



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA

Efeito Sagnac no vácuo quântico

Guilherme Costa Matos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Orientador: Paulo Américo Maia Neto

Coorientador: François Impens

Rio de Janeiro

Julho de 2020

P436 Matos, Guilherme Costa
 Efeito Sagnac no vácuo quântico / Guilherme Costa Matos
- Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2020.
 xiv, 154f.
 Orientador: Paulo Américo Maia Neto
 Coorientador: François Impens
 Dissertação (mestrado) - UFRJ / Instituto de Física /
Programa de Pós-graduação em Física, 2020.
 Referências Bibliográficas: f. 124-145.
 1. Efeito Sagnac. 2. Interferometria atômica. 3. Forças
dispersivas. 4. Vácuo quântico. I. Neto, Paulo Américo Maia. II. Im-
pens, François. III. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto
de Física, Programa de Pós-graduação em Física. IV. Efeito Sagnac
no vácuo quântico.

Resumo

Efeito Sagnac no vácuo quântico

Guilherme Costa Matos

Orientador: Paulo Américo Maia Neto

Coorientador: François Impens

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

O efeito Sagnac resulta da rotação do referencial de repouso de um interferômetro em relação a um referencial inercial. Em interferometria atômica, fornece um método extremamente sensível para medida de rotações. Nesta dissertação, propomos um efeito complementar ao efeito Sagnac usual, supondo que o referencial de repouso é inercial, ao passo que um corpo material situado entre os braços do interferômetro gira frequência da ordem de GHz, com base em recentes avanços experimentais que permitem a rotação de pequenos objetos a frequências elevadas. Para analisar a nossa proposta, desenvolvemos a teoria quântica completa do interferômetro atômico, incluindo a interação do átomo, em seu estado fundamental, com o campo eletromagnético quantizado, também em seu estado fundamental (vácuo quântico). Mostramos que a rotação do objeto deixa um traço no vácuo quântico por meio da função de Green para o campo eletromagnético, que finalmente se traduz em uma fase atômica proporcional à velocidade angular de rotação. Como exemplo, consideramos uma microesfera metálica em rotação. Tomando parâmetros experimentais realistas, obtemos uma fase interferométrica da ordem de miliradianos, na

ordem da sensibilidade típica de interferômetros atômicos.

Palavras-chave: Efeito Sagnac, Interferometria Atômica, Interações dispersivas, Vácuo Quântico.

Abstract

Quantum vacuum Sagnac effect

Guilherme Costa Matos

Orientador: Paulo Américo Maia Neto

Coorientador: François Impens

Abstract da Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

The Sagnac effect results from the rotation of the resting frame of an interferometer relative to an inertial frame. In atomic interferometry, it provides an extremely sensible method to measure rotations. In this dissertation, we study a quantum field analogue of the usual Sagnac effect, supposing that the resting frame is inertial, while a conductor body located between the interferometer arms spins with GHz frequency, based on recent experimental advances which allows small objects to rotate with high angular velocities. To analyse our proposal, we develop the full quantum theory for the atomic interferometer, including the coupling between a ground-state atom and the quantized electromagnetic field in the vacuum state. We show that the rotation of the object leaves a trace in the quantum vacuum by the Green's function for the electromagnetic field, which translates itself in a atomic phase proportional to the angular velocity. As an example, we consider a rotating metallic microsphere. Taking realistic experimental parameters, we obtain an interferometric phase of the order of miliradians, above the typical sensibility of the atomic interferometers.

Keywords: Sagnac effect, Atomic interferometry, Dispersive interactions, Quantum vacuum.

Agradecimentos

A Deus, por ser o meu Pastor e nada ter me faltado.

A Carol Vieira, por ter sido uma companhia maravilhosa durante os dois anos da elaboração deste trabalho. Não houve um desafio em que não recebesse incentivo e compreensão de sua parte. Não houve conquista em que ela não vibrasse junto comigo. Todo o amor e carinho que recebi tornaram todos os momentos muito melhores e todos os fardos mais leves.

À minha irmã, Maria Eduarda "bê", que pacientemente suportou minha empolgação ao falar dos mais variados efeitos físicos ao longo dos 4 anos de graduação e mais 2 de mestrado. A ela deixo meu agradecimento não somente por ter me apoiado tanto em minha vida toda, mas também por todas as risadas que damos juntos (ou mesmo separados pela distância) o tempo todo.

Aos meus orientadores, Prof. Paulo Américo e Prof. François Impens, dos quais recebi orientação de excelência durante o mestrado. Em todas as reuniões existia um ânimo para discutir física e levar adiante este trabalho, o que sempre me motivou bastante. Em qualquer dificuldade que tivesse sempre soube que podia com ambos para uma discussão enriquecedora, de modo que o trabalho de pesquisa foi sempre prazeroso. Todas as ideias e conselhos que recebi certamente me fizeram evoluir muito como cientista ao longo desses dois anos e sou muito grato por isso.

Ao Prof. Reinaldo de Melo, que além de colaborador da pesquisa de mestrado foi praticamente um terceiro orientador. Um físico incrível e uma pessoa com grande coração com quem tive conversas muito interessantes sobre física desde os meus primeiros anos na

UFRJ. Ao longo de toda a minha formação acadêmica sempre pude contar com um bom conselho, seja para escolha da área de pesquisa ou para a escrita dessa dissertação.

Ao Joel, meu pai e amigo, por sempre ter dado o seu melhor para me apoiar e sempre me incentivar ao longo de toda a minha formação.

A Rosane e Jorge Vieira, que me acolheram como um filho desde que os conheci pela primeira vez.

Ao amigo Arthur Luna, por ser o melhor companheiro de sala possível. Nesses 2 anos pudemos transformar a sala 319-19 na sala do pão e do café, o ambiente em que divagamos sobre os mais variados assuntos, indo de física atômica a geopolítica.

À amiga Larissa Inácio, que me ajudou muito nos mais variados problemas durante o mestrado, tanto que meu ímpeto natural é procura-la quando surge qualquer problema. Eu admiro muito sua generosidade e dedicação, sempre buscando fazer do instituto de física um lugar melhor.

Aos amigos Gabriel Picanço, Bruno Magacho e Yuri Dias, sem os quais minha formação como físico não teria sido a mesma coisa. Com eles pude perceber o quão importante é o papel das aleatoriedades na vida de um físico. Obrigado por todo o companheirismo.

Ao Guilherme Theodoro, que além de ser um grande amigo há anos ainda me abrigou em São Paulo das duas vezes em que precisei durante o mestrado.

Aos professores Carlos Farina e Carlos Zarro, que além de excelentes cursos me deram valiosos conselhos ao longo da minha formação.

Ao Maurício Hippert, por ter me dado conselhos que me ajudaram muito a que rumo tomar quando eu ainda era um aluno de engenharia indeciso quanto à carreira.

Aos funcionários da secretaria de pós-graduação, Igor e Khrisna, que sempre foram extremamente solícitos e sempre resolveram qualquer problema com rapidez.

Sumário

Sumário	ix
Lista de Figuras	xi
Lista de Símbolos	xii
Introdução	1
1 Efeitos Dispersivos em Sistemas Atômicos	4
1.1 Átomos no vácuo quântico	5
1.1.1 Teoria da Resposta Linear	5
1.1.2 Aplicação para um átomo em movimento não-relativístico no vácuo	7
1.2 Efeitos dispersivos em interferômetros atômicos	10
1.2.1 Interferômetros atômicos como sistemas quânticos abertos: fases locais e não-locais	11
1.2.1.1 O funcional de influência	11
1.2.1.2 Expansão em segunda ordem	12
1.2.2 Aplicação à interação dipolar elétrica	13
2 Polarizabilidade de um Objeto em Rotação	15
2.1 Polarizabilidade de um Objeto em Rotação em Torno do Eixo de Simetria	16
2.2 Polarizabilidade de um Objeto em Rotação em Torno de um Eixo Ortogonal ao Eixo de Simetria	18

3 Fase Sagnac para uma esfera em rotação no vácuo	22
3.1 Fase Sagnac Para Trajetórias Atômicas Semicirculares	22
3.1.1 Fase de Caminho Duplo	23
3.1.2 Fase de Caminho Único	25
3.1.2.1 Aproximação de Van der Waals	25
3.1.2.2 Análise numérica	26
3.2 Fase Sagnac Para Trajetórias Atômicas Retilíneas e Paralelas	28
3.2.1 Fase de Caminho Duplo	30
3.2.2 Fase de Caminho Único	31
Considerações finais	32
Referências Bibliográficas	35
A Cálculo da fase de caminho único para trajetórias atômicas semicirculares	42
B Cálculo da fase de caminho único para trajetórias atômicas retilíneas e paralelas	45

Lista de Figuras

2.1	Mudança de referencial entre o referencial co-móvel ao objeto ($x'y'$) e o referencial do laboratório (xy).	16
2.2	Mudança de referencial entre o referencial co-móvel ao objeto ($x'y'$) e o referencial do laboratório (xy).	19
3.1	Esquema de um interferômetro atômico de trajetórias semicirculares de raio R . No centro há uma esfera de raio a em rotação em torno do eixo z com velocidade angular Ω_s .	23
3.2	Fase de caminho único devido a uma esfera de platina em função da frequência de emissão atômica ω_0 .	27
3.3	Fase de caminho único gerada por uma esfera de potássio em função da frequência de emissão atômica ω_0 .	28
3.4	Esquema de um interferômetro atômico de trajetórias retilíneas e paralelas cuja separação é $2y_0$. No centro há uma esfera de raio a em rotação em torno do eixo z com velocidade angular Ω_s .	29
A.1	Contorno de integração no plano complexo para as integrais em frequência do termo I_1 .	44

Lista de Símbolos

$[A, B]$ Comutador entre os operadores A e B

α Polarizabilidade

α_0 Polarizabilidade atômica estática

$\delta(x)$ Distribuição delta de Dirac

$\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ Distribuição delta de Dirac tridimensional

ϵ Função dielétrica de um material

ϵ_0 Permissividade do vácuo

$\hat{\mathbf{v}}$ Vetor unitário

\hat{a}, \hat{a}^\dagger Operador de aniquilação e criação do campo eletomagnético

\hbar Constante de Planck dividida por 2π

λ Comprimento de onda

$\boldsymbol{\Omega}$ Vetor velocidade angular de rotação

ω Frequência angular

ω_0 Frequência angular de emissão atômica

Ω_A Velocidade angular atômica

\overleftrightarrow{G}	Tensor de Green
ϕ	Fase interferométrica
ψ	Função de onda
ρ	Matriz densidade
\mathbf{d}	Momento de dipolo elétrico
\mathbf{E}	Campo Elétrico
\mathbf{r}	Vetor posição
$\{A, B\}$	Anticomutador entre os operadores A e B
a	Raio de uma esfera
c	Velocidade da luz
$f'(x)$	Derivada da função $f(x)$
H	Operador hamiltoniano
k	Número de onda
$K_\alpha(x)$	Função de Bessel modificada do segundo tipo de ordem α
v	Velocidade atômica
z^*	Complexo conjugado de um número complexo z

Introdução

A interferometria ótica desempenhou um papel muito importante na história da física em diversos episódios, dentre os quais vale citar o experimento de fenda dupla de Young, no qual mostrou-se o caráter ondulatório da luz e o experimento de Michaelson-Morley, que não apenas provou a não existência do éter luminífero, mas também apontou para a constância da velocidade da luz para diferentes referenciais, servindo de base para a formulação do princípio da relatividade restrita. Como episódio recente, pode-se citar o experimento do LIGO (do inglês *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) Hanford e LIGO Livingston junto com o detector VIRGO [1]. Estes instrumentos têm permitido observações relevantes de buracos negros inacessíveis pelos métodos tradicionais.

A interferometria ótica também está presente em diversas aplicações que se fazem necessárias tanto na ciência básica como em aplicações industriais devido à sua alta sensibilidade. Essas aplicações envolvem os mais diferentes efeitos físicos, dentre os quais será discutido o efeito Sagnac.

Medido pela primeira vez por Georges Sagnac em 1913 [2,3]¹, o efeito Sagnac consiste numa fase de interferência gerada pela rotação com relação a um referencial inercial do interferômetro. Esta fase pode ser medida por dois sinais luminosos que percorrem o mesmo circuito em sentidos opostos, sendo este o método empregado para a primeira demons-

¹A realização deste experimento teve o intuito de detectar o éter luminífero, mesmo após os resultados de Michaelson e Morley em 1887. Contudo, uma das aplicações do efeito proposta pelo próprio Sagnac era medir a rotação da Terra. Para uma análise detalhada sobre essa aplicação recomenda-se ao leitor a referência [3].

tração do efeito por Sagnac [3]. A fase $\Delta\phi$ é de natureza relativística [4] e proporcional à frequência angular de rotação do circuito, dada por [3]

$$\Delta\phi = \frac{8\pi}{\lambda v} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A}, \quad (1)$$

na qual v é a velocidade da luz no circuito e \mathbf{A} corresponde ao vetor normal à superfície do circuito cujo módulo é a área da superfície. Esse efeito permite a criação de detectores de rotação usando lasers [5], os quais são amplamente usados nas indústrias de aviação e naval [6], uma vez que juntando a medida de velocidade angular obtida por um interferômetro Sagnac com uma medida de velocidade obtida por outro sensor é possível reconstruir a trajetória de uma embarcação.

Nas últimas décadas, porém, foram desenvolvidos interferômetros envolvendo ondas de matéria aos invés de luz, explorando a dualidade onda-partícula da mecânica quântica. Essas ondas estão associadas a feixes de átomos frios ou ultra-frios, gerando a interferometria atômica.

