim_{z \rightarrow 0} (z^{-1} e^{-\phi(z)} \eta^{nq} V_n \partial_z V_q). \tag{4.24}$$

Repare que se $n = z$ a expressão acima também vai a zero devido ao gauge escolhido, portanto n deve assumir o valor de μ . Note por fim que, se $n = \mu$ o índice q também deverá assumir valores atrelados ao espaço chato de Minkowski que neste caso será α

$$I_{onshell} = \frac{1}{2\tilde{g}_5^2} \int_{-\infty}^\infty d^4x \lim_{z \rightarrow 0} (z^{-1} e^{-\phi(z)} \eta^{\mu\alpha} V_\mu \partial_z V_\alpha). \tag{4.25}$$

Como o vetor está descrito somente em termos do índice do espaço chato pode-se utilizar a métrica deste espaço $\eta^{\mu\alpha}$ para elevar seu índice. Por fim a ação *on shell* é escrita como

$$I_{onshell} = \frac{1}{2\tilde{g}_5^2} \int_{-\infty}^\infty d^4x (z^{-1} e^{-\phi(z)} V_\mu \partial_z V^\mu)|_{z=0}. \tag{4.26}$$

A partir do resultado obtido para a ação *on shell*, os campos vetoriais são substituídos pela expressão (4.12). Usando a equação (4.10) encontra-se a relação entre a função de dois pontos e a função de Green:

$$\langle 0|J_\mu(x)J_\nu(0)|0\rangle = \frac{-1}{\tilde{g}_5^2} [z^{-1}\partial_z G(x; z)]_{z\rightarrow 0} g_{\mu\nu}. \quad (4.27)$$

Aplicando a transformada de Fourier:

$$\int d^4x e^{iq\cdot x} \langle 0|J_\mu(x)J_\nu(0)|0\rangle = \frac{-1}{\tilde{g}_5^2} [z^{-1}\partial_z \mathcal{V}(q; z)]_{z\rightarrow 0} g_{\mu\nu}. \quad (4.28)$$

Nas referências [56, 51] a função de correlação dos operadores corrente no espaço dos momentos é dada por

$$(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Pi(q^2) = \int d^4x e^{iq\cdot x} \langle 0|J_\mu(x)J_\nu(0)|0\rangle. \quad (4.29)$$

Comparando as equações (4.28) e (4.29), a função de dois pontos é definida como

$$\Pi(-q^2) \equiv \frac{1}{\tilde{g}_5^2(-q^2)} [z^{-1}\partial_z \mathcal{V}(q; z)]_{z\rightarrow 0}. \quad (4.30)$$

4.3 Constante de decaimento para mésons vetoriais

A constante de decaimento para mésons vetoriais será calculada de duas formas diferentes. Uma delas através do propagador *bulk to boundary*. A outra forma será a partir da obtenção da função de Green para a equação de movimento do modelo de parede macia. Ao fim do capítulo as duas expressões obtidas serão comparadas.

Cálculo da função de Green para a equação de movimento do modelo de parede macia

A equação de movimento no espaço dos momentos (2.17) consiste em um problema de Sturm-Liouville regular. Pode-se resolvê-la pelo método operatorial onde é considerado que parte da equação atua como operador numa solução específica correspondente a um determinado autovalor. Desta forma, reescreve-se a equação (2.17) como

$$\partial_z \left[z^{-1} e^{-\phi(z)} \partial_z \tilde{V}^\mu(q, z) \right] = q^2 z^{-1} e^{-\phi(z)} \tilde{V}^\mu(q, z), \quad (4.31)$$

onde o lado esquerdo da equação é tomado como um operador e o lado direito está associado ao operador momento da partícula. Portanto tem-se as seguintes equações de autovalores:

$$q^2\psi(z) = -m_n^2\psi(z) \quad (4.32)$$

$$\partial_z \left[z^{-1} e^{-k^2 z^2} \partial_z \psi(z) \right] = -m_n^2 z^{-1} e^{-k^2 z^2} \psi(z). \quad (4.33)$$

A função de Green deve satisfazer ambas as equações acima tal que:

$$z^{-1} e^{-k^2 z^2} (-q^2 - m_n^2) \mathcal{G}(q; z, z') = \delta(z - z'), \quad (4.34)$$

$$\partial_z \left[z^{-1} e^{-k^2 z^2} \partial_z \mathcal{G}(q; z, z') \right] + m_n^2 z^{-1} e^{-k^2 z^2} \mathcal{G}(q; z, z') = \delta(z - z'). \quad (4.35)$$

Para um problema de Sturm-Liouville regular a função delta de Dirac pode ser escrita em termos das autofunções da equação

$$\delta(z - z') = z'^{-1} e^{-k^2 z'^2} \sum_n^{\infty} \psi_n^*(z') \psi_n(z). \quad (4.36)$$

A autofunção ψ_n é calculada na seção 2.2

$$\psi_n(z) = \frac{z^2 k^2}{R} \sqrt{\frac{2}{n+1}} L_n^1(k^2 z^2). \quad (2.22)$$

Dada sua expressão vê-se que ela é real implicando que $\psi^* = \psi$. Portanto a função de Green será dada por:

$$\begin{aligned} z^{-1} e^{-k^2 z^2} (-q^2 - m_n^2) \mathcal{G}(q; z, z') &= z^{-1} e^{-k^2 z^2} \sum_n^{\infty} \psi_n(z) \psi_n(z') \\ \mathcal{G}(q; z, z') &= \sum_n^{\infty} \frac{\psi_n(z) \psi_n(z')}{(-q^2 - m_n^2)} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Cálculo da constante de decaimento pela função de Green

A primeira forma de calcular a constante de decaimento se dá pela função de Green da equação (2.18) que é dada por:

$$\mathcal{G}(q; z, z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n(z) \psi_n(z')}{-q^2 - m_n^2}, \quad (4.38)$$

e pode ser relacionada com o propagador pela expressão:

$$\mathcal{V} = \left[-z'^{-1} e^{-z'^2} \partial_{z'} \mathcal{G}(q; z, z') \right]_{z' \rightarrow 0}. \quad (4.39)$$

A função de correlação obtida a partir da substituição das equações (4.38) e (4.39) na expressão (4.30) toma a forma:

$$\Pi(-q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\tilde{g}_5^2} z^{-1} \partial_z \psi_n(z) \frac{z'^{-1} \partial_{z'} \psi_n(z')}{-q^2 - m_n^2} \right\}_{z \rightarrow 0}. \quad (4.40)$$

Comparando as expressões (4.40) e (3.38), têm-se para a constante de decaimento:

$$f_n = \frac{z^{-1} \partial_z \psi_n(z)}{\tilde{g}_5 m_n} \quad (4.41)$$

Cálculo da constante de decaimento pelo propagador *bulk to boundary*

Ao retornar à equação de movimento (2.17) no espaço de Fourier, usa-se a decomposição (4.17). Desta forma obtém-se a equação de movimento para o propagador *bulk to boundary* com $\phi = k^2 z^2$

$$\partial_z \left[z^{-1} e^{-k^2 z^2} \partial_z \mathcal{V}(q, z) \right] - q^2 z^{-1} e^{-k^2 z^2} \mathcal{V}(q, z) = 0. \quad (4.42)$$

Se as derivadas desta equação forem com relação a $k^2 z^2$ no lugar de z , implica-se

$$d(k^2 z^2) = 2z k^2 dz \quad , \quad \text{ou} \quad \frac{1}{dz} = \frac{2z k^2}{d(k^2 z^2)}. \quad (4.43)$$

