



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO**  
**INSTITUTO DE FÍSICA**

# **Feixes do Modelo Schell-Gaussiano Torcido em Óptica Quântica**

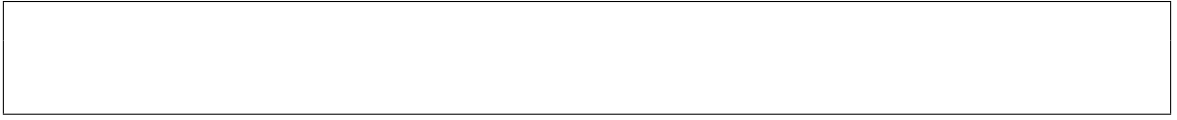
**Lucas Hutter de Souza Leite**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

**Orientador: Stephen Patrick Walborn**

**Rio de Janeiro**

**Julho de 2019**



# Resumo

## Feixes do Modelo Schell-Gaussiano Torcido em Óptica Quântica

Lucas Hutter de Souza Leite

**Orientador:** Stephen Patrick Walborn

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Resumo da tese.

**Palavras-chave:** Insira as palavras-chave aqui.

# Abstract

## Twisted Gaussian Schell-model Beams in Quantum Optics

Lucas Hutter de Souza Leite

**Orientador:** Stephen Patrick Walborn

*Abstract* da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Abstract in English.

**Keywords:** Insert the keywords here.

# Agradecimentos

Listar agradecimentos aqui, inclusive à agência de fomento que concedeu a bolsa de pós-graduação.

# Sumário

Sumário	vi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Feixes Monocromáticos Coerentes</b>	<b>3</b>
2.1 Introdução aos Feixes Paraxiais . . . . .	3
2.1.1 Coerência . . . . .	6
2.2 Feixes Gaussianos . . . . .	11
2.2.1 Funções Gaussianas . . . . .	11
2.2.2 Distribuição de Wigner e Matriz de Covariância . . . . .	13
2.3 Feixes Hermite-Gauss e Laguerre-Gauss . . . . .	18
2.3.1 Hermite-Gauss . . . . .	18
2.3.2 Laguerre-Gauss . . . . .	21
<b>3 Modelo Schell-Gaussiano Torcido</b>	<b>28</b>
3.1 Teoria Básica dos Feixes do modelo Schell-Gaussiano Torcido . . . . .	29
3.1.1 Modelo Schell-Gaussiano . . . . .	29
3.1.2 Feixes do modelo Schell-Gaussiano Torcido . . . . .	30
3.2 Conexão entre feixes Laguerre-Gauss e do Modelo Schell-Gaussiano Torcido	33
3.3 Correlações no Modelo Schell-Gaussiano Torcido para Sistemas Bipartidos	35
3.3.1 Emaranhamento Gaussiano . . . . .	35
3.3.2 Discórdia Quântica . . . . .	37

<b>4</b>	<b>Conversão Paramétrica Descendente</b>	<b>39</b>
4.1	Distribuição de Wigner na Conversão Paramétrica Descendente . . . . .	42
4.2	Aproximações . . . . .	46
4.2.1	Aproximação Paraxial . . . . .	47
4.2.2	Fótons Degenerados . . . . .	52
4.3	Matriz de Covariância . . . . .	54
4.3.1	Modelo Schell-Gaussiano Torcido na Conversão Paramétrica Descendente . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>57</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>62</b>
<b>A</b>	<b>Cálculos das Funções de Hermite-Gauss em uma Dimensão</b>	<b>67</b>
<b>B</b>	<b>Discórdia Quântica Gaussiana</b>	<b>70</b>





# Capítulo 1

## Introdução

Desde sua criação, lasers são foco de múltiplos estudos. O avanço tecnológico permitiu a produção de feixes cada vez mais intensos e menos imperfeitos, portanto cada vez mais aplicáveis e utilizáveis. Com isso, a caracterização de lasers ganhou força e se tornou um aspecto fundamental, visto que muitos experimentos exigem saber a estrutura exata do feixe e suas características. Um trabalho de Simon e Mukunda [1] forneceu uma enorme colaboração quanto ao aspecto de caracterização de feixes óticos. Neste trabalho eles foram capazes de encontrar uma generalização de feixes óticos parcialmente coerentes, onde uma fase foi adicionada a estrutura de feixes parcialmente coerentes conhecida até a data.