A interferometria atômica possui diversas aplicações e vem sendo cada vez mais estudada em experimentos de alta precisão. As aplicações são variadas, como por exemplo a utilização de interferômetros atômicos para medidas de gravidade [7], com possíveis aplicações na detecção de ondas gravitacionais [8], ou mesmo medidas de índice de refração de determinados gases [9]. Além disso, assim como interferômetros óticos, interferômetros atômicos ser empregados como detectores de rotação [10–12] gerando também um efeito Sagnac. De fato, pode ser calculada a fase gerada num interferômetro atômico pela rotação do aparato, apresentada em [13]:

$$\Delta\phi = \frac{2m}{\hbar} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A}. \quad (2)$$

Comparando com a fase gerada num interferômetro ótico de mesmas dimensões que experimentalmente a mesma velocidade de rotação tem-se que, em princípio ², o efeito Sagnac no

²Na prática limitações experimentais como vibrações parasitas acabam por reduzir este ganho.

caso atômico é 10 ordens de grandeza maior. Isto se deve ao fato de átomos possuírem massa e portanto são muito mais sensíveis a efeitos inerciais.

Neste trabalho, investigamos a aplicação de interferometria atômica para a detecção de forças dispersivas, que correspondem a forças oriundas das flutuações do campo eletromagnético quantizado. A alta sensibilidade desses sistemas os torna ótimos candidatos para a detecção de fenômenos dispersivos (inclusive fenômenos que até o presente momento nunca foram detectados, como efeito Casimir dinâmico [14,15] e a fricção quântica [16,17]), sendo investigada teoricamente [18–21] e experimentalmente [22–25]. Nossa proposta é estudar um efeito análogo ao efeito Sagnac no contexto de interações dispersivas, determinando os efeitos físicos de rotações de um objeto na vizinhança de um interferômetro no vácuo. A abordagem aqui empregada consiste em calcular a fase interferométrica associada a interação e identificar termos provenientes da rotação do objeto.

A dissertação se inicia com uma discussão sobre a interação de um átomo com o vácuo quântico e sobre efeitos dispersivos em interferômetros atômicos no capítulo 1. No capítulo 2 será apresentada a correção da polarizabilidade de um objeto em rotação considerando dois casos especiais. No primeiro o objeto gira em torno de seu eixo de simetria, enquanto no segundo a rotação ocorre em torno de um eixo perpendicular ao eixo de simetria. Por fim, no capítulo 3 é apresentado o cálculo da fase interferométrica num sistema em que uma esfera em rotação se encontra entre as trajetórias de um interferômetro no vácuo. Isso será feito considerando duas classes de trajetórias diferentes: trajetórias semicirculares em sentidos opostos e trajetórias retilíneas paralelas.

Capítulo 1

Efeitos Dispersivos em Sistemas Atômicos

A existência de flutuações quânticas é particularmente importante no contexto da eletrodinâmica quântica: mesmo na ausência de cargas e correntes elétricas há um campo eletromagnético flutuante que possui uma energia de ponto zero não nula. Da interação desse campo no seu estado de mais baixa energia (o chamado estado de vácuo) com a matéria surgem diversos efeitos físicos, tais como o efeito Casimir [26] (e o efeito Casimir dinâmico [27]), o desvio Lamb [28] e a emissão espontânea [28], para citar alguns.

É importante definir bem o que se entende por vácuo: aqui vácuo não corresponde necessariamente a um espaço ausente de qualquer forma de matéria, mas ao estado de menor energia do campo eletromagnético quantizado¹. O princípio da incerteza impõe que a energia do estado fundamental do campo é diferente de zero, o que implica num campo eletromagnético flutuante. Essa propriedade é muito relevante em sistemas atômicos: mesmo sistemas eletricamente neutros sem momento de multipolo permanente podem interagir com o campo, dado que o momento de dipolo elétrico de um átomo também é flutuante. Esse mecanismo é o que gera a interação de átomos com objetos eletricamente neutros, pois momentos de multipolo são induzidos no objeto devido às flutuações.

Neste capítulo serão discutidos os efeitos das interações dispersivas em sistemas atômicos

¹Esta dissertação assume a quantização do campo eletromagnético. Discussões detalhadas do assunto se encontram nas referências [29, 30].

não-relativísticos, em particular em interferômetros atômicos. Na primeira parte será apresentada uma revisão sobre a interação da radiação com a matéria usando o formalismo da teoria da resposta linear, o qual permite um cálculo perturbativo dos observáveis físicos induzidos pelas flutuações quânticas. Na segunda seção o método discutido será aplicado no contexto de interferometria atômica e serão derivadas as expressões para as fases geradas no interferômetro pela interação do átomo com o vácuo quântico.

1.1 Átomos no vácuo quântico

1.1.1 Teoria da Resposta Linear

A interação de um átomo com outro átomo ou superfície ocorre através da indução de momentos de multipolo. Em particular, neste trabalho será usada extensivamente a aproximação de dipolo, na qual supõe-se que as dimensões do objeto são muito menores do que os comprimentos característicos do sistema e portanto o campo elétrico gerado por momentos de multipolo superiores ao dipolo é desprezível. Para fazer uma análise da interação é necessário determinar os momentos de multipolo induzidos pelas flutuações do campo e os campos induzidos pelas flutuações de dipolo. Para tal, utilizar-se-á o formalismo da teoria da resposta linear, o qual permite determinar os efeitos de uma perturbação externa dependente do tempo. A abordagem aqui utilizada segue de maneira mais breve a referência [31].

Considera-se primeiramente uma perturbação dependente do tempo na forma

$$V(t) = -\lambda(t)M. \quad (1.1)$$

Aqui $\lambda(t)$ é uma função do tempo e M é um operador do sistema. Para determinar a evolução temporal de um dado observável N em primeira ordem de $\lambda(t)$ é necessário determinar o operador de densidade do sistema $\rho_s(t)$. Assim, a equação de Liouville para o sistema é

$$i\hbar \frac{d\rho_s}{dt} = [H_0 + V(t), \rho_s(t)], \quad (1.2)$$

sendo H_0 o hamiltoniano do sistema sem a perturbação. Até aqui todos os operadores são considerados na representação de Schrödinger, mas passaremos agora para a representação de interação por ser mais conveniente aqui. Dessa forma, a equação de Liouville 1.2 pode ser escrita como

$$i\hbar \frac{d\rho_I}{dt} = [V_I(t), \rho_I(t)], \quad (1.3)$$

na qual o subscrito I indica que o operador é considerado na representação de interação².

É importante destacar que a equação 1.3 descreve de forma exata um sistema quântico fechado e determina a evolução temporal de um dado observável do sistema. Contudo, dependendo do potencial de interação a equação pode ser de difícil resolução. Portanto, pode-se recorrer a um tratamento perturbativo caso os autovalores de $V(t)$ sejam em norma muito menores que os de H_0 . Dada essa hipótese, é possível determinar $\rho_I(t)$ até primeira ordem de $\lambda(t)$, a saber:

$$\rho_I(t) = \rho_{eq} - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \lambda(t') [M_I(t'), \rho_{eq}] dt' + \mathcal{O}(\lambda^2), \quad (1.4)$$

considerando que para $t \rightarrow -\infty$ não há perturbação e portanto ρ_{eq} é o operador densidade para o estado de equilíbrio inicial do sistema. Logo, ρ_{eq} é a contribuição de ordem zero em $\lambda(t)$. Na representação de Schrödinger a equação 1.4 se torna:

$$\rho_s(t) = \rho_{eq} + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t') \theta(t - t') [M_I(t' - t), \rho_{eq}] dt'. \quad (1.5)$$

A função degrau $\theta(t - t')$ traduz a causalidade: uma perturbação no instante t' só gera efeito no sistema num instante posterior t .

A partir da equação 1.5 é possível obter a média de um outro operador do sistema N tomando-se o traço do operador $\rho_s(t)N$

$$\langle N \rangle_{(t)} = \text{Tr}(\rho_s(t)N) = \langle N \rangle_{eq} + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t') \chi_{NM}(t - t') dt', \quad (1.6)$$

²Lembrando que na representação de interação o operador A_I é definido como $A_I = e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} A_s e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}}$, onde A_s corresponde ao operador na representação de Schrödinger.

na qual a função $\chi_{NM}(\tau)$ é definida da seguinte forma

$$\chi_{NM}(\tau) := \frac{i}{\hbar} \theta(\tau) \langle [N, M_I(-\tau)] \rangle_{eq}. \quad (1.7)$$

Sendo $\langle \dots \rangle_{eq}$ a média tomada no estado de equilíbrio do sistema. Nota-se que $\chi_{NM}(\tau)$ é a função resposta (ou susceptibilidade) do sistema.

A seguir o formalismo geral da resposta linear será aplicado para a interação de um átomo com o campo eletromagnético quantizado no contexto da aproximação de dipolo.

1.1.2 Aplicação para um átomo em movimento não-relativístico no vácuo

Átomos são polarizáveis e a energia associada à interação de um átomo com um campo eletromagnético clássico é um tópico padrão de livros-texto [30, 32, 33]. Nesta seção será empregado o método discutido na seção anterior para analisar propriedades da interação de um átomo com o campo eletromagnético quantizado inicialmente no estado de vácuo. Para tal, segue-se a abordagem da referência [26].

O hamiltoniano total do sistema é a soma de três contribuições [34]:

$$H = H_A + H_R + H_{int}, \quad (1.8)$$

na qual H_A é o hamiltoniano que descreve o grau de liberdade interno do átomo (aqui considerado segundo um modelo de dois níveis), H_R é o hamiltoniano do campo de radiação e H_{int} descreve a interação dipolar do átomo com o campo quantizado. Em interferômetros atômicos, a posição do centro de massa $\hat{\mathbf{r}}_A$ é um operador, de tal forma que o potencial H_{int} acopla três observáveis [34]:

$$H_{int} = -\mathbf{d}(t) \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{r}}_A, t). \quad (1.9)$$

Nessa equação \mathbf{d} é o operador momento de dipolo e $\mathbf{E}(\hat{\mathbf{r}}_A)$ é o operador de campo elétrico calculado no operador de posição do átomo. Ressalta-se que os operadores em questão estão na representação de Heisenberg, a qual será usada daqui em diante no texto.

A forma do hamiltoniano permite separar os operadores de dipolo e o campo na posição do centro de massa atômico em duas contribuições: uma contribuição do operador flutuante (\hat{O}^{fl}) e outra induzida pelas flutuações (\hat{O}^{ind}) [26]

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(t) &= \mathbf{d}^{ind}(t) + \mathbf{d}^{fl}(t) \\ \mathbf{E}(\hat{\mathbf{r}}_A, \mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}^{ind}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{fl}(\hat{\mathbf{r}}_A, t).\end{aligned}\tag{1.10}$$

O formalismo desenvolvido na seção anterior (ver equação 1.7) permite determinar as funções resposta do sistema com respeito às flutuações de dipolo e do campo elétrico. A susceptibilidade para o momento de dipolo é [35]:

$$\alpha_{ij}^a(t, t') = \frac{i}{\hbar} \langle a | [d_i^{fl}(t), d_j^{fl}(t')] | a \rangle \theta(t - t'),\tag{1.11}$$

sendo $|a\rangle$ o estado em que o átomo se encontra e d_i a i -ésima componente do vetor operador momento de dipolo. A susceptibilidade é chamada polarizabilidade em analogia ao caso clássico: aqui a função resposta determina o momento de dipolo $\mathbf{d}^{ind}(t)$ induzido pelo campo elétrico.

Para determinar a função resposta do campo elétrico flutuante considera-se a largura do pacote de onda atômico desprezível em relação aos comprimentos de onda relevantes do campo elétrico. Desta forma, o operador posição do átomo pode ser substituído pelo vetor posição do centro de massa. Com base nessa aproximação, a susceptibilidade é dada por [35]

$$G_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{i}{\hbar} \langle [E_i^{fl}(\mathbf{r}, t), E_j^{fl}(\mathbf{r}', t')] \rangle \theta(t - t').\tag{1.12}$$

Vale ressaltar que a média quântica do comutador (ao contrário da polarizabilidade) não depende do estado do campo eletromagnético, uma vez que o operador de campo elétrico no vácuo é uma combinação linear de operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger , cujo comutador é um número complexo [29]. Outra propriedade importante é a dependência espacial e temporal da susceptibilidade. As relações de comutação do campo elétrico impõem a seguinte relação [28, 29], a qual traduz o retardamento do campo:

$$G_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = G_{ij}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|; t - t').\tag{1.13}$$

A função resposta é então um propagador para o operador campo elétrico induzido e em analogia à eletrodinâmica clássica podemos identificá-la como uma função de Green para o campo.