Com isto a equação de movimento se torna

$$\begin{aligned} 2z k^2 \frac{d}{d(k^2 z^2)} \left[z^{-1} e^{k^2 z^2} \frac{d\mathcal{V}(q, z)}{dz} \times \frac{2z k^2}{2z k^2} \right] - q^2 z^{-1} e^{k^2 z^2} \mathcal{V}(q, z) &= 0 \\ 4z k^4 \frac{d}{d(k^2 z^2)} \left[e^{k^2 z^2} \frac{d\mathcal{V}(q, z)}{d(k^2 z^2)} \right] - q^2 z^{-1} e^{k^2 z^2} \mathcal{V}(q, z) &= 0 \\ z^2 k^2 \frac{d}{d(k^2 z^2)} \left[e^{k^2 z^2} \frac{d\mathcal{V}(q, z)}{d(k^2 z^2)} \right] - \frac{q^2}{4k^2} e^{k^2 z^2} \mathcal{V}(q, z) &= 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Esta é uma expressão correspondente a equação Hipergeométrica Confluyente (ou equação de Kummer) [43]

$$x \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + (c - x) \frac{dy(x)}{dx} - ay(x) = 0. \quad (4.45)$$

Onde neste caso os parâmetros assumem os valores $a = \frac{q^2}{4k^2}$, $c = 0$, $x = k^2 z^2$ e a variável $y(x) = \mathcal{V}(q, z)$. A expressão final da equação é dada por

$$z^2 k^2 \frac{d^2 \mathcal{V}(q, z)}{d(k^2 z^2)^2} - k^2 z^2 \frac{d\mathcal{V}(q, z)}{d(k^2 z^2)} - \frac{q^2}{4k^2} \mathcal{V}(q, z) = 0. \quad (4.46)$$

A solução geral de uma equação deste tipo é

$$\mathcal{V}(q, z) = AF_1(a, 0, z^2 k^2) + BU(a, 0, z^2 k^2), \quad (4.47)$$

onde ${}_1F_1$ é a função hipergeométrica confluyente do primeiro tipo e U é a função de Tricomi. Quando $z = 0$, ${}_1F_1$ é singular. Por isso a constante A é escolhida para ser nula e o propagador será dado pela função de Tricomi. Logo a solução geral se torna

$$\mathcal{V}(q, z) = BU(a, 0, z^2 k^2). \quad (4.48)$$

A função de Tricomi é definida para todos os valores reais de seu argumento ($z^2 k^2$) e de seus dois parâmetros (a e b , que neste caso é zero). Porém para cada conjunto de valores destes três termos, ela possui diferentes comportamentos. Quando, por exemplo, o argumento $k^2 z^2$ é menor que zero a função de Tricomi tende a valores complexos. Para o caso que está sendo abordado será considerado $a > 0$ e $x > 0$ implicando no formato integral para a função [44]

$$U(a, b, x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{(1+t)^b} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right) dt. \quad (4.49)$$

Da condição de contorno $\mathcal{V}(q, z = z_0) = 1$ é possível determinar a constante B

$$B = \frac{1}{U(a, 0, 0)} = \Gamma(1+a), \quad \text{onde} \quad U(a, 0, 0) = (1+a)_{-a} = \frac{1}{\Gamma(1+a)} \quad (4.50)$$

e $(1+a)_{-a}$ representa o símbolo de Pochhammer. Sendo assim o propagador pode ser reescrito utilizando este formato de solução pois o parâmetro a e o argumento $k^2 z^2$ também

são maiores que zero. Nos cálculos a seguir será considerado $k = 1$. Desta forma assumindo $b = 0$ e $x = z^2$ o propagador é escrito como

$$\mathcal{V}(q, z) = a \int_0^1 dt t^{a-1} \exp\left(\frac{-t}{1-t} z^2\right). \quad (4.51)$$

Este formato para o propagador $\mathcal{V}(q, z)$ não foi obtido de forma analítica. Apenas aproveitou-se a solução (4.49) catalogada para a equação de Kummer com parâmetros e argumento bem determinados, que condizem com os parâmetros e argumento do propagador. Portanto é interessante verificar se este satisfaz a equação de movimento (4.42), consistindo de fato numa solução. O primeiro termo desta equação deve resultar

$$\partial_z \left[z^{-1} e^{-z^2} \partial_z \mathcal{V}(q, z) \right] = 4Raz \int_0^1 dt \frac{t^a}{(1-t)^2} \exp\left(\frac{-t}{1-t} z^2\right). \quad (4.52)$$

Enquanto segundo termo é proporcional ao propagador que possui a forma integral (4.51).

Esta equação pode ser resolvida por partes

$$\mathcal{V}(q, z) = \int_0^1 dx \frac{d}{dt} \left[x^a \exp\left(\frac{-t}{1-t} z^2\right) \right] - \int_0^1 dt t^a \frac{d}{dt} \left[\exp\left(\frac{-t}{1-t} z^2\right) \right]. \quad (4.53)$$

Para o primeiro termo os limites da integral serão analisados através de um parâmetro infinitesimal ϵ

$$\int_0^1 dt \frac{d}{dt} \left[t^a \exp\left(\frac{-t}{1-t} z^2\right) \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} dt \frac{d}{dt} \left[t^a \exp\left(\frac{-t}{1-t} z^2\right) \right]. \quad (4.54)$$

Toma-se os limites de ϵ tendendo a 0^\pm . Quando é tomado o limite de $\epsilon \rightarrow 0^-$ a exponencial diverge. Já para $\epsilon \rightarrow 0^+$ este termo contribui com zero e é bem comportado, veja

$$\begin{aligned} \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \left[t^a \exp\left(\frac{-t}{1-t} z^2\right) \right] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[(1-\epsilon)^a \exp\left(\frac{-(1-\epsilon)}{1-(1-\epsilon)} z^2\right) - \epsilon^a \exp\left(\frac{-\epsilon}{1-\epsilon} z^2\right) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto o propagador é dado somente pelo segundo termo da equação (4.53)

$$\mathcal{V}(q, z) = z^2 \int_0^1 dt \frac{t^a}{(1-t)^2} \exp\left(\frac{-t}{1-t} z^2\right). \quad (4.55)$$

Sendo assim a equação de movimento (4.42) se torna:

$$Rz \int_0^1 dt \frac{t^a}{(1-t)^2} (4a - q^2) \exp\left(\frac{-z^2}{1-t}\right) = 0 \quad (4.56)$$

Esta expressão somente será nula se $(4a - q^2) = 0$, ou seja, se $a = \frac{q^2}{4}$. Portanto a representação integral para o propagador satisfaz a equação de movimento se o parâmetro a tiver o valor especificado anteriormente. Adotando o formato do propagador após a integração por partes (4.55) é possível comparar o integrando com uma função generalizada conhecida

$$g(\alpha, \beta) = (1 - \beta)^{-\omega-1} \exp\left(\frac{\alpha\beta}{\beta-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\omega(\alpha) \beta^n \quad (4.57)$$

onde $L_n^\omega(\alpha)$ é o polinômio associado de Laguerre. Identificando que $\omega = 1$, $\beta = t$ e $\alpha = z^2$ reescreve-se o propagador como:

$$\mathcal{V}(q, z) = z^2 \int_0^1 dt t^a \sum_{n=0}^{\infty} L_n^1(z^2) t^n \quad (4.58)$$

A função de Laguerre não possui dependência na variável t e o somatório é tomado sobre n . Portanto a integral em t pode entrar no somatório resultando

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(q, z) &= z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(L_n^1(z^2) \int_0^1 dt t^{(a+n)} \right) \\ &= z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^1(z^2)}{a+n+1}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Note que esta expressão para o propagador possui pólos quando $a+n+1=0$. Sabendo que $a = \frac{q^2}{4}$ o pólos serão dados nos pontos em que

$$-q^2 = 4(n+1). \quad (4.60)$$

Ou seja, os pólos indicam os valores das massas dos mésons vetoriais. Esta equação é equivalente a equação (2.21) que foi obtida no capítulo 2, com a constante $k = 1$. Conhecendo o propagador pode-se calcular a função de dois pontos a partir da expressão (4.30):

$$\Pi(-q^2) = \frac{2}{\tilde{g}_5^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{-q^2 - m_n^2} \quad (4.61)$$

e portanto a constante de decaimento na convenção adotada é dada por

$$f_n = \frac{\sqrt{2}}{\tilde{g}_5}. \quad (4.62)$$

Repare que as expressões (4.41) e (4.62) fornecem valores degenerados para as constantes de decaimento, sendo que experimentalmente observa-se um comportamento decrescente de f_n com relação ao nível de excitação n para os mésons vetoriais.