Os feixes desvendados por Simon e Mukunda são especiais também devido a serem feixes parcialmente coerentes. Coerência é uma propriedade fundamental de campos pois define como dois campos interagem. Esta propriedade se tornou ainda mais explorada com o surgimento da mecânica quântica, onde estados podem interferir da mesma forma como ondas. A influência da coerência em efeitos quânticos tem sido o foco de diversas pesquisas. Uma dessas pesquisas, que divide interesse com nosso, são os artigos [2, 3] onde Boyd *et al.* estudaram os efeitos da coerência na conversão paramétrica descendente.

Conceitos tipicamente conhecidos no âmbito da mecânica quântica tem sido aplicados na ótica clássica, apresentando novas formas de entender diversos efeitos óticos. Iniciamos com um estudo de feixes clássicos com foco na compreensão dos feixes parcialmente

coerentes sugeridos por Simon e Mukunda[1] do *modelo Schell-Gaussiano torcido* e como estes se relacionam com o momento angular orbital. Para isso gostaríamos de poder comparar tais feixes com os feixes Laguerre-Gauss, que são feixes coerentes, extremamente utilizados em diversas áreas da física e que são conhecidamente autoestados do momento angular orbital[4]. À vista disso, fazemos no capítulo uma revisão sobre feixes gaussianos monocromáticos, feixes Hermite-Gauss e feixes Laguerre-Gauss, terminamos o capítulo com o cálculo da matriz de covariância do feixe Laguerre-Gauss que será utilizada ao fim do capítulo 3. Já no capítulo 3 damos prosseguimento ao estudo de feixes clássicos e introduzimos os conceitos concebidos por Simon e Mukunda do feixe do *modelo Schell-Gaussiano*, encerrando o capítulo com uma simples comparação entre as matrizes de covariância do feixe Laguerre-Gauss e do *modelo Schell-Gaussiano*.

No capítulo 4 mudamos um pouco de foco e saímos dos feixes clássicos, começando com uma análise da conversão paramétrica descendente utilizando o formalismo de *distribuição de Wigner*, que nos possibilitou, ao final do capítulo, encontrar a matriz de covariância da conversão paramétrica descendente inclusive para casos nos quais ou se tem mais de um feixe de bombeio, um feixe de bombeio parcialmente coerente, ou ainda quando se utilizam múltiplos cristais.

Por último, no capítulo 5 um breve estudo de correlações quânticas foi feito com intuito de explicar a utilidade dos feixes do *modelo Schell-Gaussiano torcido* em um viés de ótica e informação quântica. Concluindo no capítulo 6, onde apresentamos um resumo dos nossos resultados, considerações finais e sugerimos alguns possíveis estudos futuros.

## Capítulo 2

# Feixes Monocromáticos Coerentes

Neste capítulo serão apresentados e estudados alguns feixes. Começando com uma pequena revisão dos feixes gaussianos e, em seguida um estudo um pouco mais específico dos feixes Hermite-Gauss e Laguerre-Gauss, tendo-se assim os recursos necessários para calcular e fazer uma análise sobre a matriz de covariância dos feixes Laguerre-Gauss.

### 2.1 Introdução aos Feixes Paraxiais

Ondas eletromagnéticas são soluções das equações de Maxwell na ausência de fontes. Estas ondas são também soluções das equações de onda vetoriais para os campos elétrico e magnético, porém, soluções vetoriais são um tanto quanto complicadas para se manusear. Como basta que encontremos uma solução, um caminho mais simples é utilizado através das equações de ondas dos potenciais eletromagnéticos (potencial vetor e potencial escalar). Primeiro escrevemos as equações de Maxwell no vácuo e na ausência de fontes [5, 6]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad (2.2)$$

sendo  $c$  a velocidade da luz no vácuo. Após isso, tomamos o rotacional das eqs.(2.2), substituindo o lado direito de (2.2) no lado esquerdo e vice-versa chegamos em

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (2.3)$$

Utilizando a identidade vetorial  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$  chegamos às equações de onda para o campo elétrico e magnético

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.4)$$

*Ondas planas monocromáticas* surgem como um conjunto de soluções da equação de onda, e são extremamente importantes por terem frequência e momento bem definidos, além de que qualquer onda eletromagnética fisicamente produzível pode ser escrita como uma superposição de ondas planas monocromáticas.