É conveniente utilizar as funções resposta no espaço Fourier das frequências. Tomando a transformada de Fourier das equações 1.11 e 1.12

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overleftrightarrow{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') e^{i\omega(t-t')} \\ \overleftrightarrow{\alpha}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overleftrightarrow{\alpha}(t - t') e^{i\omega(t-t')},\end{aligned}\quad (1.14)$$

é possível estabelecer as seguintes relações [26], conectando os observáveis induzidos e os flutuantes:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{ind}(\omega) &= \overleftrightarrow{\alpha}^a(\omega) \cdot \mathbf{E}^{fl}(\mathbf{r}', \omega) \\ \mathbf{E}^{ind}(\mathbf{r}, \omega) &= \overleftrightarrow{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{d}^{fl}(\omega).\end{aligned}\quad (1.15)$$

Pode-se então obter a forma explícita de $\overleftrightarrow{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ (que será usada de maneira extensiva no capítulo 3): uma vez que existe uma correspondência entre as soluções clássicas e quânticas das equações de Maxwell, tem-se que o tensor $\overleftrightarrow{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ é solução da seguinte equação [26,28], a qual representa a componente de Fourier ω do campo elétrico na posição \mathbf{r} gerado por um dipolo oscilando na mesma frequência na posição \mathbf{r}' :

$$\nabla \times \nabla \times \overleftrightarrow{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \overleftrightarrow{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \overleftrightarrow{\mathbf{I}}, \quad (1.16)$$

sendo $\overleftrightarrow{\mathbf{I}}$ o tensor identidade e $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$ corresponde à função dielétrica do material. No caso do vácuo, a solução dessa equação é um tensor cujas componentes são dadas por

$$G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[(k^2 R^2 + ikR - 1) \delta_{ij} - (k^2 R^2 + 3ikR - 3) \frac{R_i R_j}{R^2} \right], \quad (1.17)$$

sendo $\mathbf{R} := \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ e $k = \omega/c$. Caso exista algum objeto na vizinhança do átomo, a função de Green total é a soma da função de Green no espaço livre $G_{ij}^{(0)}$ (dada por 1.17) com uma função de Green $G_{ij}^{(S)}$ associada ao campo espalhado:

$$G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = G_{ij}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) + G_{ij}^{(S)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega). \quad (1.18)$$

A descrição da interação do átomo com o campo em termos de funções resposta é bastante conveniente em interferômetros atômicos, conforme será discutido na próxima seção.

1.2 Efeitos dispersivos em interferômetros atômicos

Nesta seção será discutido o papel de interações dispersivas em interferômetros atômicos. A discussão se iniciará com uma apresentação sobre interferometria atômica. Em seguida será apresentada a evolução temporal em um interferômetro atômico através do funcional de influência e como as flutuações do campo elétrico e do dipolo atômico influenciam essa dinâmica.

Interferômetros atômicos são análogos, com ondas de matéria, de interferômetros óticos. Estes dispositivos usam divisores de feixes, permitindo uma superposição coerente de pacotes de onda atômicos se propagando por diferentes caminhos, antes de serem recombinados e interferirem. O centro de cada pacote segue uma trajetória que pode ser definida por um guia de ondas atômicas [36], tipicamente implementado por um campo eletromagnético [9].

Considera-se então um interferômetro de dois caminhos distintos onde o átomo interage com o campo eletromagnético. Assume-se que o átomo passa por um divisor de feixes 50%/50%, fazendo com que a probabilidade de seguir por um caminho ou outro seja a mesma. Nessas condições, a função de onda do sistema no instante inicial $t = 0$ é [19]

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_{CM}^1(0)\rangle + |\psi_{CM}^2(0)\rangle) \otimes |\psi_I(0)\rangle \otimes |\psi_C(0)\rangle, \quad (1.19)$$

sendo que $|\psi_{CM}^i(0)\rangle$ é a função de onda associada a cada trajetória $i = 1, 2$, $|\psi_I(0)\rangle$ corresponde à função de onda do grau de liberdade interno do átomo e $|\psi_C(0)\rangle$ determina o estado do campo. Neste modelo considera-se trajetórias clássicas prescritas para o centro de massa do átomo, uma vez que forças dispersivas têm um efeito extremamente pequeno sobre as trajetórias em condições usuais. Desta forma, despreza-se a largura do

pacote para calcular a fase associada às forças dispersivas.

Na aproximação de pacotes de onda estreitos considerada, cada caminho corresponde a uma trajetória clássica. Como a influência do campo sobre as trajetórias foi desprezada, obtém-se a seguinte evolução do sistema quântico num dado instante $t = T$ [19]:

$$|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\psi_{CM}^1(T)\rangle \otimes \mathcal{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt H_{int}(\mathbf{r}_1(t))} (|\psi_I(0)\rangle \otimes |\psi_C(0)\rangle) + |\psi_{CM}^2(T)\rangle \otimes \mathcal{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt H_{int}(\mathbf{r}_2(t))} (|\psi_I(0)\rangle \otimes |\psi_C(0)\rangle)]. \quad (1.20)$$

Aqui o hamiltoniano de interação corresponde ao potencial dado por 1.9, calculado com um pacote atômico estreito centrado na posição $\mathbf{r}_i(t)$ e \mathcal{T} representa o operador de ordenamento temporal de Dyson³. É possível então calcular a fase gerada no interferômetro pela interação com o campo.

1.2.1 Interferômetros atômicos como sistemas quânticos abertos: fases locais e não-locais

1.2.1.1 O funcional de influência

Uma vez que os estados associados aos graus de liberdade interno do átomo e do campo não são diretamente medidos em experimentos de interferometria atômica, pode-se trabalhar com a matriz densidade reduzida envolvendo apenas o centro de massa atômico. O termo de interesse corresponde ao termo de interferência, uma vez que os termos fora da diagonal da matriz densidade representam a coerência do grau liberdade do centro de massa do átomo. Na representação de posição esse termo é dado por [19]

$$\rho_{12}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; T) = \rho_{12}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; T) e^{i\Phi_{12}}, \quad (1.21)$$

na qual $\rho_{12}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; T) = \frac{1}{2} \psi_{CM}^{*2}(\mathbf{r}', T) \psi_{CM}^1(\mathbf{r}, T)$ corresponde ao termo de interferência na ausência de campo externo e o fator $e^{i\Phi_{12}}$ é definido da seguinte maneira [19]:

$$e^{i\Phi_{12}[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]} := \langle \psi_C(0) | \otimes \langle \psi_I(0) | \tilde{\mathcal{T}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt H_{int}(\mathbf{r}_2(t))} \mathcal{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt H_{int}(\mathbf{r}_1(t))} | \psi_I(0) \rangle \otimes | \psi_C(0) \rangle, \quad (1.22)$$

³A inclusão desse operador é necessária tendo em vista que o operador de evolução temporal será expandido numa série de Dyson e é conveniente garantir o ordenamento temporal.

dado que $\tilde{\mathcal{T}}$ corresponde ao operando de antiordenamento temporal. Este termo é chamado funcional de influência, uma vez que determina o efeito do campo sobre a fase associada ao centro de massa atômico. Ressalta-se que $e^{i\Phi_{12}}$ (para dados \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2) é um número complexo e em geral a fase Φ_{12} possui uma parte real e uma parte imaginária. Enquanto a parte real atua deslocando as fases que resultam de coerências entre os caminhos do interferômetro, sua parte imaginária diminui a visibilidade das franjas de interferência, correspondendo à descoerência induzida pelos graus de liberdade sobre o sistema atômico.

1.2.1.2 Expansão em segunda ordem

Dada a hipótese que o hamiltoniano de interação com o campo é perturbativo, pode-se expandir os operadores de evolução temporal no funcional de influência até segunda ordem na série de Dyson:

$$e^{i\Phi_{12}} \approx \langle \psi_C(0) | \otimes \langle \psi_I(0) | \left(1 + \frac{i}{\hbar} \int_0^T H_{int}(\mathbf{r}_2(t)) dt - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^T \int_0^t H_{int}(\mathbf{r}_2(t')) H_{int}(\mathbf{r}_2(t)) dt' dt \right) \times \\ \times \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^T H_{int}(\mathbf{r}_1(t)) dt - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^T \int_0^t H_{int}(\mathbf{r}_1(t)) H_{int}(\mathbf{r}_1(t')) dt' dt \right) | \psi_I(0) \rangle \otimes | \psi_C(0) \rangle . \quad (1.23)$$

Reescrevendo de modo a manter apenas termos de segunda ordem no hamiltoniano e tomando as médias quânticas, tem-se

$$e^{i\Phi_{12}} = 1 + \frac{i}{\hbar} \int_0^T \langle H_{int}(\mathbf{r}_2(t)) \rangle_0 dt - \frac{i}{\hbar} \int_0^T \langle H_{int}(\mathbf{r}_1(t)) \rangle_0 dt + \\ + \frac{1}{\hbar^2} \int_0^T \int_0^T \langle H_{int}(\mathbf{r}_2(t')) H_{int}(\mathbf{r}_1(t)) \rangle_0 dt' dt - \\ - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^T \int_0^t \langle H_{int}(\mathbf{r}_2(t')) H_{int}(\mathbf{r}_2(t)) \rangle_0 dt' dt - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^T \int_0^t \langle H_{int}(\mathbf{r}_1(t)) H_{int}(\mathbf{r}_1(t')) \rangle_0 dt' dt, \quad (1.24)$$

sendo $\langle \dots \rangle_0$ a média quântica correspondente ao estado $|\psi_I(0)\rangle \otimes |\psi_C(0)\rangle$. Note que o termo

$$\frac{1}{\hbar^2} \int_0^T \int_0^T \langle H_{int}(\mathbf{r}_2(t')) H_{int}(\mathbf{r}_1(t)) \rangle_0 dt' dt$$

contém informação sobre ambas as trajetórias, representando uma fase não-local enquanto os outros termos são essencialmente locais, i.e., apenas conectam pontos em instantes

diferentes da mesma trajetória. A seguir será argumentado que somente os termos de segunda ordem são relevantes, dado que termos de primeira ordem se anulam.

1.2.2 Aplicação à interação dipolar elétrica

Usando o hamiltoniano de interação (equação 1.9) na equação 1.24, obtém-se

$$e^{i\Phi_{12}} = 1 + \frac{1}{\hbar^2} \int_0^T \int_0^T \langle d_i(t')d_j(t) \rangle \langle E_i(\mathbf{r}_2(t'))E_j(\mathbf{r}_1(t)) \rangle - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^T \int_0^t \langle d_i(t')d_j(t) \rangle \langle E_i(\mathbf{r}_1(t))E_j(\mathbf{r}_1(t')) \rangle - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^T \int_0^t \langle d_i(t')d_j(t) \rangle \langle E_i(\mathbf{r}_2(t'))E_j(\mathbf{r}_2(t)) \rangle. \quad (1.25)$$

Os termos de primeira ordem no hamiltoniano são nulos, pois a média do operador momento de dipolo (em primeira ordem) é zero, uma vez que não existe momento de dipolo permanente. Aqui foi usada a notação de Einstein, a qual subentende um somatório sobre índices repetidos. Supondo que a fase Φ_{12} é muito menor que 1, pode-se realizar a seguinte expansão:

$$e^{i\Phi_{12}} \approx 1 + i\Phi_{12}. \quad (1.26)$$

Logo, tem-se que a fase gerada pela interação com o campo é dada por

$$\Phi_{12} = \Phi_{DP} + \Phi_{SP}, \quad (1.27)$$

sendo Φ_{DP} a fase não-local (ou de duplo caminho) e Φ_{SP} a fase local (ou de caminho único).

Para entender a origem dessa fase, pode-se reescrever as fases local e não-local em termos das funções resposta calculadas na seção anterior. Utilizando as seguintes relações

$$d_i(t')d_j(t) = \frac{1}{2}([d_i(t'), d_j(t)] + \{d_i(t'), d_j(t)\}) \quad (1.28)$$

$$E_i(\mathbf{r}_2(t'))E_j(\mathbf{r}_1(t)) = \frac{1}{2}([E_i(\mathbf{r}_2(t')), E_j(\mathbf{r}_1(t))] + \{E_i(\mathbf{r}_2(t')), E_j(\mathbf{r}_1(t))\})$$

tem-se a seguinte expressão para a parte real da fase de caminho duplo:

$$\phi_{DP} := \text{Re } \Phi_{DP} = \frac{1}{4\hbar} \int_0^T \int_0^T dt dt' (\langle \{d_i(t), d_j(t')\} \rangle [G_{ij}(\mathbf{r}_2(t), t; \mathbf{r}_1(t'), t') - G_{ij}(\mathbf{r}_1(t), t; \mathbf{r}_2(t'), t')] + \alpha_{ij}^a(t, t') [\langle \{E_i(\mathbf{r}_2(t)), E_j(\mathbf{r}_1(t'))\} \rangle - \langle \{E_i(\mathbf{r}_2(t')), E_j(\mathbf{r}_1(t))\} \rangle]) \quad (1.29)$$

É possível estabelecer então uma interpretação física de cada um dos termos. Nota-se que o primeiro termo por conter a função de Green para o campo elétrico representa a fase gerada pelas flutuações de dipolo e portanto a interação devido à reação de radiação do átomo, enquanto o segundo termo leva em conta as flutuações do campo elétrico ao induzir um dipolo no sistema através da polarizabilidade atômica [18]. De maneira análoga tem-se a expressão para a fase de caminho único:

$$\begin{aligned} \phi_{SP} := \text{Re } \Phi_{SP} = & \frac{1}{4\hbar} \int_0^T \int_0^T dt dt' (\langle \{d_i(t), d_j(t')\} \rangle [G_{ij}(\mathbf{r}_2(t), t; \mathbf{r}_2(t'), t') - G_{ij}(\mathbf{r}_1(t), t; \mathbf{r}_1(t'), t')] + \\ & + \alpha_{ij}^a(t, t') [\langle \{E_i(\mathbf{r}_2(t)), E_j(\mathbf{r}_2(t'))\} \rangle - \langle \{E_i(\mathbf{r}_1(t')), E_j(\mathbf{r}_1(t))\} \rangle]). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Esses resultados, obtidos em [18–20], serão centrais no capítulo 4, no qual será discutido o papel de rotações de objetos próximos ao interferômetro na interação, e portanto, na fase. Dado que este trabalho se atém aos aspectos mensuráveis da fase interferométrica, o foco será destinado à parte real da fase.

Capítulo 2

Polarizabilidade de um Objeto em Rotação

A resposta eletromagnética de materiais é um tópico antigo de física. Seja no contexto da eletrodinâmica clássica [37] ou quântica [28], há na literatura estudos sobre a resposta eletromagnética de diversos materiais. Neste capítulo estudar-se-á como rotações afetam a interação da matéria com o campo eletromagnético.