Capítulo 5

Modelo de parede macia modificado com corte UV

As constantes de decaimento para mésons vetoriais pesados obtidas no modelo de parede macia são degeneradas. Isto significa que o valor da constante de decaimento é o mesmo para o estado fundamental e para todos os estados excitados de mésons vetoriais. O que é observado experimentalmente indica um comportamento decrescente do valor destas constantes a medida que o nível de excitação das partículas aumenta. Portanto o modelo de parede macia não é adequado para estudar estas constantes de decaimento.

Com o objetivo de incluir o comportamento decrescente das constantes de decaimento será proposto um modelo semelhante ao de parede macia. Porém ele será modificado por um corte no ponto z_0 na região UV. Desta forma é atribuída a teoria um novo parâmetro, o qual corresponde ao inverso da escala de energia no regime fortemente acoplado. As matrizes de transição serão calculadas holográficamente a partir da função de dois pontos dos operadores corrente no ponto de corte z_0 .

5.1 Validade do modelo

A ação é dada pela mesma expressão do modelo de parede macia (2.9) sem o corte UV.

$$I = \int d^4x dz \sqrt{-g} e^{-\phi(z)} \left\{ \frac{-1}{4g_5^2} F_{mn} F^{mn} \right\}. \quad (2.9)$$

Porém a modificação pelo corte impõe que o espaço onde as funções de onda existem é limitado no ponto z_0 . Isto implica que a integração na coordenada radial z é limitada inferiormente no ponto z_0

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \int_{z_0}^{\infty} dz \sqrt{-g} e^{-\phi(z)} \left\{ \frac{-1}{4g_5^2} F_{mn} F^{mn} \right\}. \quad (5.1)$$

Isto é fácil de compreender ao pensar que a fronteira foi deslocada da origem para o ponto z_0 . Portanto será em relação aos campos neste ponto que os cálculos para massas e constantes de decaimento serão feitos. Sendo assim, a integral na coordenada radial z do espaço AdS desconsidera a região $0 \leq z \leq z_0$.

A equação de movimento (4.46) no espaço de Fourier com a decomposição (4.17) do campo vetorial em termos do propagador *bulk to boundary*, permanece a mesma. No entanto as condições de contorno mudaram. Os campos devem ser soluções de forma que o propagador na fronteira satisfaça a condição $\mathcal{V}(q, z_0) = 1$. Desta forma a solução é a mesma dada pela expressão (4.48). Mas para esta situação a constante B será

$$B = \frac{1}{U\left(\frac{-q^2}{4k^2}, 0, k^2 z_0^2\right)}, \quad (5.2)$$

onde U é a função hipergeométrica de Tricomi. Consequentemente a solução se torna

$$\mathcal{V}(q, z) = \frac{U\left(\frac{-q^2}{4k^2}, 0, k^2 z^2\right)}{U\left(\frac{-q^2}{4k^2}, 0, k^2 z_0^2\right)}. \quad (5.3)$$

5.2 Ação *on shell*

O procedimento para o cálculo da ação *on shell* é o mesmo feito para o modelo de parede macia até a equação (4.19). A partir deste ponto é necessário considerar os limites do espaço em que as soluções de campos existem. Como já discutido, as integrais na coordenada radial z são válidas a partir do ponto z_0 e se estendem até o infinito. Já as integrais

nas outras coordenadas são válidas em todo o espaço. Logo

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{2\tilde{g}_5^2} \int_{z_0}^{\infty} dz \lim_{x \rightarrow \infty} (z^{-1} e^{-\phi(z)} \eta^{\mu p} \eta^{nq} V_n F_{pq}) + \\
&+ \frac{1}{2\tilde{g}_5^2} \int_{z_0}^{\infty} dz \lim_{x \rightarrow -\infty} (z^{-1} e^{-\phi(z)} \eta^{\mu p} \eta^{nq} V_n F_{pq}) - \\
&- \frac{1}{2\tilde{g}_5^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \lim_{z \rightarrow \infty} (z^{-1} e^{-\phi(z)} \eta^{zp} \eta^{nq} V_n F_{pq}) + \\
&+ \frac{1}{2\tilde{g}_5^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \lim_{z \rightarrow z_0} (z^{-1} e^{-\phi(z)} \eta^{zp} \eta^{nq} V_n F_{pq}) .
\end{aligned} \tag{5.4}$$

A solução proposta para o méson vetorial é uma superposição de ondas planas, desta forma os dois primeiros termos no limite em que $x \rightarrow \pm\infty$, são nulos. O terceiro termo tende a zero devido a dependência inversa à coordenada radial z no limite em que ela tende ao infinito. Portanto o único termo sobrevivente na ação *on shell* é:

$$I_{onshell} = -\frac{1}{2\tilde{g}_5^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left(z^{-1} e^{-k^2 z^2} V_\mu \partial_z V^\mu \right)_{z \rightarrow z_0} . \tag{5.5}$$

5.3 Espectro e constantes de decaimento para mésons vetoriais

Para encontrar a constante de decaimento usa-se a expressão (4.30) para função de dois pontos

$$\Pi_{UV}(-q^2) = -\frac{e^{-k^2 z_0^2}}{\tilde{g}_5^2(-q^2)U(\frac{-q^2}{4k^2}, 0, k^2 z_0^2)} \left\{ z^{-1} \partial_z \left[U(\frac{-q^2}{4k^2}, 0, k^2 z^2) \right] \right\}_{z=z_0} . \tag{5.6}$$

A condição de contorno impõe que o propagador *bulk-to-boundary* deve assumir valor unitário na fronteira $\mathcal{V}(q, z = z_0) = 1$. Para derivar a função de Tricomi com relação a z deve-se utilizar a propriedade [44]

$$\partial_z U(a, c, z) = -aU(a+1, c+1, z) . \tag{5.7}$$

Resultando na seguinte expressão para a função de dois pontos

$$\Pi_{UV}(-q^2) = \frac{e^{-k^2 z_0^2}}{2\tilde{g}_5^2} \frac{U(\frac{-q^2}{4k^2} + 1, 1, k^2 z_0^2)}{U(\frac{-q^2}{4k^2}, 0, k^2 z_0^2)} . \tag{5.8}$$

Para obter as constantes de decaimento e o espectro de massas para o méson vetorial basta avaliar esta expressão para a função de dois pontos. Pela prescrição (3.40) entende-se que as constantes de decaimento estão associadas ao resíduo dos pólos de uma função de dois pontos, enquanto que as massas estão associadas aos pólos. Portanto deve-se localizar os pontos em que (5.8) é singular.

As funções presentes no numerador e no denominador da expressão (5.8) possuem dependências diferentes, por isso serão avaliadas separadamente e numericamente pelo programa *Mathematica*.

Para o numerador procura-se os pontos em que a função de Tricomi tenha valor infinito. Esta análise foi feita para uma série de valores de k e z_0 a partir de gráficos que foram traçados para a função de Tricomi. A partir destes gráficos foi averiguado que não importa o quão grande a função do numerador seja, ainda assim ela possuirá um valor finito. Portanto não há singularidades na função do numerador.

Portanto resta avaliar as singularidades quando o denominador desta função assume valores iguais a zero. Neste caso os gráficos traçados para diferentes valores de k e z_0 mostram as diferentes raízes que função de Tricomi do denominador possui.

Como demonstrado no capítulo 3 as constantes de decaimento f_n são obtidas a partir do cálculo de resíduos dos pólos da função de dois pontos. Também foi mostrado que os pólos ocorrem para valores que correspondem a massa de uma partícula. No caso deste modelo de parede macia modificado com um corte UV foi mostrado que a função de dois pontos não é uma soma de propagadores como a que foi obtida na equação (3.21). Porém esta função possui singularidades quando a função do denominador é zero. Por isto pode-se aproxima-la na vizinhança dos pólos $-q^2 = q_n^2$

$$\lim_{-q^2 \rightarrow q_n^2} \approx \frac{f_n^2}{-q^2 - q_n^2}. \quad (5.9)$$

Os resíduos dos pólos desta expansão aproximada da função de dois pontos são, portanto, as constantes de decaimento ao quadrado f_n^2 na vizinhança próxima ao pólo. En-

quanto que os valores dos pólos q_n^2 são as massas ao quadrado do méson vetorial correspondente ao nível de excitação n .

As raízes desta função para determinados valores de k e z_0 escolhidos, serão denotadas por $a = \chi_n$

$$U(\chi_n, 0, k^2 z_0^2) = 0, \quad (5.10)$$

onde as massas das partículas são dadas por

$$-q_n^2 \equiv m_n^2 = 4k^2 \chi_n. \quad (5.11)$$

O valor de χ_n é obtido numericamente. Para as constantes de decaimento o cálculo também é feito de forma numérica, a partir do ajuste da expressão

$$f_n^2 = \lim_{-q^2 \rightarrow q_n^2} (-q^2 - q_n^2) \Pi(-q^2). \quad (5.12)$$

Este ajuste é feito testando os valores dos parâmetros k e $1/z_0$. De acordo com os valores escolhidos as massas e constantes de decaimento obtidas serão diferentes. Sendo assim os valores escolhidos para estes parâmetros serão aqueles que mais aproximam os valores de massas e constantes de decaimento do modelo aos valores obtidos experimentalmente.

Capítulo 6

Massas e Constantes de decaimento no modelo de parede macia modificado com corte UV

O modelo de parede macia modificado pelo corte na região UV apresentado no capítulo anterior resultou numa função de dois pontos que não pode ser escrita como uma soma de propagadores livres. Para obter as massas e as constantes de decaimento para mésons vetoriais é necessário usar uma aproximação da função de dois pontos próxima aos polos. Desta forma é possível inferir o valor destas propriedades físicas a partir da localização dos polos da função de dois pontos.

Como já avaliado, os polos para a função de dois pontos (5.8) deste modelo ocorrem quando a função de Tricomi do denominador vai a zero, gerando pontos singulares. Logo para encontrar estes polos é necessário encontrar as raízes da função de Tricomi definida no denominador. A função de Tricomi obtida possui dois parâmetros livres, k e z_0 . Estas foram inseridas na teoria de supergravidade do AdS com o objetivo de quebrar a invariância conforme do espaço de calibre dual e gerar soluções normalizáveis para a equação de movimento. Estas soluções normalizáveis no espaço de anti de Sitter correspondem aos operadores de estados físicos na teoria de calibre.

Os valores para estes parâmetros não são pré-definidos. As únicas condições impostas são:

1. k deve ser real e positivo. Isto implica que o corte exponencial seja mais pronunciado na região IR, onde a constante de acoplamento dos hádros é grande;
2. z_0 deve possuir um valor positivo próximo a fronteira de forma que este corte se dê na região UV.

Portanto serão atribuídos a estes parâmetros diversos valores para determinar as massas e constantes de decaimento de mésons vetoriais. Para avaliar se este modelo possui boa preditibilidade para obter estas propriedades físicas será necessário comparar com os valores já determinados experimentalmente. Também será definido o Erro Quadrático Médio para quantificar o ajuste do modelo.

6.1 Dados Experimentais e Erro Quadrático Médio

Os valores experimentais para massas e constantes de decaimento de mésons vetoriais foram retirados do PDG (Particle Data Group) [45]. Neste trabalho serão obtidas massas e constantes de decaimento para: o charmônio com um par de quark e antiquark tipo *charm* de valência ($c\bar{c}$); e para o botomônio com um par de quark e antiquark tipo *bottom* de valência ($b\bar{b}$). Os valores de massas e constantes de decaimento foram organizados nas tabelas 6.1 e 6.2.

	Charmônio	
	Massas(MeV)	f_n (MeV)
1s	3096.916 ± 0.011	416.2 ± 5.3
2s	3686.109 ± 0.012	296.1 ± 2.5
3s	4039 ± 1	187.1 ± 7.6
4s	4421 ± 4	160.8 ± 9.7

Tabela 6.1: Valores experimentais de massa e constante de decaimento do Charmônio.

	Botomônio	
	Massas(MeV)	f_n (MeV)
1s	9460.3 ± 0.26	715.0 ± 2.4
2s	10023.26 ± 0.32	497.4 ± 2.2
3s	10335.2 ± 0.5	430.1 ± 1.9
4s	10579.4 ± 1.2	340.7 ± 9.1

Tabela 6.2: Valores experimentais de massa e constante de decaimento do botomônio.

De forma a avaliar o grau de preditibilidade do modelo foi calculado o erro quadrático médio designado por δ_{rms} . Este erro é usado para medir as diferenças entre valores de

variáveis que são previstas pelo modelo e os valores que concretamente são medidos. Por este erro verifica-se o quão confiável é um modelo com N elementos obtidos a partir de N_p parâmetros. A expressão é

$$\delta_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N - N_p} \sum_i^N \left(\frac{\delta O_i}{O_i} \right)^2} \quad (6.1)$$

onde O_i é a medida do valor experimental e δO_i é o desvio do valor calculado pelo modelo com relação ao valor experimental.

6.2 Resultados do Artigo

O modelo de parede macia com corte na região UV foi apresentado na referência [51]. Nela é sugerido que os melhores valores para ajuste do modelo são dados por: $k_c = 1.2 GeV$, $k_b = 3.4 GeV$ e $1/z_0 = 12.5 GeV$. Onde k_c é o parâmetro k para o charmônio e de modo análogo k_b é para o botomônio.

As massas foram obtidas a partir da expressão (5.11) que depende das raízes da função de Tricomi do denominador da função de dois pontos. Considerando os valores dos parâmetros sugeridos para o charmônio $k_c = 1.2 GeV$ e $1/z_0 = 12.5 GeV$ o gráfico da função de Tricomi retorna as raízes da função.

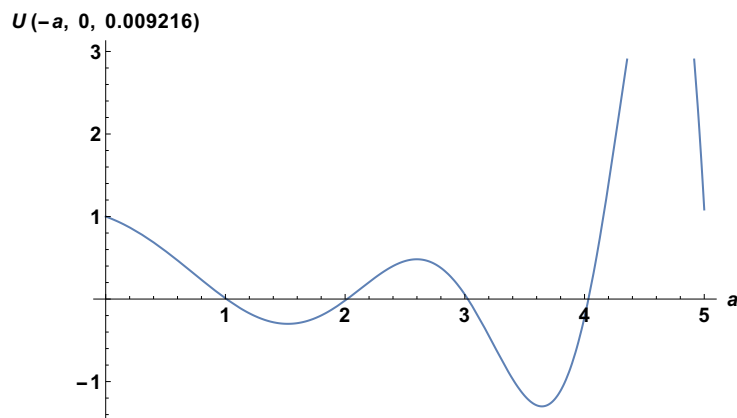


Figura 6.1: Raízes da função de Tricomi para o charmônio com parâmetros $k_c = 1.2 GeV$ e $1/z_0 = 12.5 GeV$.

As quatro primeiras raízes são mostradas no gráfico. Substituindo seus valores na

expressão (5.11) são obtidos os valores de massa para charmônio que foram organizados na tabela 6.3. Da mesma forma estão listadas as constante de decaimento dos quatro primeiros estados excitados. Elas foram calculadas a partir da aproximação para a função de dois pontos (5.9).

Para o botomônio os valores dos parâmetros foram: $k_b = 3.4$ GeV e $1/z_0 = 12.5$ GeV. As raízes para a função de Tricomi são mostradas no gráfico da figura 6.2. Enquanto as massas e constantes de decaimento, calculados a partir das expressões (5.11) e (5.9), estão na tabela 6.4.