Experimentos recentes [38–40] realizaram rotações em objetos microscópicos a frequências da ordem de GHz, os quais por sua vez interagem com o campo eletromagnético no estado de vácuo, motivando assim o estudo sobre como a rotação afeta a resposta desses materiais ao campo, dado que de rotações de objetos no vácuo podem surgir efeitos como o efeito Casimir dinâmico e a fricção quântica.

No contexto da aproximação de dipolo, a resposta do material ao campo é a polarizabilidade. Portanto, este capítulo será dedicado a entender como se altera a polarizabilidade de um material devido a rotações em relação a um referencial inercial. Na primeira seção discute-se o caso particular em que a rotação ocorre com relação ao eixo de simetria do objeto, mostrando como se afeta o tensor polarizabilidade do material. Na segunda seção o eixo de rotação é considerado perpendicular ao eixo de simetria e mostrar-se-á que nesse caso há a geração das chamadas bandas laterais, levando a efeitos diferentes.

2.1 Polarizabilidade de um Objeto em Rotação em Torno do Eixo de Simetria

Esta seção discute em maior detalhe o formalismo desenvolvido no apêndice da referência [41]. Partindo da relação 1.15, sabe-se que a mesma é válida supondo que o momento de dipolo e o campo estejam definidos com respeito a um referencial inercial. É necessário, então, determinar a relação entre o momento de dipolo no referencial de repouso do objeto girante ($\mathbf{d}'(\mathbf{t})$) e o momento de dipolo no referencial do laboratório ($\mathbf{d}(\mathbf{t})$), o mesmo para o campo elétrico, para construir o tensor polarizabilidade efetiva ($\overleftrightarrow{\alpha}^{Eff}(\omega)$), definido pela seguinte relação:

$$\mathbf{d}(\omega) = \overleftrightarrow{\alpha}^{Eff}(\omega)\mathbf{E}(\omega). \quad (2.1)$$

A mudança de referencial pode ser feita em termos de uma rotação em torno do eixo de simetria do objeto (aqui é suposto qualquer objeto com simetria axial, considerado como o eixo z) por um ângulo Ωt , sendo o Ω a velocidade de rotação (figura 2.1). A essa

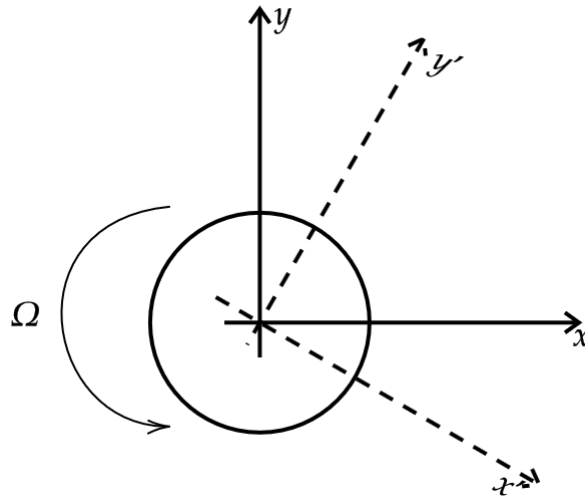


Figura 2.1: Mudança de referencial entre o referencial co-móvel ao objeto ($x'y'$) e o referencial do laboratório (xy).

transformação pode-se associar a matriz de rotação \mathcal{R} :

$$\mathbf{r} = \mathcal{R}_{(\Omega t)} \mathbf{r}' \quad | \quad \mathcal{R}_{(\Omega t)} := \begin{pmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t & 0 \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

então

$$\begin{aligned} d_x &= d'_x \cos \Omega t - d'_y \sin \Omega t \\ d_y &= d'_x \sin \Omega t + d'_y \cos \Omega t \\ d_z &= d'_z. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Tomando a transformada de Fourier da equação 2.3 tem-se

$$\begin{aligned} d_x(\omega) &= \frac{1}{2}[d'_x(\omega_+) + d'_x(\omega_-) + id'_y(\omega_+) - id'_y(\omega_-)] \\ d_y(\omega) &= \frac{1}{2}[-id'_x(\omega_+) + id'_x(\omega_-) + d'_y(\omega_+) + d'_y(\omega_-)], \end{aligned} \quad (2.4)$$

sendo $\omega_{\pm} := \omega \pm \Omega$.

No referencial de repouso do objeto, o tensor polarizabilidade $\overleftarrow{\alpha}(\omega)$ é considerado da seguinte forma [41]

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Utilizando a equação 1.15 para o referencial de repouso e empregando a forma explícita de $\overleftarrow{\alpha}(\omega)$ na expressão 2.4 tem-se

$$\begin{aligned} d_x &= \frac{1}{2}[\alpha_{\perp}(\omega_+)E'_x(\omega_+) + \alpha_{\perp}(\omega_-)E'_x(\omega_-) + i\alpha_{\perp}(\omega_+)E'_y(\omega_+) - i\alpha_{\perp}(\omega_-)E'_y(\omega_-)] \\ d_y &= \frac{1}{2}[-i\alpha_{\perp}(\omega_+)E'_x(\omega_+) + i\alpha_{\perp}(\omega_-)E'_x(\omega_-) + \alpha_{\perp}(\omega_+)E'_y(\omega_+) + \alpha_{\perp}(\omega_-)E'_y(\omega_-)]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Utilizando a mesma técnica empregada para determinar $\mathbf{d}(\omega)$, obtém-se a seguinte relação para o campo elétrico no referencial do laboratório e no referencial de repouso do objeto:

$$\begin{aligned} E_x(\omega) + iE_y(\omega) &= E'_x(\omega_+) + iE'_y(\omega_+) \\ E_x(\omega) - iE_y(\omega) &= E'_x(\omega_-) - iE'_y(\omega_-). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Substituindo essas relações na equação 2.6 tem-se uma equação envolvendo apenas o campo elétrico e o momento de dipolo no referencial do laboratório. É então imediato

escrever o tensor polarizabilidade efetiva

$$\overleftrightarrow{\alpha}^{eff}(\omega) = \begin{pmatrix} \alpha_{xx}(\omega) & \alpha_{xy}(\omega) & 0 \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\parallel}(\omega) \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

sendo

$$\begin{aligned} \alpha_{xx}(\omega) = \alpha_{yy}(\omega) &:= \frac{\alpha_{\perp}(\omega_+) + \alpha_{\perp}(\omega_-)}{2} \\ \alpha_{xy}(\omega) = -\alpha_{yx}(\omega) &:= \frac{i[\alpha_{\perp}(\omega_+) - \alpha_{\perp}(\omega_-)]}{2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Note que a rotação preserva a propriedade de realidade do tensor polarizabilidade, i.e.,

$$\overleftrightarrow{\alpha}^{eff}(-\omega) = (\overleftrightarrow{\alpha}^{eff}(\omega))^*. \quad (2.10)$$

Dois pontos devem ser destacados sobre as equações 2.8 e 2.9. Primeiramente nota-se que quando $\Omega \rightarrow 0$ recupera-se, como esperado, o resultado para a polarizabilidade no referencial de repouso. Outra característica de importância é a dependência com a dispersão: de fato só há efeito devido a rotação se o material for dispersivo, pois sem dependência em ω o tensor assume a forma da equação 2.5.

Um caso de particular interesse (o qual corresponde às condições experimentais usuais) ocorre quando as escalas de frequência do campo elétrico são muito maiores que a frequência angular de rotação do objeto. Nesse caso pode-se expandir as componentes do tensor mantendo apenas termos lineares em Ω

$$\overleftrightarrow{\alpha}^{eff}(\omega) = \begin{pmatrix} \alpha_{\perp}(\omega) & i\Omega\alpha'_{\perp}(\omega) & 0 \\ -i\Omega\alpha'_{\perp}(\omega) & \alpha_{\perp}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\parallel}(\omega) \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

2.2 Polarizabilidade de um Objeto em Rotação em Torno de um Eixo Ortogonal ao Eixo de Simetria

Na seção anterior foi deduzida a polarizabilidade para um objeto em rotação em torno do eixo de simetria. No entanto, os experimentos mais recentes [38] (e que até o presente momento atingiram as maiores frequências de rotação) foram realizados utilizando objetos

semelhantes aos da figura 2.2 em rotação em torno de um eixo perpendicular ao eixo de simetria, motivando a determinar a polarizabilidade para esse caso, o qual não se encontra na literatura. Isso será feito aplicando o mesmo método apresentado na seção 2.1.

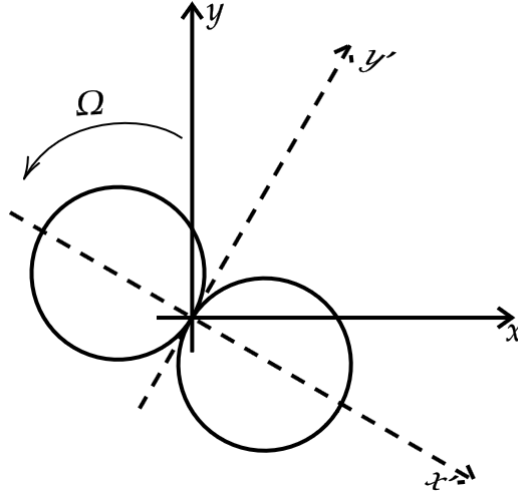


Figura 2.2: Mudança de referencial entre o referencial co-móvel ao objeto ($x'y'$) e o referencial do laboratório (xy).

Supondo que o eixo de simetria é o eixo x e mantendo a hipótese de rotação em torno do eixo z , tem-se que a polarizabilidade no referencial de repouso é

$$\vec{\alpha}(\omega) = \begin{pmatrix} \alpha_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\perp} \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

portanto

$$d'_x = \alpha_{\parallel} E'_x$$

$$d'_y = \alpha_{\perp} E'_y$$

$$d'_z = \alpha_{\perp} E'_z.$$

Definindo as seguintes quantidades:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\alpha_{\parallel}(\omega) + \alpha_{\perp}(\omega)}{2} \\ \Delta &= \frac{\alpha_{\parallel}(\omega) - \alpha_{\perp}(\omega)}{2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

obtém-se, usando a matriz de rotação 2.2

$$\begin{aligned}
d_x(\omega) &= \frac{1}{2}[S^+(E_x(\omega) + iE_y(\omega)) + S^-(E_x(\omega) - iE_y(\omega)) + \\
&\quad + \Delta^+(E'_x(\omega_+) - iE'_y(\omega_+)) + \Delta^-(E'_x(\omega_-) + iE'_y(\omega_-))] \\
d_y(\omega) &= \frac{1}{2}[S^+(-iE_x(\omega) + E_y(\omega)) + S^-(-iE_x(\omega) - E_y(\omega)) - \\
&\quad - \Delta^+(iE'_x(\omega_+) + E'_y(\omega_+)) + \Delta^-(iE'_x(\omega_-) - E'_y(\omega_-))].
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Os superescritos + e - indicam que S e Δ são calculados em ω_+ e ω_- , respectivamente. Embora no caso apresentado na seção anterior o momento de dipolo para uma dada frequência ω é gerado por um campo de mesma frequência, aqui há a geração de bandas laterais, i.e., a frequência do campo é modulada pela frequência de rotação do objeto, de modo que $\mathbf{d}(\omega)$ é gerado por outra componente de Fourier do campo. Esse fenômeno pode ser vinculado ao efeito Casimir dinâmico [27], uma vez que, diferentemente do caso anterior, o objeto não ocupa a mesma posição no espaço para todos os instantes.

A equação 2.14 envolve ainda componentes do campo no referencial co-móvel à esfera. Isso pode ser resolvido utilizando de forma iterativa as relações dadas pela equação 2.7, uma vez que são válidas para todo ω

$$\begin{aligned}
E_x(\omega_{--}) + iE_y(\omega_{--}) &= E'_x(\omega_-) + iE'_y(\omega_-) \\
E_x(\omega_{++}) - iE_y(\omega_{++}) &= E'_x(\omega_+) - iE'_y(\omega_+).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Nesse sentido a equação 2.7 pode ser entendida como operadores de levantamento e abaixamento da frequência do campo elétrico, em analogia aos operadores escada do oscilador harmônico quântico.

Nessas condições o momento de dipolo é dado pela seguinte equação:

$$\mathbf{d}(\omega) = \overleftarrow{\alpha}_0(\omega)\mathbf{E}(\omega) + \overleftarrow{\alpha}_+(\omega)\mathbf{E}(\omega + 2\Omega) + \overleftarrow{\alpha}_-(\omega)\mathbf{E}(\omega - 2\Omega), \tag{2.16}$$

na qual $\overleftrightarrow{\alpha}_0(\omega)$, $\overleftrightarrow{\alpha}_+(\omega)$ e $\overleftrightarrow{\alpha}_-(\omega)$ são definidos por

$$\begin{aligned}
\overleftrightarrow{\alpha}_0(\omega) &:= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(S^+ + S^-) & \frac{i}{2}(S^+ - S^-) & 0 \\ \frac{-i}{2}(S^+ - S^-) & \frac{1}{2}(S^+ + S^-) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\perp}(\omega) \end{pmatrix} \\
\overleftrightarrow{\alpha}_+(\omega) &:= \begin{pmatrix} \frac{\Delta^+}{2} & \frac{-i\Delta^+}{2} & 0 \\ \frac{-i\Delta^+}{2} & \frac{-\Delta^+}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\overleftrightarrow{\alpha}_-(\omega) &:= \begin{pmatrix} \frac{\Delta^-}{2} & \frac{i\Delta^-}{2} & 0 \\ \frac{i\Delta^-}{2} & \frac{-\Delta^-}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Ressalta-se ao leitor duas peculiaridades do tensor calculado: diferentemente da polarizabilidade calculada na equação 2.8 este caso pode ocorrer mesmo se o material não for dispersivo, contanto que o material seja anisotrópico de modo a ter $\alpha_{\perp} \neq \alpha_{\parallel}$. A segunda propriedade são as bandas laterais moduladas pelo dobro da frequência de rotação, o que pode ser entendido pela simetria de translação temporal discreta do problema, uma vez que o objeto ocupa a mesma posição no espaço a cada metade de período de rotação.