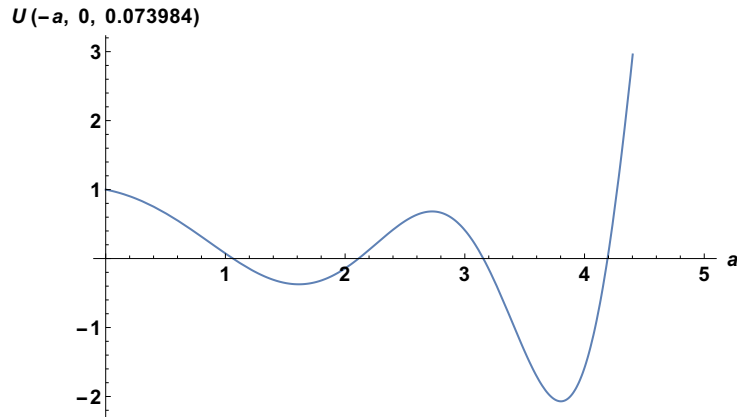


Figura 6.2: Raízes da função de Tricomi para o botomônio com parâmetros $k_b = 3.4$ GeV e $1/z_0 = 12.5$ GeV.

Charmônio		
	Massas(MeV)	f_n (MeV)
1s	2410	258.8
2s	3409	251.7
3s	4174	245.9
4s	4819	241.0

Tabela 6.3: Valores experimentais de massa e constante de decaimento do Charmônio.

Botomônio		
	Massas(MeV)	f_n (MeV)
1s	7011	627
2s	9883	574
3s	12077	538
4s	13923	512

Tabela 6.4: Valores experimentais de massa e constante de decaimento do botomônio.

O erro quadrático médio foi calculado considerando o número de parâmetros $N_p = 3$, ou seja, k_c , k_b e $1/z_0$. O número de elementos obtidos utilizando este três parâmetros foram 16: quatro massas e quatro constantes de decaimento para o charmônio e para o botomônio. O erro quadrático médio obtido foi de 30 %.

6.3 Valores Testados para os parâmetros k e $1/z_0$

Nesta seção foram testados diversos valores para os parâmetros k_c , k_b , $1/z_{0c}$ e $1/z_{0b}$, onde o índice c está relacionado ao charmônio e o índice b remete ao botomônio. As tabelas 6.5 e 6.6 contém os valores dos parâmetros que melhor ajustaram o modelo aos dados experimentais. Uma das tabelas para o charmônio e a outra para o botomônio. Nas mesmas tabelas encontra-se os respectivos erros calculados pela expressão (6.1).

O erro δ_{rms} foi calculado levando em consideração o ajuste do modelo para cada méson. Desta forma na tabela com os valores testados para o charmônio o erro considera apenas o número de parâmetros para o charmônio. Neste caso os parâmetros são k_c e $1/z_{0c}$ indicando $N_p = 2$ e $N = 8$ (quatro massas e quatro constantes de decaimento). O mesmo foi feito para o botomônio.

Charmônio		
k_c	$1/z_{0c}$	erro
1.1	8	0.2797
1.19	10	0.2903
1.2	12.5	0.3086
1.2	10	0.2921
1.2	6	0.2558
1.21	6	0.2557
1.21	6.5	0.2591
1.22	6	0.2553
1.25	6	0.2572

Tabela 6.5: Melhores valores dos parâmetros k_c e $1/z_{0c}$ com respectivos erros.

Botomônio		
k_b	$1/z_{0b}$	erro
3	8	0.2169
3.1	8	0.2138
3.15	8	0.2142
3.3	8	0.2214
3.35	8	0.2259
3.4	12.5	0.3040
3.4	8	0.2310
3.4	10	0.2538
3.4	6	0.2708

Tabela 6.6: Melhores valores dos parâmetros k_b e $1/z_{0b}$ com respectivos erros.

Os valores escritos em negrito são os que possuem menor erro. Isto é, estes foram os valores que melhor se assemelharam aos valores esperados experimentalmente. Repare que para o botomônio o erro obtido foi menor do que o que foi obtido para o charmônio. Desta forma pode-se afirmar que o modelo para o botomônio obteve um melhor ajuste. Dentre os valores de k e $1/z_0$ que melhor se ajustaram isoladamente para cada méson, foram feitas algumas combinações para avaliar o ajuste do modelo incluindo os dois mésons. Os

erros calculados foram alocados na tabela 6.7:

Combinações				
k_c	k_b	$1/z_{0c}$	$1/z_{0b}$	erro
1.2	3.1	6	8	0.2358
1.21	3.1	6	8	0.2282
1.21	3.3	6	8	0.2391
1.21	3.4	6	8	0.2436
1.21	3.4	8	8	0.2438

Tabela 6.7: Melhores valores dos parâmetros k_c , k_b , $1/z_{0c}$ e $1/z_{0b}$.

O número total de termos obtidos ao considerar os parâmetros para os dois mésons é $N = 16$ (quatro massas e quatro constantes de decaimento para cada méson). Veja na tabela 6.7 que as quatro primeiras combinações possuem número de parâmetros $N_p = 4$. A última combinação supõe que $1/z_{0c} = 1/z_{0b}$, portanto $N_p = 3$.

O menor erro obtido a partir do ajuste dos parâmetros está indicado na tabela em negrito: $k_c = 1.21$ GeV, $k_b = 3.1$ GeV, $1/z_{0c} = 6$ GeV e $1/z_{0b} = 8$ GeV. O erro obtido foi de 23%, sendo menor que o erro de 30% obtido na referência [51]. Os valores de massas e constantes de decaimento obtidos considerando que os parâmetros assumam estes valores estão dispostos em duas tabelas, uma para cada méson.

	Botomônio	$k = 3.1$ e $z_0 = 8$
	Massas(MeV)	f_n (MeV)
1s	6557	507
2s	9198	452
3s	11210	418
4s	12899	394

Tabela 6.8: Massas e constantes de decaimento para o charmônio obtidos a partir do modelo com parâmetros ajustados.

	Charmônio	$k = 1.21$ e $1/z_0 = 6$
	Massas(MeV)	f_n (MeV)
1s	2464	239
2s	3479	224
3s	4257	213
4s	4912	204

Tabela 6.9: Massas e constantes de decaimento para o botomônio obtidos a partir do modelo com parâmetros ajustados.

Capítulo 7

Conclusão

Nesta dissertação foi abordado um modelo holográfico para obtenção do espectro de massas e constantes de decaimento para mésons vetoriais. Este modelo é uma modificação do modelo holográfico de parede macia. Esta modificação foi feita para que as constantes de decaimento tenham um comportamento decrescente com relação ao nível de excitação radial apresentado pelos mésons vetoriais.

Estes modelos holográficos são construídos a partir de uma aproximação da correspondência *AdS/CFT* e tem por finalidade tratar as interações fortes no regime de baixas energias. Esta aproximação consiste em: a) compactar as dimensões com estrutura supersimétrica num espaço específico e trabalhar apenas com o espaço de anti de Sitter, que neste caso está definido em cinco dimensões; b) quebrar a invariância conforme da teoria de calibre por meio da modificação da geometria do espaço de anti de Sitter.

Para o modelo de parede macia a modificação é dada por um fator exponencial que introduz um parâmetro k positivo. Este modelo surgiu como uma alternativa de obter a relação de massa ao quadrado e nível de excitação radial apropriada para os hádrons. E de fato, como foi visto no capítulo 2, a relação entre o espectro de massas e o nível de excitação radial é consistente com o esperado experimentalmente.

Além de massas de partículas, estes modelos holográficos também permitem calcular constantes de decaimento a partir da função de dois pontos. No capítulo 3 foi mostrado que a função de dois pontos para mésons vetoriais pode ser escrita como um somatório

de propagadores livres. A constante de decaimento pode ser obtida a partir do cálculo de resíduos desta função de dois pontos definida no espaço dos momentos. Já as massas para estas partículas são dadas pelos polos da função de dois pontos.

Este método de obter tais propriedades físicas de partículas, usado em teorias quânticas de campo, pode ser utilizado na holografia desde a prescrição de Witten. Por ela a função de dois pontos dos operadores na teoria de calibre é obtida a partir do funcional gerador na teoria de supergravidade onde as fontes para estes operadores são os campos tomados na fronteira da correspondência.

Desta forma este método foi utilizado para obter as constantes de decaimento no modelo de parede macia. Porém o espectro de constante de decaimento para mésons vetoriais é decrescente com o nível de excitação radial segundo dados obtidos experimentalmente. E no modelo de parede macia o espectro obtido é degenerado. Isto significa que o valor da constante de decaimento é o mesmo independente do nível de excitação radial da partícula. Por conta disso é proposta uma modificação do modelo de parede macia. Esta modificação é dada por um corte no espaço de anti de Sitter na região UV próxima a fronteira.

Portanto um novo parâmetro é imposto ao modelo de parede macia a fim de atribuir o comportamento decrescente das constantes de decaimento para os mésons com relação ao nível de excitação radial. No entanto a função de dois pontos obtida não pode ser escrita como uma soma de propagadores livres. Logo foi necessário procurar os polos da função de dois pontos. Pela análise feita viu-se que os polos ocorrem nas raízes da função do denominador. Próximo a estes polos a função de dois pontos pode ser aproximada a um somatório das constantes de decaimento sobre os polos. Consequentemente a relação para as massas possui dependência direta com estes pontos singulares e a constante de decaimento é obtida a partir dos resíduos deste polos.

A análise para as massas e constantes de decaimento foi feita variando os parâmetros k e $1/z_0$, pois são eles os únicos parâmetros livres na função do denominador. Foram

calculadas massas e constantes de decaimento para os mésons vetoriais charmônio e botomônio. Na referência [51] em que este modelo é desenvolvido os parâmetros que melhor ajustam são dados por $k_c = 1.2$ GeV, $k_b = 3.4$ GeV e $1/z_0 = 12.5$ GeV. O erro obtido ao se comparar os valores de massas e constantes de decaimento do modelo com os valores experimentais foi de 30%.

Novos valores para os parâmetros foram testados. O melhor ajuste final do modelo incluindo dados experimentais dos dois mésons foi obtido para os parâmetros: $k_c = 1.21$ GeV, $k_b = 3.1$ GeV, $1/z_{0c} = 6$ GeV e $1/z_{0b} = 8$ GeV. Neste caso o erro obtido foi de 22%, sendo um pouco menor do que o obtido na referência [51]. O modelo também foi ajustado individualmente para cada méson. No caso do charmônio, o valores dos parâmetros que melhor aproximaram as massas e constantes de decaimento do real foram: $k_c = 1.22$ GeV e $1/z_{0c} = 6$ GeV. O erro obtido nesta situação foi de 26%. Já para o botomônio o menor erro obtido foi de 21%, onde os parâmetros possuíam valores de $k_b = 3.1$ GeV e $1/z_{0b} = 8$ GeV. Portanto é notável que o modelo possui um ajuste melhor para os mésons separadamente, sendo para o botomônio o menor erro.

Portanto o modelo holográfico de parede macia com corte UV, apesar de simples, apresenta resultados razoáveis para as massas e constantes de decaimento de mésons vetoriais. Quando comparado com o modelo de parede macia, esse modelo se aproxima mais da descrição do comportamento das interações fortes para os hádrons

Bibliografia

- [1] M. Thomson, *Modern particle physics*, Cambridge University Press (2013). 1, 2, 4
- [2] David Jeffrey Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley & Sons, Inc., 1987. 1, 6, 7
- [3] Robert Eisberg, Robert Resnick, *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, 2nd Edition, January 1985. 2
- [4] K. Langanke and G. Martinez-Pinedo, *Nuclear weak interaction processes in stars*, Rev. Mod. Phys. **75**, 819 (2003), [nucl-th/0203071]. 2
- [5] [ATLAS Collaboration], *Observation of an Excess of Events in the Search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*, ATLAS-CONF-2012-093. 2
- [6] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*, Phys. Lett. B **716**, 1 (2012) [arXiv:1207.7214 [hep-ex]]. 2
- [7] CMS Collaboration [CMS Collaboration], *Observation of a new boson with a mass near 125 GeV*, CMS-PAS-HIG-12-020. 2
- [8] K. Ranjan [CMS Collaboration], *Observation of a new boson at the LHC with the CMS Experiment*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **251-252**, 129 (2014). 2

- [9] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*, Perseus Books Publishing (1995). 3, 25, 29, 31, 32, 74
- [10] W. Bardeen, H. Fritzsch e Murray Gell-Mann, *Scale and Conformal Symmetry in Hadron Physics*, John Wiley and Sons (1973). 3
- [11] H. Fritzsch and M. Gell-Mann, *50 years of quarks*, World Scientific Publishing Co. (2015). 3, 9
- [12] A. Pich, *Aspects of quantum chromodynamics*, [hep-ph/0001118]. 4
- [13] Cheng, T.P. and Li, L.F., *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford science publications, Clarendon Press (1984). 4
- [14] N. P. Jurik, *Observation of J/ψ p resonances consistent with pentaquark states in $\Lambda_b^0 \rightarrow J/\psi K^- p$ decays*, CERN-THESIS-2016-086. 4
- [15] M. Gell-Mann, *A Schematic Model of Baryons and Mesons*, Phys. Lett. **8** (1964) 214. 5, 8
- [16] G. Zweig, *An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2*, Developments in the Quark Theory of Hadrons, Volume 1. Edited by D. Lichtenberg and S. Rosen. pp. 22-101. 5
- [17] A. V. Manohar, *An Introduction to spin dependent deep inelastic scattering*, In *Lake Louise 1992, Symmetry and spin in the standard model* 1-46, [hep-ph/9204208]. 6
- [18] J. D. Bjorken and E. A. Paschos, *Inelastic Electron Proton and gamma Proton Scattering, and the Structure of the Nucleon*, Phys. Rev. **185**, 1975 (1969). 7
- [19] J. D. Bjorken, *Theoretical ideas on inelastic electron and muon scattering*, In *Bjorken, J.D.: In conclusion* 7-25. 7

- [20] C. H. Llewellyn Smith, *Inelastic Lepton Scattering In Gluon Models*, Phys. Rev. D **4**, 2392 (1971). 8
- [21] G. 'tHooft, *Renormalization of massless Yang-Mills fields*, Nucl. Phys. B **33**, 173 (1971). 8
- [22] K. Symanzik, *A field theory with computable large-momenta behavior*, Lett. Nuovo Cim. **6S2**, 77 (1973), [Lett. Nuovo Cim. **6**, 77 (1973)]. 8
- [23] H. D. Politzer, *Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973). 8
- [24] D. J. Gross and F. Wilczek, *Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973). 8
- [25] K. G. Wilson, *Confinement of Quarks*, Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974). 9
- [26] A. Karch and E. Katz, *Adding flavor to AdS / CFT*, JHEP **0206**, 043 (2002), [hep-th/0205236]. 9
- [27] H. Boschi-Filho, N. R. F. Braga and C. N. Ferreira, *Static strings in Randall-Sundrum scenarios and the quark anti-quark potential*, Phys. Rev. D **73**, 106006 (2006). Erratum: [Phys. Rev. D **74**, 089903 (2006)], [hep-th/0512295, hep-th/0610131]. 9
- [28] J. M. Maldacena, *The Large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999) [hep-th/9711200]. 10
- [29] M. Ammon and J. Erdmenger, *Gauge/gravity duality : Foundations and applications*, Cambridge University Press (2015). 11
- [30] H. Nastase, *Introduction to the ADS/CFT Correspondence*, Cambridge University Press (2015). 11, 32, 35, 36