Capítulo 3

Fase Sagnac para uma esfera em rotação no vácuo

Usando as ferramentas teóricas expostas nos capítulos anteriores, apresenta-se agora o resultado principal dessa dissertação: a expressão analítica da fase atômica oriunda da interação com uma esfera em rotação.

Na primeira seção é apresentado o cálculo da fase atômica num interferômetro com configuração circular. Usando parâmetros extraídos de artigos experimentais, obtém-se uma estimativa quantitativa desta fase. A segunda seção contempla uma configuração de interferômetro com trajetórias atômicas retilíneas, que podem ser de mais fácil implementação experimental.

3.1 Fase Sagnac Para Trajetórias Atômicas Semicirculares

Primeiramente considera-se o caso de pacotes de onda que se propagam no plano xy seguindo caminhos semicirculares de mesmo raio e sentidos opostos. Tal geometria é amplamente utilizada em laboratório [42–49]. No centro do círculo formado por ambos os caminhos semi-circulares, encontra-se uma esfera de material dispersivo em rotação em torno do eixo z , conforme a figura 3.1.

Nesta abordagem analítica serão usadas as seguintes aproximações: o raio da esfera

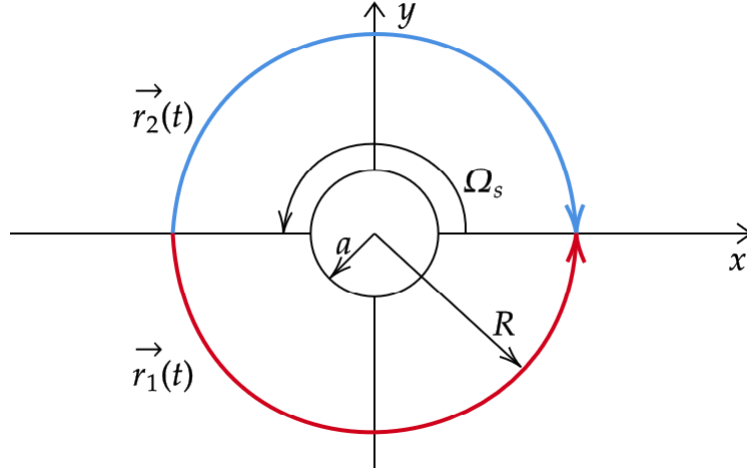


Figura 3.1: Esquema de um interferômetro atômico de trajetórias semicirculares de raio R . No centro há uma esfera de raio a em rotação em torno do eixo z com velocidade angular Ω_s .

é muito menor do que o raio das trajetórias, que por sua vez é muito menor que os comprimentos de onda típicos de emissão do átomo, validando-se então a aproximação de dipolo tanto para o átomo quanto para a esfera. Considera-se também que a largura dos pacotes de onda que se propagam no interferômetro é desprezível, de modo que o grau de liberdade externo do átomo (movimento do centro de massa) é tratado classicamente. Esta aproximação permite que o operador posição do centro de massa atômico $\hat{\mathbf{r}}_a$ seja substituído pela função movimento do centro de massa atômico $\mathbf{r}_i(t)$ em cada um dos caminhos $i = 1, 2$, parametrizados da seguinte forma (ver figura 3.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= -(R \cos(\Omega_A t) \hat{\mathbf{x}} + R \sin(\Omega_A t) \hat{\mathbf{y}}) \\ \mathbf{r}_2(t) &= -(R \cos(\Omega_A t) \hat{\mathbf{x}} - R \sin(\Omega_A t) \hat{\mathbf{y}}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

impondo também a condição de que $\Omega_A T = \pi$, sendo T o tempo de interação do átomo no interferômetro. Então, com base no formalismo desenvolvido no capítulo 1, pode-se calcular as fases de caminho duplo e caminho único.

3.1.1 Fase de Caminho Duplo

Um argumento de simetria mostra que a contribuição da componente livre ($G_{ij}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$) da função de Green na equação 1.18 é nula, uma vez que os caminhos são equivalentes

na ausência da esfera. Portanto, pode-se restringir à componente espalhada da função de Green, usando uma versão simplificada da equação 1.29:

$$\phi_{DP} = \frac{1}{4\hbar} \int_0^T \int_0^T dt dt' \langle \{d_i(t), d_j(t')\} \rangle [G_{ij}^{(S)}(\mathbf{r}_2(t), t; \mathbf{r}_1(t'), t') - G_{ij}^{(S)}(\mathbf{r}_1(t), t; \mathbf{r}_2(t'), t')]. \quad (3.2)$$

Aqui não foi incluído o termo envolvendo as flutuações do campo, pois no regime não-retardado considera-se que a contribuição das flutuações de campo é muito pequena em relação à contribuição oriunda das flutuações de dipolo [18]. Esta aproximação corresponde à aproximação de Van der Walls, que é justamente a interação dispersiva entre dipolos a curtas distâncias (com respeito ao comprimento de onda) e será discutida mais adiante. A função de Green espalhada pode ser escrita de maneira mais simples no espaço de Fourier:

$$G_{il}^{(S)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega, \omega') = G_{ij}^{(0)}(\mathbf{r}_2, 0, \omega') \alpha_{jk}^{Eff}(\omega) G_{kl}^{(0)}(0, \mathbf{r}_1, \omega) \delta(\omega + \omega'), \quad (3.3)$$

sendo $\alpha_{jk}^{Eff}(\omega)$ o elemento de matriz do tensor polarizabilidade de uma esfera em rotação, conforme deduzido no capítulo anterior. A distribuição de Dirac em frequência traduz a conservação de energia do sistema: um fóton espalhado pela esfera em rotação (na aproximação de dipolo) possui a mesma energia que o fóton incidente.

O anticomutador das componentes do operador de dipolo do átomo é dado por [34]

$$\langle \{d_l(t), d_m(t')\} \rangle = \hbar \alpha_0 \omega_0 \cos \omega_0(t - t') \delta_{lm}. \quad (3.4)$$

Nessa equação α_0 corresponde à polarizabilidade estática do átomo e ω_0 é a frequência de ressonância, pois o modelo para o grau de liberdade interno do átomo corresponde a um sistema de dois níveis.

Empregando então a forma explícita da função de Green no espaço livre 1.17 tem-se então para a fase:

$$\phi_{DP} = \frac{\alpha_0 \omega_0}{(4\pi\epsilon_0)^2 4R^6} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha_{xy} |k^2 R^2 + 3ikR - 3|^2 \int_0^T \int_0^T dt dt' \cos \omega_0(t - t') \sin 2\Omega_A(t + t') e^{-i\omega(t-t')}, \quad (3.5)$$

sabendo que todos os termos envolvendo componentes diagonais do tensor de Green se anulam. É conveniente utilizar a mudança de variáveis: $\tau := t - t'$ e $S := t + t'$, que junto com a condição de fechamento do círculo torna imediato mostrar que a integral em S se anula. Logo,

$$\phi_{DP} = 0.$$

3.1.2 Fase de Caminho Único

A fase de caminho único, diferentemente do caso anterior, não se anula, conforme será mostrado a seguir. Intuitivamente, isso ocorre devido aos caminhos serem percorridos em sentidos opostos ao redor da esfera.

Usando a equação 1.30, tem-se a fase de caminho único:

$$\phi_{SP} = \frac{1}{4\hbar} \int_0^T \int_0^T dt dt' (\langle \{d_i(t), d_j(t')\} \rangle [G_{ij}^{(S)}(\mathbf{r}_2(t), t; \mathbf{r}_2(t'), t') - G_{ij}^{(S)}(\mathbf{r}_1(t), t; \mathbf{r}_1(t'), t')]). \quad (3.6)$$

Substituindo as expressões das funções de Green, obtém-se:

$$\phi_{SP} = \frac{\alpha_0 \omega_0}{(4\pi\epsilon_0)^2 4R^6} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha_{xy}(\omega) |k^2 R^2 + 3ikR - 3|^2 \int_0^T \int_0^T dt dt' \cos \omega_0(t - t') \sin(2\Omega_A(t - t')) e^{-i\omega(t-t')}. \quad (3.7)$$

O cálculo em detalhe da fase se encontra no apêndice A. A fase é dada por:

$$\phi_{SP} = \frac{\alpha_0 \omega_0 T \pi}{(4\pi\epsilon_0)^2 8R^6} \{p(\omega_0 - 2\Omega_A) \text{Im} \alpha_{xy}(\omega_0 - 2\Omega_A) - p(\omega_0 + 2\Omega_A) \text{Im} \alpha_{xy}(\omega_0 + 2\Omega_A)\}. \quad (3.8)$$

Sendo $p(\omega) := |k^2 R^2 + 3ikR - 3|^2$. É interessante notar que de fato esta fase é análoga ao efeito Sagnac, pois a dependência em $\alpha_{xy}(\omega)$ (ver equação 2.9) mostra que a fase é zero se a esfera estiver em repouso.

3.1.2.1 Aproximação de Van der Waals

Como dito na seção 3.1.1, empregou-se a aproximação de Van der Waals, desprezando o efeito das flutuações de campo. Contudo, a fase calculada na expressão 3.8 contém

termos envolvendo kR , os quais traduzem o retardamento do campo induzido. Então, pela consistência com a aproximação utilizada, considera-se $kR \ll 1$. Nessas condições tem-se que $p(\omega) \approx 9$.

Uma segunda aproximação a ser feita consiste em considerar $\Omega_A \ll \omega_0$, o que é compatível com os valores típicos dos utilizados nos experimentos. É possível então empregar uma expansão em polinômios de Taylor da polarizabilidade mantendo apenas o termo linear.¹ A fase então se torna (com base na equação 2.11)

$$\phi_{SP} \approx \frac{-9}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{\pi^2 \omega_0 \Omega_s \alpha_0}{R^6} \operatorname{Re} \alpha''(\omega_0). \quad (3.9)$$

Devido às aproximações utilizadas a fase corresponde à uma fase geométrica, uma vez que variáveis dinâmicas como T e Ω_A não aparecem no resultado final.

3.1.2.2 Análise numérica

Em pose da equação 3.9 é possível obter valores numéricos explícitos para a fase, sabendo que a polarizabilidade de uma esfera (na aproximação de dipolo) é dada por [50]

$$\alpha(\omega) = 4\pi\epsilon_0 a^3 \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\epsilon(\omega) + 2}. \quad (3.10)$$

A forma da permissividade elétrica $\epsilon(\omega)$ muda conforme a natureza do material utilizado, se dielétrico ou condutor. Neste trabalho será considerado apenas o caso metálico, dado que ressonâncias plasmônicas contribuem para um aumento considerável da fase. Para um metal, o modelo comumente adotado para a permissividade é o modelo de plasma-Drude, segundo o qual a permissividade é [51]

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\Gamma)}, \quad (3.11)$$

sendo ω_p a frequência de plasma do material e Γ é uma escala de frequência associada com o inverso do tempo de relaxação do material.

¹Como $p(\omega) \approx 9$ a contribuição de ordem zero da polarizabilidade para a fase é zero.

Em posse desses resultados foram obtidos gráficos da fase em função da frequência angular de transição atômica, cada qual considerando um material diferente para a esfera, sendo os materiais utilizados platina e potássio. Para ambos os gráficos abaixo foram considerados os seguintes dados:

R	10 nm
a	5 nm
Ω_s	$10\pi \times 10^9 \text{ rad/s}$ [38]
$\omega_p(\text{Pt})$	$7.816 \times 10^{15} \text{ rad/s}$ [52]
$\Gamma(\text{Pt})$	$1.051 \times 10^{14} \text{ rad/s}$ [52]
$\omega_p(\text{K})$	$5.589 \times 10^{15} \text{ rad/s}$ [53]
$\Gamma(\text{K})$	$2.795 \times 10^{13} \text{ rad/s}$ [53]

Considera-se primeiramente uma esfera de platina, para a qual a fase de caminho único se encontra representada na figura 3.2. Nessas condições, considerando um átomo

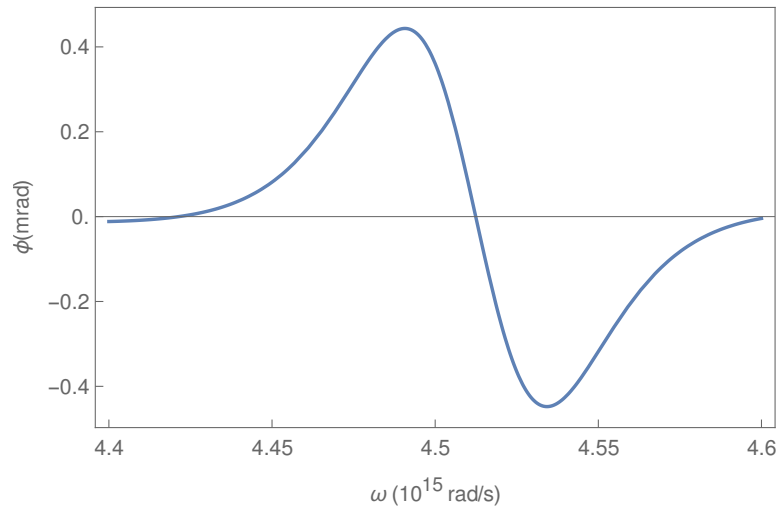


Figura 3.2: Fase de caminho único devido a uma esfera de platina em função da frequência de emissão atômica ω_0

de cálcio (cuja polarizabilidade estática é $\alpha_0 = (4\pi\epsilon_0) \times 2,5 \times 10^{-29} \text{ m}^3$ [54] e sua transição dominante ocorre na frequência de $4,46 \times 10^{15} \text{ rad/s}$) tem-se $\phi_{SP} = 0,15 \text{ mrad}$.