- [31] G. 't Hooft, *A Planar Diagram Theory for Strong Interactions*, Nucl. Phys. B **72**, 461 (1974). 12
- [32] J. Polchinski and M. J. Strassler, *Hard scattering and gauge/string duality*, Phys. Rev. Lett. **88**, 031601 (2002) [hep-th/0109174]. 15
- [33] H. Boschi-Filho and N. R. F. Braga, *Gauge/string duality and scalar glueball mass ratios*, JHEP **0305**, 009 (2003) [hep-th/0212207]. 15
- [34] H. Boschi-Filho and N. R. F. Braga, *QCD/string holographic mapping and glueball mass spectrum*, Eur. Phys. J. C **32**, 529 (2004) [hep-th/0209080]. 15
- [35] S. Janowski, F. Giacosa and D. H. Rischke, *Is $f_0(1710)$ a glueball?*, Phys. Rev. D **90**, no. 11, 114005 (2014) [arXiv:1408.4921 [hep-ph]]. 16
- [36] R. Barate *et al.* [ALEPH Collaboration], *Search for the glueball candidates $f(0)(1500)$ and $f(J)(1710)$ in gamma gamma collisions*, Phys. Lett. B **472**, 189 (2000) [hep-ex/9911022]. 16
- [37] A. Karch, E. Katz, D. T. Son and M. A. Stephanov, *Linear confinement and AdS/QCD*, Phys. Rev. D **74**, 015005 (2006) [hep-ph/0602229]. 16, 19, 21, 22
- [38] S. Eidelman, *et al.*, *Review of Particle Physics*, Phys. Lett. B **592**, 1 (2004). 16
- [39] G. F. de Teramond and S. J. Brodsky, *Hadronic spectrum of a holographic dual of QCD*, Phys. Rev. Lett. **94**, 201601 (2005) [hep-th/0501022]. 16
- [40] Eichmann G., *Introduction to Hadron Physics*, 2014/15. <http://cftp.ist.utl.pt/~Eger-not.eichmann/ws2014>. 23, 24, 28, 31
- [41] Pokorski S., *Gauge Field Theories*, Cambridge University Press (2000). 24
- [42] C. Patrignani *et al.* [Particle Data Group], *Review of Particle Physics*, Chin. Phys. C **40**, no. 10, 100001 (2016). 24

- [43] George B. Arfken, Hans J. Weber, *Mathematical Methods For Physicists International Student Edition*, Academic Press (2005). 44
- [44] Keith Oldham, Jan Myland, Jerome Spanier, *An Atlas of Functions*, Second Edition, Springer, 2009. 44, 50
- [45] K. A. Olive *et al.* [Particle Data Group], *Review of Particle Physics*, Chin. Phys. C **38**, 090001 (2014). 54
- [46] G. Parisi, *Deep inelastic scattering in a field theory with computable large-momenta behaviour*, Lett. Nuovo Cim. **7S2**, 84 (1973). 8
- [47] A. M. Polyakov, *The Wall of the cave*, Int. J. Mod. Phys. A **14**, 645 (1999) [hep-th/9809057].
- [48] J. Erlich, E. Katz, D. T. Son and M. A. Stephanov, *QCD and a holographic model of hadrons*, Phys. Rev. Lett. **95**, 261602 (2005) [hep-ph/0501128].
- [49] D. T. Son and M. A. Stephanov, *QCD and dimensional deconstruction*, Phys. Rev. D **69**, 065020 (2004) [hep-ph/0304182].
- [50] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, *Gauge theory correlators from noncritical string theory*, Phys. Lett. B **428**, 105 (1998) [hep-th/9802109]. 36
- [51] N. R. F. Braga, M. A. Martin Contreras and S. Diles, *Decay constants in soft wall AdS/QCD revisited*, Phys. Lett. B **763**, 203 (2016) [arXiv:1507.04708 [hep-th]]. 41, 55, 58, 61
- [52] L. A. Medeiros, E. A. Mell, *A Integral de Lesbegue*, 6 Edição, (2008). 69, 70
- [53] C. L. R. Braga, *Notas de Física-Matemática: Equações Diferenciais, Funções de Green e Distribuições*, Livraria da Física (2006). 69, 72

- [54] H. R. Grigoryan and A. V. Radyushkin, *Form Factors and Wave Functions of Vector Mesons in Holographic QCD*, Phys. Lett. B **650**, 421 (2007) [hep-ph/0703069].
- [55] H. R. Grigoryan and A. V. Radyushkin, *Structure of vector mesons in holographic model with linear confinement*, Phys. Rev. D **76**, 095007 (2007) [arXiv:0706.1543 [hep-ph]].
- [56] S. S. Afonin, *Low-energy holographic models for QCD*, Phys. Rev. C **83**, 4 (2011). 41

Apêndice A

Equação de Sturm-Liouville e suas Propriedades

A equação característica de Sturm-Liouville é linear de segunda ordem e solúvel. É escrita geralmente na forma

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy(x)}{dx} \right] + q(x)y(x) = \lambda\omega(x)y(x), \quad (\text{A.1})$$

onde $y(x)$ é solução se for diferenciável no intervalo (a, b) e se satisfizer a equação (A.1) em cada ponto de (a, b) . A função $\omega(x)$ é chamada de função densidade ou peso. Uma das formas de resolver uma equação característica de Sturm-Liouville é introduzir o operador diferencial:

$$L \equiv \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x). \quad (\text{A.2})$$

Este é válido no domínio $a < x < b$ em que as funções $p(x)$, $p'(x)$ e $q(x)$ são contínuas e reais. Também é necessário que $p(x) \geq 0$ e que satisfaça as condições de contorno

$$\begin{aligned} B_a(y) &= \alpha_1 y(a) + \alpha_2 p(a) y'(a) = 0 \\ B_b(y) &= \beta_1 y(b) + \beta_2 p(b) y'(b) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Os termos α e β são constantes e devem respeitar as somas $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ e $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$. Quando a constante λ assume determinado valor μ , este passa a ser chamado de autovalor do problema e $y(x; \mu)$ é a autofunção correspondente. Se L for um operador

hermitiano corresponderá a um observável e conseqüentemente os autovalores serão reais.

Os problemas de Sturm-Liouville podem ser categorizados em três diferentes formas:

1. **regular** se $p(x) > 0$ e $\omega(x) > 0$ em $[a, b]$;
2. **singular** se $p(x) > 0$ em (a, b) , $\omega(x) \geq 0$ em $[a, b]$ e $p(a) = p(b) = 0$;
3. **periódico** se $p(x) > 0$, $\omega(x) > 0$ e $p(x)$, $q(x)$ e $\omega(x)$ são funções contínuas em $[a, b]$ com condições de contorno $y(a) = y(b)$ e $y'(a) = y'(b)$.

Os tipos de problema de Sturm-Liouville mais comuns são os regulares e periódicos. Para os casos regulares é possível listar algumas propriedades dos autovalores e das autofunções.

1. Os autovalores são reais. Portanto em um problema regular o operador L é auto-adjunto.
2. As autofunções com autovalores correspondentes diferentes, são ortogonais com peso $\omega(x)$:

$$\int_a^b \overline{u_\lambda(x)} u_\mu(x) \omega(x) dx = 0 \quad \text{caso} \quad \lambda \neq \mu. \quad (\text{A.4})$$

3. Quando $q(x) \geq 0$, $\alpha_1 \alpha_2 \leq 0$ e $\beta_1 \beta_2 \geq 0$, não há nenhum autovalor negativo. Desta forma o número de autovalores λ_n reais é infinito e o único ponto de acumulação é em $+\infty$, pois o número de autovalores negativos é finito.
4. Para a classe das funções $f(x)$ o conjunto completo é determinado se [53]

$$\int_a^b |f(x)|^2 \omega(x) dx < \infty. \quad (\text{A.5})$$

Esta integral deve resultar em um valor finito. Isto ocorre quando $f(x)$ é dita função integrável à Lesbegue [52]. Desta forma é determinado que a autofunção estará normalizada se

$$\int_a^b |u_n(x)|^2 \omega(x) dx = 1. \quad (\text{A.6})$$

Qualquer função integrável a Lesbegue $f(x)$ que satisfaça (A.5) pode ser desenvolvida em série

$$f(x) \sim \sum \alpha_n U_n(x) \text{ , onde } \alpha_n = \int_a^b f(x) \overline{u_n(x)} \omega(x) dx. \quad (\text{A.7})$$

Para saber mais sobre a integral de Lesbegue consulte a referência [52].