O efeito pode ser ainda maior se for considerado um outro material. Para uma esfera de potássio obteve-se o gráfico apresentado na figura 3.3 para a fase. nota-se que os picos da fase para o caso do potássio são duas ordens de grandeza maiores que no caso

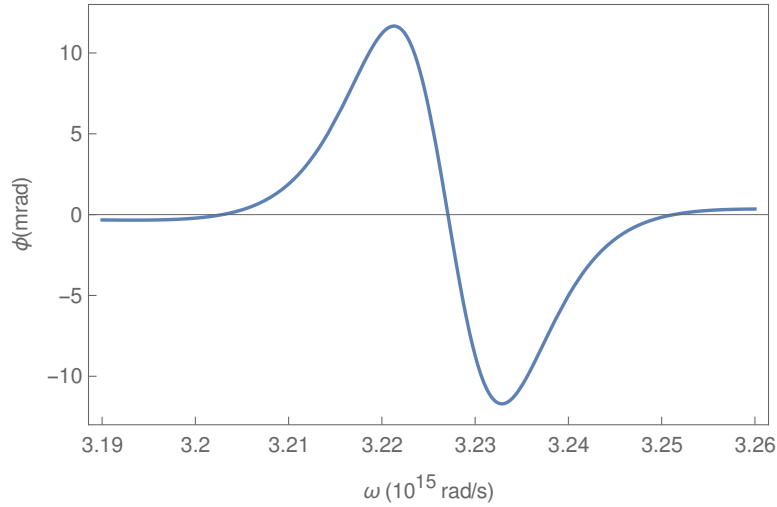


Figura 3.3: Fase de caminho único gerada por uma esfera de potássio em função da frequência de emissão atômica ω_0

de uma esfera de platina. Para o caso de um átomo de sódio no interferômetro ($\alpha_0 = (4\pi\epsilon_0) \times 2.411 \times 10^{-29} \text{m}^3$ [55] e transição dominante $\omega_0 = 3.198 \times 10^{15} \text{s}^{-1}$) tem-se uma fase $\phi_{SP} = -0,29$ rad.

A frequência de emissão dominante é próxima da frequência de ressonância plasmônica $\omega_r = \omega_p/\sqrt{3}$ [56], frequência na qual a fase atinge seu pico, na ordem de 10mrad. Mesmo fora do pico, para os materiais citados a fase atinge valores na ordem da sensibilidade de experimentos de interferometria atômica, com base nas referências [57, 58].

3.2 Fase Sagnac Para Trajetórias Atômicas Retilíneas e Paralelas

A geometria do modelo utilizado na seção 3.1 é realizável do ponto de vista experimental. Contudo, os valores utilizados na análise numérica para obter-se valores apreciáveis para a fase são pouco realistas, uma vez que os raios das trajetórias são caracteristicamente da ordem de alguns micrômetros, enquanto os valores analisados são da ordem de nanômetros.

Das várias geometrias possíveis para um interferômetro atômico é comum [36] utilizar-

se em laboratório interferômetros cujos caminhos correspondem à trajetórias retilíneas e paralelas. Em experimentos envolvendo interação de átomos e superfícies, os pacotes de onda se propagam a distâncias da ordem de alguns nanômetros da superfície [22], tornando o modelo mais realista.

Seguindo as mesmas aproximações feitas no início do capítulo, podemos considerar o modelo apresentado na figura 3.4. Calcular-se-á então, as fases de caminho duplo e

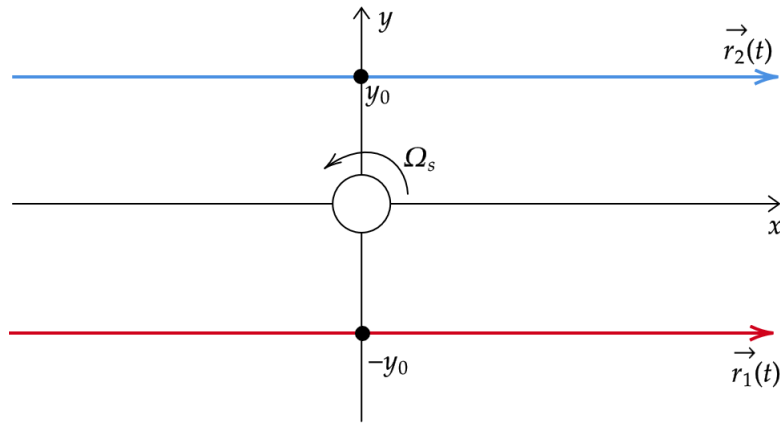


Figura 3.4: Esquema de um interferômetro atômico de trajetórias retilíneas e paralelas cuja separação é $2y_0$. No centro há uma esfera de raio a em rotação em torno do eixo z com velocidade angular Ω_s .

caminho único, considerando as seguintes parametrizações para as trajetórias:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= vt \hat{\mathbf{x}} - y_0 \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{r}_2(t) &= vt \hat{\mathbf{x}} + y_0 \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \tag{3.12}$$

as quais representam dois pacotes de onda (de largura desprezível) que se propagam paralelamente ao eixo x com velocidade v .

3.2.1 Fase de Caminho Duplo

Seguindo um procedimento análogo ao realizado na seção anterior, baseado na equação 3.2 em conjunto com as equações 3.4 e 3.12, obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \phi_{DP} = & \frac{\alpha_0 \omega_0}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' \frac{\cos \omega_0(t-t')}{R^5(t')R^5(t)} \{y_0[R^2(t)(vt') + (vt)R^2(t')] - 2y_0^3[(vt) + (vt')]\} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha_{xy}(\omega) (e^{-i\omega(t-t')} e^{ik(R(t')-R(t))} (k^2 R^2(t) - 3ikR(t) - 3)(k^2 R^2(t') + 3ikR(t') - 3)), \end{aligned} \quad (3.13)$$

sendo $R(t) := |\mathbf{r}_1(t)| = |\mathbf{r}_2(t)|$. Aqui o tempo de interação foi considerado de modo a compreender intervalos de tempo nos quais o centro de massa do átomo estivesse muito longe da esfera e por isso o tempo de interação foi tomado como infinito.

A integral acima é difícil resolução analítica, principalmente devido ao termo $e^{ik(R(t')-R(t))}$. Contudo, ao considerar a hipótese de que o retardamento é desprezível, é possível tratar o problema perturbativamente em ordens de $kR(t)$. Considerando $kR(t) \ll 1$ pode-se expandir a exponencial em polinômios de Taylor, mantendo termos até $(kR(t))^2$. A fase de duplo caminho então se torna

$$\begin{aligned} \phi_{DP} = & \frac{\alpha_0 \omega_0}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' \frac{\cos \omega_0(t-t')}{R^5(t')R^5(t)} \{y_0[R^2(t)(vt') + (vt)R^2(t')] - 2y_0^3[(vt) + (vt')]\} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha_{xy}(\omega) (e^{-i\omega(t-t')} \left(9 + \frac{3k^2 R^2(t)}{2} + \frac{3k^2 R^2(t')}{2} + \mathcal{O}((kR(t))^4, (kR(t'))^4) \right)). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Nessas condições tem-se que a fase não-local se anula, uma vez que calculando as integrais no tempo na equação 3.14 nota-se que a contribuição do termo $R^2(t)(vt')$ cancela exatamente a contribuição de $vtR^2(t')$, o mesmo ocorrendo com os termos vt e vt' . Portanto

$$\phi_{DP} = 0, \quad (3.15)$$

até a segunda ordem de $(kR)^2$. Este resultado é esperado dado que o mesmo acontece no caso de trajetórias semicirculares devido à simetria das trajetórias.

3.2.2 Fase de Caminho Único

A partir da expressão para a fase de caminho único (equação 3.6), obtém-se

$$\begin{aligned} \phi_{SP} &= \frac{\alpha_0 \omega_0}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' \frac{\cos \omega_0(t-t')}{R^5(t')R^5(t)} \{y_0[R^2(t)(vt') - (vt)R^2(t')] + 2y_0^3[(vt) - (vt')]\} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha_{xy}(\omega) (e^{-i\omega(t-t')} e^{ik(R(t')-R(t))}) (k^2 R^2(t) - 3ikR(t) - 3)(k^2 R^2(t') + 3ikR(t') - 3). \end{aligned} \quad (3.16)$$

A mesma aproximação sobre o retardamento feita na seção anterior é ser empregada, resultando em:

$$\begin{aligned} \phi_{SP} &= \frac{\alpha_0 \omega_0}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' \frac{\cos \omega_0(t-t')}{R^5(t')R^5(t)} \{y_0[R^2(t)(vt') - (vt)R^2(t')] + 2y_0^3[(vt) - (vt')]\} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha_{xy}(\omega) e^{-i\omega(t-t')} \left(9 + \frac{3k^2 R^2(t)}{2} + \frac{3k^2 R^2(t')}{2} + \mathcal{O}((kR(t))^4, (kR(t'))^4) \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

A integração exata no tempo resulta numa integral sobre todas as frequências. A integração em $d\omega$ se encontra de maneira detalhada no apêndice B. O resultado final para a fase é então:

$$\phi_{SP} = \frac{\pi^2 \alpha_0 \omega_0 \operatorname{Im} \alpha'_{xy}(\omega_0)}{(4\pi\epsilon_0)^2} \left[\frac{105}{32y_0^4} \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2 + \frac{45}{8y_0^6} \right]. \quad (3.18)$$

Em termos da polarizabilidade da esfera (considerando $\Omega_s \ll \omega_0$) a fase se torna

$$\phi_{SP} = -\frac{45}{8(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{\pi^2 \alpha_0 \omega_0 \Omega_s}{y_0^6} \operatorname{Re} \alpha''(\omega_0) + \mathcal{O}((\omega_0 y_0 / c)^2). \quad (3.19)$$

Nota-se a conexão desse resultado com a equação 3.9: ambas as fases dependem da segunda derivada de $\alpha(\omega)$, ambas as fases correspondem a fases geométricas e a ordem de grandeza é a mesma, o que se justifica pela semelhança topológica de ambos os casos.

Para obter um valor explícito para a fase utiliza-se os mesmos valores para a e Ω_s utilizados na seção anterior. Adotando $y_0 = 10$ nm tem-se para um interferômetro com um átomo de sódio e uma esfera de potássio (conforme seção 3.1.2.2) que a fase é de $\phi_{SP} = -0.36$ mrad, sendo de fato um valor próximo do encontrado para o caso circular.

Considerações Finais

Nesta dissertação estudou-se o papel desempenhado pela rotação de objetos na vizinhança de um interferômetro atômico no vácuo. A interferometria atômica vem ganhando um destaque cada vez maior, principalmente pelo seu grande potencial em metrologia e pela variada gama de efeitos físicos que permite a detecção. Em particular, o foco deste trabalho se deu no contexto de interações dispersivas.

No primeiro capítulo foi discutido como as interações dispersivas afetam sistemas atômicos. Foi apresentada a teoria da resposta linear, a qual permite o cálculo de observáveis do sistema induzidos por uma dada perturbação externa. Esse formalismo é bastante relevante no contexto de interações dispersivas, pois as flutuações de dipolo atômico acoplam com as flutuações do campo elétrico, gerando um campo elétrico induzido e um momento de dipolo induzido. De posse desse formalismo foi possível calcular as funções resposta para o sistema composto por um átomo no vácuo quântico e extrair propriedades importantes dessas funções. Em seguida foi discutida a evolução temporal de um átomo em um interferômetro atômico e a fase gerada na presença do campo eletromagnético, tomando como base o formalismo do funcional de influência. Neste caso a fase é a soma de duas componentes: uma componente não-local que carrega informação simultaneamente sobre os dois caminhos do interferômetro e uma fase local que contém informação sobre cada caminho separadamente, sendo possível escrever cada uma dessas fases em termos das funções resposta calculadas no início do capítulo, separando num termo gerado por flutuações de dipolo e outro termo gerado por flutuações de campo.

No capítulo 2 foi calculado o tensor polarizabilidade efetiva para um objeto em rotação.

Foi mostrado que, para um objeto simétrico em rotação em torno do eixo de simetria, o tensor polarizabilidade ganha termos fora da diagonal que se anulam se o material que compõe o objeto não for dispersivo. Embora este caso se encontre na literatura, ainda não havia discussões para o caso em que o material rotaciona em torno de um eixo perpendicular ao eixo de simetria, o que foi feito nesse capítulo. Neste caso há a geração das chamadas bandas laterais, as quais se relacionam com o efeito Casimir dinâmico. Mostrou-se também que mesmo sem dispersão é possível haver elementos fora da diagonal gerados pela rotação do objeto, desde que exista anisotropia na polarizabilidade.

Por fim, no capítulo 3 é calculada a fase devida à rotação de uma esfera entre os caminhos de um interferômetro atômico no vácuo. Considerando primeiramente um interferômetro circular mostrou-se que não há fase não-local nesse sistema, apenas a fase local, que por sua vez só existe se a esfera estiver em rotação e por isso representa uma fase análoga à fase Sagnac. Utilizando valores típicos dos experimentos obteve-se uma fase na ordem de $0,1$ mrad, no limite da sensibilidade dos interferômetros atuais. Também foi calculada a fase para um interferômetro cujas trajetórias correspondem a retas paralelas. Nesse caso a fase tem a mesma forma e ordem do caso anterior, o que indica uma equivalência topológica entre as duas geometrias. Porém, o caso de trajetórias retas e paralelas é mais realista do ponto de vista experimental.