Este desenvolvimento pode ser feito para a função delta de Dirac, já que dentro da integral do coeficiente α ela adquire sentido. Esta função escrita em termos de uma série será importante para o desenvolvimento das funções de Green para um problema de Sturm-Liouville regular. Sendo assim o coeficiente α_n é dado por:

$$\alpha_n = \int_a^b \delta(x - x') \overline{u_n(x)} \omega(x) = \omega(x') \overline{u_n(x')} dx. \quad (\text{A.8})$$

E portanto, a representação em série da função delta de Dirac é

$$\delta(x - x') = \sum_n^{\infty} \omega(x') \overline{u_n(x')} u_n(x). \quad (\text{A.9})$$

Apêndice B

Construção da função de Green em um problema de Sturm-Liouville

O método de funções de Green permite encontrar soluções de equações diferenciais não homogêneas. Por isto, uma das formas de encontrar as soluções equação diferencial de Sturm-Liouville é achar suas funções de Green de acordo com as condições de contorno definidas no problema. Desta forma, considere a equação não homogênea

$$Lf(x) + k\omega(x)f(x) = g(x), \quad (\text{B.1})$$

onde L é o operador (A.2). As condições de contorno para este problema são

$$B_a(f) = 0 \quad B_b(f) = 0, \quad (\text{B.2})$$

definidas na expressão (A.3). Se a constante k na equação (B.1) não for um dos autovalores do problema, a solução é única e pode ser obtida através da função de Green. Para obter a função de Green é necessário que a mesma seja contínua e satisfaça a equação

$$LG(x, x') + k\omega(x)G(x, x') = \delta(x - x'), \quad (\text{B.3})$$

e as condições de contorno $B_a(G) = 0$ e $B_b(G) = 0$. Desta forma a função definida

$$f(x) = \int_a^b G(x, x')g(x')dx' \quad (\text{B.4})$$

será solução única da equação (B.1). Existem formas diferentes de encontrar a função de green para um problema de Sturm-Liouville. Umas das formas de obter esta função

é pelo método direto que pode ser encontrado na referência [53]. Porém neste trabalho será encontrada a função de Green pelo método das autofunções. Pois foi este o método utilizado para obter a função de green da equação de movimento de modos normalizáveis do modelo de parede macia na seção 4.3. Para um problema de Sturm-Liouville arbitrário considere a equação:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du_n(x)}{dx} \right] + q(x)u_n(x) + k\omega(x)u_n(x) = 0, \quad (\text{B.5})$$

onde $p(x) \geq 0$ e $p(x)$, $q(x)$ e $\omega(x)$ são funções contínuas e reais. O conjunto completo de autofunções correspondentes ao autovalor λ_n deste problema é representado por $u_n(x)$, onde $n \in \mathbb{I}$. A função de green $\mathcal{G}(x, x')$ pode ser desenvolvida em uma série de tais funções:

$$\mathcal{G}(x, x') = \sum_{n \in \mathbb{I}}^{\infty} C_n(x')u_n(x). \quad (\text{B.6})$$

A equação (B.5) é homogênea. Desta forma para obter sua função de Green será necessário reescrevê-la como uma função não homogênea

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\mathcal{G}(x, x')}{dx} \right] + q(x)\mathcal{G}(x, x') + k\omega(x)\mathcal{G}(x, x') = (k - \lambda_n)\omega(x)\mathcal{G}(x, x'), \quad (\text{B.7})$$

onde foi acrescentado a constante λ de forma que

$$(k - \lambda_n)\mathcal{G}(x, x') = \delta(x, x'). \quad (\text{B.8})$$

Assim, quando $k = \lambda_n$ a equação (B.7) é homogênea novamente. Será visto mais adiante que nestes pontos a função de Green será descontínua pois estes serão os pólos da função. Mas quando $k \neq \lambda_n$ a função de Green existe e é contínua. Ao utilizar a representação da delta de Dirac (A.9) a equação (B.8) é reescrita como

$$\sum_{n \in \mathbb{I}} (k - \lambda_n)\omega(x)u_n(x) = \omega(x) \sum_n^{\infty} \overline{u_n(x)}u_n(x'). \quad (\text{B.9})$$

Portanto ao comparar os dois lados da igualdade, é possível inferir o coeficiente $C_n(x')$ da função de Green (B.6)

$$C_n^*(x') = \frac{\overline{u_n(x')}}{(k - \lambda_n)}. \quad (\text{B.10})$$

Lo a função de Green admite o seguinte desenvolvimento bilinear

$$\mathcal{G}(x, x') = \sum_n \frac{\overline{u_n(x')} u_n(x)}{(k - \lambda_n)}, \quad (\text{B.11})$$

onde note que esta função é indefinida se $k = \lambda_n$ e possui a propriedade de simetria $\mathcal{G}(x, x') = \mathcal{G}(x', x)$ para $k \in \mathbb{R}$.

Apêndice C

Representação de Källén-Lehmann

A representação de Källén-Lehmann permite escrever a função de dois pontos na teoria da interação em termos de uma função espectral. Esta representação é exata. Para obtê-la considere então a função de dois pontos para os campos ϕ tomados em pontos diferentes:

$$\langle \Omega | T \{ \psi(x) \psi(y) \} | \Omega \rangle = \Theta(x^0 - y^0) \langle \Omega | \psi(x) \psi(y) | \Omega \rangle + \Theta(y^0 - x^0) \langle \Omega | \psi(y) \psi(x) | 0 \rangle. \quad (\text{C.1})$$

Considere também a relação de completeza para os auto-estados $|n\rangle$ [9]:

$$\mathbb{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_n \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_{\vec{p}}} |n\rangle\langle n|. \quad (\text{C.2})$$

Ao inserir a relação de completeza (C.2) entre os operadores de campos na expressão (C.1), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \psi(x) \psi(y) \} | \Omega \rangle &= \Theta(x^0 - y^0) \langle \Omega | \psi(x) | \Omega \rangle \langle \Omega | \psi(y) | \Omega \rangle + \\ &+ \sum_n \frac{\Theta(x^0 - y^0)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_{\vec{p}}} \langle \Omega | \psi(x) | n \rangle \langle n | \psi(y) | \Omega \rangle + \\ &+ (y^0 - x^0). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

O primeiro termo será tomado como uma constante e portanto será desconsiderado.

Usando o operador de translação (3.17) reescreve-se esta equação como

$$\langle \Omega | T \{ \psi(x) \psi(y) \} | \Omega \rangle = \sum_n \frac{\Theta(x^0 - y^0)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_{\vec{p}}} e^{ip(x-y)} |\langle \Omega | \psi(0) | n \rangle|^2 + (y^0 - x^0). \quad (\text{C.4})$$

A integral sobre os momentos é invariante de Lorentz e condiciona as partículas a estarem na camada de massa, implicando $p^2 = m_n^2$. Sabendo a definição do propagador de Feynmann (3.30) esta expressão é dada

$$\langle \Omega | T \{ \psi(x) \psi(y) \} | \Omega \rangle = \sum_n D_F(x - y; m_n^2) |\langle \Omega | \psi(0) | n \rangle|^2 \quad (\text{C.5})$$

Usando $D_F(x - y; m_n) = \int_0^\infty d\mu^2 D_F(x - y; \mu^2) \delta(\mu^2 - m_n^2)$, obtêm-se a representação espectral de Källén-Lehmann:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \psi(x) \psi(y) \} | \Omega \rangle &= \sum_n \int_0^\infty d\mu^2 D_F(x - y; \mu^2) \delta(\mu^2 - m_n^2) |\langle \Omega | \psi(0) | n \rangle|^2 \\ &= \int_0^\infty \frac{d\mu^2}{2\pi} \rho(\mu^2) D_F(x - y; \mu^2). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

A função espectral ρ foi definida como:

$$\rho \equiv \sum_n 2\pi \delta(\mu^2 - m_n^2) |\langle \Omega | \psi(0) | n \rangle|^2. \quad (\text{C.7})$$