Ao fazer-se ciência é natural que as respostas de antigas perguntas sejam acompanhadas com mais perguntas. Com este trabalho não foi diferente. As perspectivas para futuros trabalhos incluem calcular a contribuição do campo magnético para a fase, o chamado termo de Röntgen, e calcular o efeito da largura finita dos pacotes de onda sobre a fase. Outra perspectiva é determinar a fase considerando um objeto em rotação em torno de um eixo perpendicular ao seu eixo de simetria, ao invés de uma esfera.

Numa área com tantos fenômenos interessantes como as interações dispersivas, acredita-se que este trabalho tenha sua relevância ao conectar a medição e detecção de interações dispersivas com a interferometria atômica, seja motivando futuras aplicações em labo-

ratório ou gerando modelos teóricos mais realistas.

Referências Bibliográficas

- [1] Abbott, B. P. *et al.* Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters* **116**, 061102 (2016). 1
- [2] Sagnac, G. L'éther lumineux démontré par l'effet du vent relatif d'éther dans un interféromètre en rotation uniforme. *Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'Academie des sciences* **157**, 708–710 (1913). 1
- [3] Anderson, R., Bilger, H. & Stedman, G. “Sagnac” effect: A century of Earth-rotated interferometers. *American Journal of Physics* **62**, 975–985 (1994). 1, 2
- [4] Ori, A. & Avron, J. E. Generalized Sagnac-Wang-Fizeau formula. *Physical Review A* **94**, 063837 (2016). 2
- [5] Macek, W. M. & Davis Jr, D. Rotation rate sensing with traveling-wave ring lasers. *Applied Physics Letters* **2**, 67–68 (1963). 2
- [6] MacKenzie, D. From the luminiferous ether to the boeing 757: A history of the laser gyroscope. *Technology and Culture* **34**, 475–515 (1993). 2
- [7] Peters, A., Chung, K. Y. & Chu, S. High-precision gravity measurements using atom interferometry. *Metrologia* **38**, 25 (2001). 2
- [8] Canuel, B. *et al.* Exploring gravity with the miga large scale atom interferometer. *Scientific Reports* **8**, 1–23 (2018). 2

- [9] Cronin, A. D., Schmiedmayer, J. & Pritchard, D. E. Optics and interferometry with atoms and molecules. *Reviews of Modern Physics* **81**, 1051 (2009). 2, 10
- [10] Bordé, C. J. Atomic interferometry with internal state labelling. *Physics letters A* **140**, 10–12 (1989). 2
- [11] Canuel, B. *et al.* Six-axis inertial sensor using cold-atom interferometry. *Physical review letters* **97**, 010402 (2006). 2
- [12] Gustavson, T., Bouyer, P. & Kasevich, M. Precision rotation measurements with an atom interferometer gyroscope. *Physical review letters* **78**, 2046 (1997). 2
- [13] Storey, P. & Cohen-Tannoudji, C. The Feynman path integral approach to atomic interferometry. a tutorial. *Journal de Physique II* **4**, 1999–2027 (1994). 2
- [14] Manjavacas, A., Rodríguez-Fortuño, F. J., de Abajo, F. J. G. & Zayats, A. V. Lateral Casimir force on a rotating particle near a planar surface. *Physical Review Letters* **118**, 133605 (2017). 3
- [15] e Souza, R. d. M., Impens, F. & Neto, P. A. M. Microscopic dynamical Casimir effect. *Physical Review A* **97**, 032514 (2018). 3
- [16] Farías, M. B., Lombardo, F. C., Soba, A., Villar, P. I. & Decca, R. S. Towards detecting traces of non-contact quantum friction in the corrections of the accumulated geometric phase. *npj Quantum Information* **6**, 1–7 (2020). 3
- [17] Pendry, J. Shearing the vacuum-quantum friction. *Journal of Physics: Condensed Matter* **9**, 10301 (1997). 3
- [18] Impens, F., Behunin, R. O., Ttira, C. C. & Neto, P. A. M. Non-local double-path Casimir phase in atom interferometers. *EPL (Europhysics Letters)* **101**, 60006 (2013). 3, 14, 24

- [19] Impens, F., Ttira, C. C., Behunin, R. O. & Neto, P. A. M. Dynamical local and nonlocal Casimir atomic phases. *Physical Review A* **89**, 022516 (2014). 3, 10, 11, 14
- [20] Impens, F., Ttira, C. C. & Neto, P. A. M. Non-additive dynamical Casimir atomic phases. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **46**, 245503 (2013). 3, 14
- [21] Lombardo, F. C. & Villar, P. I. Geometric phase corrections on a moving particle in front of a dielectric mirror. *EPL (Europhysics Letters)* **118**, 50003 (2017). 3
- [22] Perreault, J. D. & Cronin, A. D. Observation of atom wave phase shifts induced by Van der Waals atom-surface interactions. *Physical review letters* **95**, 133201 (2005). 3, 29
- [23] Lepoutre, S. *et al.* Atom interferometry measurement of the atom-surface Van der Waals interaction. *The European Physical Journal D* **62**, 309–325 (2011). 3
- [24] Perreault, J. D., Cronin, A. D. & Savas, T. Using atomic diffraction of Na from material gratings to measure atom-surface interactions. *Physical Review A* **71**, 053612 (2005). 3
- [25] Miffre, A., Jacquy, M., Büchner, M., Tréneç, G. & Vigué, J. Atom interferometry measurement of the electric polarizability of lithium. *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics* **38**, 353–365 (2006). 3
- [26] Intravaia, F., Henkel, C. & Antezza, M. Fluctuation-induced forces between atoms and surfaces: The casimir–polder interaction. In *Casimir Physics*, 345–391 (Springer, 2011). 4, 7, 8, 9
- [27] Dalvit, D. A., Neto, P. A. M. & Mazzitelli, F. D. Fluctuations, dissipation and the dynamical Casimir effect. In *Casimir Physics*, 419–457 (Springer, 2011). 4, 20

- [28] Milonni, P. W. *The Quantum Vacuum: an Introduction to Quantum Electrodynamics* (Academic press, 2013). 4, 8, 9, 15
- [29] Cohen-Tannoudji, C., Dupont-Roc, J. & Grynberg, G. *Photons and Atoms- Introduction to Quantum Electrodynamics* (Wiley, 1997). 4, 8
- [30] Mandel, L. & Wolf, E. *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge university press, 1995). 4, 7
- [31] Kubo, R. The fluctuation-dissipation theorem. *Reports on progress in physics* **29**, 255 (1966). 5
- [32] Merzbacher, E. *Quantum Mechanics* (Wiley, 1998). 7
- [33] Bransden, B. H., Joachain, C. J. & Plivier, T. J. *Physics of Atoms and Molecules* (Pearson education, 2003). 7
- [34] Claude, C.-T., Jacques, D.-R. & Gilbert, G. *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications* (Wiley, 1998). 7, 24
- [35] Wylie, J. M. & Sipe, J. Quantum electrodynamics near an interface. *Physical Review A* **30**, 1185 (1984). 8
- [36] Ryu, C. & Boshier, M. G. Integrated coherent matter wave circuits. *New Journal of Physics* **17**, 092002 (2015). 10, 28, 46
- [37] Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, 2007). 15
- [38] Ahn, J. *et al.* Ultrasensitive torque detection with an optically levitated nanorotor. *Nature Nanotechnology* **15**, 89–93 (2020). 15, 18, 27
- [39] Ahn, J. *et al.* Optically levitated nanodumbbell torsion balance and GHz nanomechanical rotor. *Physical review letters* **121**, 033603 (2018). 15

- [40] Reimann, R. *et al.* GHz rotation of an optically trapped nanoparticle in vacuum. *Physical review letters* **121**, 033602 (2018). 15
- [41] Manjavacas, A. & De Abajo, F. G. Thermal and vacuum friction acting on rotating particles. *Physical Review A* **82**, 063827 (2010). 16, 17
- [42] Moan, E. *et al.* Quantum rotation sensing with dual Sagnac interferometers in an atom-optical waveguide. *Physical Review Letters* **124**, 120403 (2020). 22
- [43] Guo, Y. *et al.* Supersonic rotation of a superfluid: a long-lived dynamical ring. *Physical Review Letters* **124**, 025301 (2020). 22
- [44] Wu, S., Rooijackers, W., Striehl, P. & Prentiss, M. Bidirectional propagation of cold atoms in a “stadium”-shaped magnetic guide. *Physical Review A* **70**, 013409 (2004). 22
- [45] Morizot, O., Colombe, Y., Lorent, V., Perrin, H. & Garraway, B. M. Ring trap for ultracold atoms. *Physical Review A* **74**, 023617 (2006). 22
- [46] Sherlock, B., Gildemeister, M., Owen, E., Nugent, E. & Foot, C. Time-averaged adiabatic ring potential for ultracold atoms. *Physical Review A* **83**, 043408 (2011). 22
- [47] Pritchard, J., Dinkelaker, A., Arnold, A., Griffin, P. & Riis, E. Demonstration of an inductively coupled ring trap for cold atoms. *New Journal of Physics* **14**, 103047 (2012). 22
- [48] Moulder, S., Beattie, S., Smith, R. P., Tammuz, N. & Hadzibabic, Z. Quantized supercurrent decay in an annular Bose-Einstein condensate. *Physical Review A* **86**, 013629 (2012). 22
- [49] Lesanovsky, I. & von Klitzing, W. Time-averaged adiabatic potentials: versatile matter-wave guides and atom traps. *Physical review letters* **99**, 083001 (2007). 22

- [50] Schwinger, J., DeRaad Jr, L. L., Milton, K. & Tsai, W.-y. *Classical Electrodynamics* (Westview Press, 1998). 26
- [51] Born, M. & Wolf, E. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light* (Elsevier, 2013). 26
- [52] Ordal, M. A., Bell, R. J., Alexander, R. W., Long, L. L. & Querry, M. R. Optical properties of fourteen metals in the infrared and far infrared: Al, Co, Cu, Au, Fe, Pb, Mo, Ni, Pd, Pt, Ag, Ti, V, and W. *Applied optics* **24**, 4493–4499 (1985). 27
- [53] Blaber, M. G., Arnold, M. D. & Ford, M. J. Search for the ideal plasmonic nanoshell: the effects of surface scattering and alternatives to gold and silver. *The Journal of Physical Chemistry C* **113**, 3041–3045 (2009). 27
- [54] Miller, T. M. & Bederson, B. Measurement of the polarizability of calcium. *Physical Review A* **14**, 1572 (1976). 27
- [55] Holmgren, W. F., Reville, M. C., Lonij, V. P. & Cronin, A. D. Absolute and ratio measurements of the polarizability of Na, K, and Rb with an atom interferometer. *Physical Review A* **81**, 053607 (2010). 28
- [56] Barnes, W. L. Particle plasmons: Why shape matters. *American Journal of Physics* **84**, 593–601 (2016). 28
- [57] Gauguier, A., Canuel, B., Lévêque, T., Chaibi, W. & Landragin, A. Characterization and limits of a cold-atom Sagnac interferometer. *Physical Review A* **80**, 063604 (2009). 28
- [58] Kumiya, T., Akentyev, A. S., Mori, Y., Ichimura, J. & Morinaga, A. Milliradian-phase-resolution atom interferometer with transparent electrodes for measurement of the Röntgen phase. *Physical Review A* **93**, 023637 (2016). 28

- [59] Ablowitz, M. J. & Fokas, A. *Introduction and Applications of Complex Variables* (Cambridge University Press,, 2003). 43
- [60] Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M. *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic press, 2014). 46

Apêndice A

Cálculo da fase de caminho único para trajetórias atômicas semicirculares

O objetivo de apêndice é apresentar em detalhe a dedução da equação 3.8, que é a expressão geral para a fase de caminho único para duas trajetórias semicirculares com uma esfera em rotação na origem (ver figura 3.1).

Recorda-se primeiramente a equação 3.7, a saber:

$$\phi_{SP} = \frac{\alpha_0 \omega_0}{(4\pi\epsilon_0)^2 4R^6} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha_{xy}(\omega) |k^2 R^2 + 3ikR - 3|^2 \int_0^T \int_0^T dt dt' \cos \omega_0(t-t') \sin(2\Omega_A(t-t')) e^{-i\omega(t-t')}. \quad (\text{A.1})$$

Fazendo a mudança de variáveis $\tau := t - t'$ e $S := t + t'$ a integral dupla no tempo se torna

$$\begin{aligned} D(\omega) &:= \int_0^T \int_0^T dt dt' \cos \omega_0(t-t') \sin(2\Omega_A(t-t')) e^{-i\omega(t-t')} = \\ &= 2T f(T, \omega) - \int_{-T}^T f(\tau, \omega) d\tau, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

na qual a função $f(\tau, \omega)$ é definida como:

$$f(\tau, \omega) = \frac{1}{4} \left[\frac{e^{-i(\omega - \omega_0 - 2\Omega_A)\tau}}{\omega - \omega_0 - 2\Omega_A} - \frac{e^{-i(\omega - \omega_0 + 2\Omega_A)\tau}}{\omega - \omega_0 + 2\Omega_A} + \frac{e^{-i(\omega + \omega_0 + 2\Omega_A)\tau}}{\omega + \omega_0 + 2\Omega_A} - \frac{e^{-i(\omega + \omega_0 - 2\Omega_A)\tau}}{\omega + \omega_0 - 2\Omega_A} \right]. \quad (\text{A.3})$$

A fase pode ser escrita como $\phi_{SP} = I_1 + I_2$, definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\alpha_0 \omega_0}{(4\pi\epsilon_0)^2 4R^6} \int_{-T}^T d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha_{xy}(\omega) p(\omega) \frac{1}{4} \left[\frac{e^{-i(\omega-\omega_0-2\Omega_A)\tau}}{\omega - \omega_0 - 2\Omega_A} - \frac{e^{-i(\omega-\omega_0+2\Omega_A)\tau}}{\omega - \omega_0 + 2\Omega_A} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{-i(\omega+\omega_0+2\Omega_A)\tau}}{\omega + \omega_0 + 2\Omega_A} - \frac{e^{-i(\omega+\omega_0-2\Omega_A)\tau}}{\omega + \omega_0 - 2\Omega_A} \right] \\
I_2 &= \frac{\alpha_0 \omega_0}{(4\pi\epsilon_0)^2 4R^6} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha_{xy}(\omega) p(\omega) \frac{T}{2} \left[\frac{e^{-i(\omega-\omega_0)T}}{\omega - \omega_0 - 2\Omega_A} - \frac{e^{-i(\omega-\omega_0)T}}{\omega - \omega_0 + 2\Omega_A} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{-i(\omega+\omega_0)T}}{\omega + \omega_0 + 2\Omega_A} - \frac{e^{-i(\omega+\omega_0)T}}{\omega + \omega_0 - 2\Omega_A} \right], \tag{A.4}
\end{aligned}$$

sendo $p(\omega) := |k^2 R^2 + 3ikR - 3|^2$.

As integrais nas expressões definidas em A.4 são de difícil resolução exata. No entanto, dado que as funções entre colchetes só apresentam valores apreciáveis em torno dos polos, pode-se fazer a seguinte aproximação:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) f(x - x_0) \approx g(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x - x_0), \tag{A.5}$$

uma vez que $f(x)$ é uma função muito concentrada em x_0 , de modo que $g(x)$ é aproximadamente constante nesse intervalo.

Computar-se-á primeiramente o termo I_1 com base na aproximação apresentada na equação A.5. Para tal utiliza-se o teorema dos resíduos considerando o contorno apresentado na figura A.1, considerando que o raio dos círculos menores tende a zero. A integração¹ resulta em [59]

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{-i\pi\alpha_0\omega_0}{(4\pi\epsilon_0)^2 16R^6} [\alpha_{xy}(\omega_0 + 2\Omega_A)p(\omega_0 + 2\Omega_A) + \alpha_{xy}(-\omega_0 - 2\Omega_A)p(-\omega_0 - 2\Omega_A) - \\
&\quad - \alpha_{xy}(\omega_0 - 2\Omega_A)p(\omega_0 - 2\Omega_A) - \alpha_{xy}(-\omega_0 + 2\Omega_A)p(-\omega_0 + 2\Omega_A)] \int_{-T}^T \text{sgn}(\tau) d\tau, \tag{A.6}
\end{aligned}$$

tal que $\text{sgn}(\tau)$ denota a função sinal. Como a função sinal é ímpar e o intervalo de integração é simétrico, tem-se imediatamente

$$I_1 = 0.$$

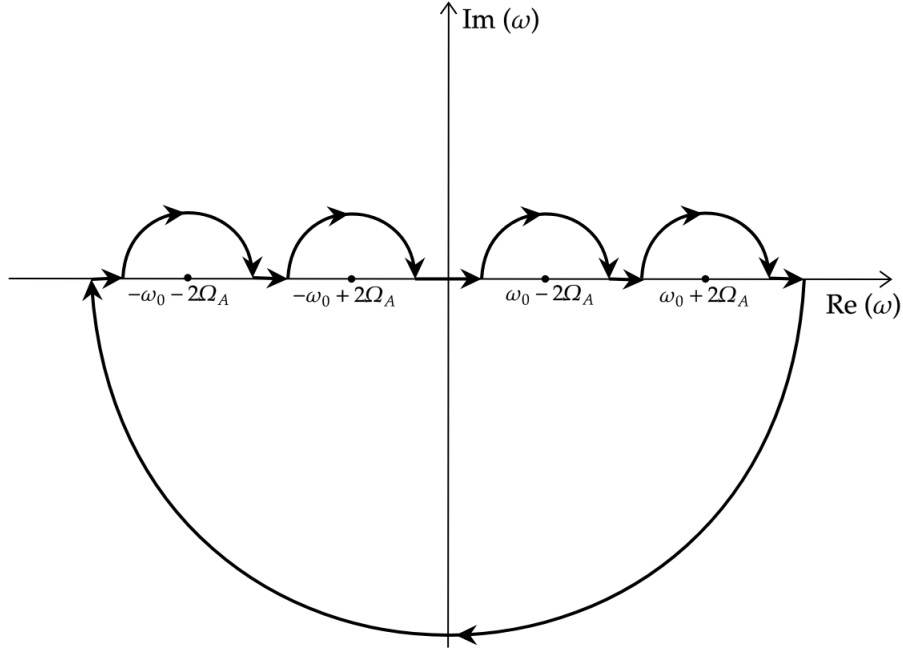


Figura A.1: Contorno de integração no plano complexo para as integrais em frequência do termo I_1

O cálculo de I_2 é análogo. Utilizando a mesma aproximação e o mesmo contorno de integração obtém-se de maneira direta a seguinte relação:

$$I_2 = \frac{i\pi T}{2} [\alpha_{xy}(\omega_0 + 2\Omega_A)p(\omega_0 + 2\Omega_A)e^{i2\Omega_A T} - \alpha_{xy}(\omega_0 - 2\Omega_A)p(\omega_0 - 2\Omega_A)e^{-i2\Omega_A T} + \alpha_{xy}(-\omega_0 + 2\Omega_A)p(-\omega_0 + 2\Omega_A)e^{-i2\Omega_A T} - \alpha_{xy}(-\omega_0 - 2\Omega_A)p(-\omega_0 - 2\Omega_A)e^{i2\Omega_A T}]. \quad (\text{A.7})$$

Usando a paridade da função $p(\omega)$ e a propriedade de realidade do tensor polarizabilidade 2.10 tem-se a fase de caminho único mostrada na equação 3.8:

$$\phi_{SP} = \frac{\alpha_0 \omega_0 T \pi}{(4\pi\epsilon_0)^2 8R^6} \{p(\omega_0 - 2\Omega_A) \text{Im} \alpha_{xy}(\omega_0 - 2\Omega_A) - p(\omega_0 + 2\Omega_A) \text{Im} \alpha_{xy}(\omega_0 + 2\Omega_A)\}. \quad (\text{A.8})$$

¹A integral em si é divergente, de modo que utilizar o termo "integração" constitui um abuso de linguagem. Rigorosamente, o que foi calculado consiste no valor principal de Cauchy da função.

Apêndice B

Cálculo da fase de caminho único para trajetórias atômicas retilíneas e paralelas

Na seção 3.2.2 foi deduzida a seguinte expressão para a fase de caminho único gerada por um interferômetro atômico gerado por duas trajetórias retas e paralelas com uma esfera em rotação no centro das coordenadas (equação 3.17):

$$\begin{aligned} \phi_{SP} = & \frac{\alpha_0 \omega_0}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' \frac{\cos \omega_0(t-t')}{R^5(t')R^5(t)} \{y_0[R^2(t)(vt') - (vt)R^2(t')] + 2y_0^3[(vt) - (vt')]\} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha_{xy}(\omega) e^{-i\omega(t-t')} \left(9 + \frac{3k^2 R^2(t)}{2} + \frac{3k^2 R^2(t')}{2} + \mathcal{O}((kR(t))^4, (kR(t'))^4) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Essa integral pode ser reescrita como

$$\phi_{SP} = T_1 + T_2,$$

definidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} T_1 := & \frac{-\alpha_0 \omega_0 y_0}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha_{xy}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' \cos \omega_0(t-t') e^{-i\omega(t-t')} y_0 [R^2(t)(vt') - (vt)R^2(t')] \times \\ & \times \left(\frac{k^2}{2R^3(t)} + 3 \right) \left(\frac{k^2}{2R^3(t')} + 3 \right) \\ T_2 := & \frac{-\alpha_0 \omega_0 y_0^3}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha_{xy}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' \cos \omega_0(t-t') e^{-i\omega(t-t')} [vt - vt'] \times \\ & \times \left(\frac{k^2}{2R^3(t)} + 3 \right) \left(\frac{k^2}{2R^3(t')} + 3 \right). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Calculando primeiramente T_1 , nota-se com o auxílio da referência [60] que as integrais temporais têm solução analítica exata. Portanto, o termo T_1 se torna

$$T_1 = -\frac{\alpha_0\omega_0 y_0 i}{(4\pi\epsilon_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha_{xy}(\omega) [f(\omega - \omega_0) + f(\omega + \omega_0)], \quad (\text{B.3})$$

tal que a função $f(\omega)$ é definida como:

$$f(\omega) := \left(\frac{k^2\omega}{v^2} K_0\left(\frac{y_0}{v}|\omega|\right) + \frac{4}{v^3 y_0} |\omega|\omega K_1\left(\frac{y_0}{v}|\omega|\right) \right) \left(\frac{k^2}{v} K_0\left(\frac{y_0}{v}|\omega|\right) + \frac{6}{v^2 y_0} |\omega| K_1\left(\frac{y_0}{v}|\omega|\right) \right), \quad (\text{B.4})$$

sendo $K_\mu(x)$ a função de Bessel modificada do segundo tipo de ordem μ . Embora a integral apresentada em B.3 seja de difícil resolução exata, pode-se simplificar o problema com a seguinte aproximação: o fator $\frac{v}{y_0}$ impõe uma escala de frequência para o decaimento das funções de Bessel. Para átomos se movendo a velocidades da ordem de 1 cm/s [36] e considerando $y_0 = 10$ nm, tem-se que essa escala de frequências é da ordem de GHz. Contudo, para metais como platina e potássio, os quais foram considerados nessa dissertação para a obtenção de valores numéricos para as fases calculadas, a polarizabilidade só varia de maneira apreciável para valores de frequência da ordem de PHz. Uma vez que as funções de Bessel decaem exponencialmente numa escala de frequências muito menor, para todos os efeitos pode-se expandir em Taylor a polarizabilidade em primeira ordem em torno de ω_0 e $-\omega_0$. Logo

$$\alpha_{xy}(\omega) \approx \alpha_{xy}(\pm\omega_0) + (\omega \mp \omega_0)\alpha'_{xy}(\pm\omega). \quad (\text{B.5})$$

Nesta aproximação também será considerada constante a função k^2 , uma vez que varia muito pouco em relação ao decaimento das funções de Bessel modificadas do segundo tipo. Funções envolvendo k^4 por sua vez não serão consideradas, uma vez que estão relacionadas com uma ordem superior do tratamento perturbativo do retardamento do campo apresentado na seção 3.2.1. Em posse dessa aproximação, o termo T_1 se torna

$$T_1 = \frac{2\alpha_0\omega_0}{(4\pi\epsilon_0)^2} \text{Im} \alpha'_{xy}(\omega_0) \left[\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 \frac{10}{y^4} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |x| K_1(|x|) K_0(|x|) dx + \frac{24}{y^6} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 K_1^2(|x|) dx \right], \quad (\text{B.6})$$

cuja integração exata resulta em

$$T_1 = \frac{\pi^2 \alpha_0 \omega_0}{(4\pi\epsilon_0)^2} \left[\frac{135}{16y^6} + \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 \frac{15}{8y^4} \right]. \quad (\text{B.7})$$

Volvendo a atenção para o termo T_2 , aplica-se o mesmo procedimento, integrando primeiramente no tempo de modo a obter

$$T_2 = \frac{2\alpha_0\omega_0 y_0^3 i}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha_{xy}(\omega) [g(\omega - \omega_0) + g(\omega + \omega_0)], \quad (\text{B.8})$$

onde a função $g(\omega)$ é definida como

$$g(\omega) := \left(\frac{k^2}{v^2} \omega K_0\left(\frac{y_0}{v}|\omega|\right) + \frac{4}{v^3 y_0} |\omega| \omega K_1\left(\frac{y_0}{v}|\omega|\right) \right) \left(\frac{k^2}{v^2 y_0} |\omega| K_1\left(\frac{y_0}{v}|\omega|\right) + \frac{2}{v^3 y_0^2} \omega^2 K_2\left(\frac{y_0}{v}|\omega|\right) \right). \quad (\text{B.9})$$

Aplicando a mesma aproximação apresentada no parágrafo anterior, o termo T_2 torna-se

$$T_2 = \frac{-4\alpha_0\omega_0}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \text{Im} \alpha'_{xy}(\omega_0) \left\{ \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 \frac{1}{y^4} \left[4 \int_{-\infty}^{\infty} x^4 K_1^2(|x|) dx + 2 \int_{-\infty}^{\infty} x^4 K_0(|x|) K_2(|x|) dx \right] + \frac{8}{y^6} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 |x| K_1(|x|) K_2(|x|) dx \right\}. \quad (\text{B.10})$$

Portanto, a integração exata leva à forma final de T_2 :

$$T_2 = \frac{-\pi^2 \alpha_0 \omega_0}{(4\pi\epsilon_0)^2} \text{Im} \alpha'_{xy}(\omega_0) \left[\frac{315}{16y^6} + \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 \frac{165}{32y^4} \right]. \quad (\text{B.11})$$

Somando T_1 (equação B.7 e T_2 , obtém-se a expressão final para a fase de caminho único apresentado na equação 3.18:

$$\phi_{SP} = \frac{\pi^2 \alpha_0 \omega_0 \text{Im} \alpha'_{xy}(\omega_0)}{(4\pi\epsilon_0)^2} \left[\frac{105}{32y_0^4} \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 + \frac{45}{8y_0^6} \right]. \quad (\text{B.12})$$