Escolhendo, apenas por simplicidade, que uma onda plana monocromática se propaga da direção  $z$  com frequência angular  $\omega$ , escrevemos seu campo elétrico e magnético como sendo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_\perp e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{B}_\perp e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.5)$$

$\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{k}}$  é um *vetor de onda* constante,  $\omega = c|\mathbf{k}|$  e  $\perp$  é um indicador de que  $\mathbf{k} \cdot \mathcal{E}_\perp = 0$ , isto é, a direção de propagação da onda definida por  $\mathbf{k}$  é sempre perpendicular a direção do campo  $\mathcal{E}_\perp$ . Soluções gerais das eqs.(2.4) podem ser escritas utilizando (2.5) como base, estes são conhecidos como pacotes de onda

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \mathcal{E}_\perp(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ckt)} \right] \quad (2.6)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \hat{\mathbf{k}} \times \mathcal{E}_\perp(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ckt)} \right] \quad (2.7)$$

com  $\mathcal{B}_\perp(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{k}} \times \mathcal{E}_\perp(\mathbf{k})$  e como durante todo o texto deste trabalho nossas integrais serão feitas em todo o espaço, definimos daqui em diante que  $\int := \int_{-\infty}^{\infty}$ , caso contrário os limites de integração estarão explícitos.

Trabalhar com ondas vetoriais pode ser complicado, em especial ao lidar com superposições delas. Devido a isto, uma alternativa pode ser encontrada trabalhando com a equação de onda escalar

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (2.8)$$

Sem perda de generalidade, podemos trabalhar com soluções desta equação ao invés de com os pacotes de onda dados em (2.6) e (2.7), dado que soluções de (2.8) também são soluções de (2.4), implicando que uma solução de (2.4) pode ser escrita como uma soma de soluções da equação de onda escalar. Então, um pacote composto de ondas planas monocromáticas com frequência  $\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$  é escrito como

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \tilde{u}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (2.9)$$

Uma análise de Fourier de  $u(\mathbf{r}, t)$  no domínio do tempo nos permite escrever

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \tilde{u}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}, \quad (2.10)$$

que com uma substituição em (2.8), chegamos à conhecida equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 u + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0, \quad (2.11)$$

lembrando que  $\kappa := |\mathbf{k}| = \omega/c$ . Com o objetivo de encontrar soluções que têm formas de feixes extremamente direcionais, assumiremos que uma dada onda monocromática da forma  $u(\mathbf{r}, t) = u_0(\mathbf{r})e^{-i(\kappa z - \omega t)}$ . Agora suponha que  $u_0$  varie muito pouco na direção  $z$ , i.e., podemos considerar a aproximação  $|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}| \ll |k \frac{\partial u}{\partial z}|$ , esta aproximação é conhecida como *aproximação paraxial* e implica na simplificação da equação de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2i\kappa \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0. \quad (2.12)$$

Como é possível notar na eq.(2.12), a equação paraxial tem uma estrutura muito semelhante à equação de Schrödinger da evolução temporal de uma partícula livre em duas dimensões da mecânica quântica [7]. Este fato é um dos motivos que tornam feixes objetos de diversos estudos nos últimos anos.

Na equação (2.12) o operador que atua em  $u_0$  é um operador linear, conseqüentemente qualquer combinação linear de soluções também será uma solução, nos possibilitando partir de um conjunto de soluções reduzido (que serão uma base para o espaço de soluções) e chegar a qualquer solução possível. É possível também perceber a existência de uma simetria cartesiana, na troca de  $x$  por  $y$ , e uma simetria cilíndrica, devido a coordenada radial  $s^2 = x^2 + y^2$ , de forma que esta equação diferencial se torna separável tanto em coordenadas cartesianas quanto em coordenadas cilíndricas. A solução mais simples (não trivial) da eq.(2.12) é o feixe gaussiano, porém existem muitas outras possíveis soluções para esta equação. Dois conjuntos de soluções são de maior interesse para este trabalho, os chamados modos Hermite-Gauss e modos Laguerre-Gauss, que constituem cada um conjunto de funções ortogonais.

### 2.1.1 Coerência

Antes de iniciarmos o estudo dos modos gaussianos (tanto o modo gaussiano de menor ordem quanto os modos de maior ordem que iremos ver: Hermite-Gauss e Laguerre-Gauss) é necessária uma discussão sobre coerência, uma propriedade extremamente explorada e discutida de feixes eletromagnéticos, e de ondas como um todo, que existe devido a capacidade de interferência destes feixes.

Interferência é um aspecto fundamental de ondas, logo isso não é diferente quando se trata de ondas eletromagnéticas. Este efeito baseia-se no princípio de superposição linear dos campos eletromagnéticos, i. e., no princípio que nos possibilita descrever um conjunto de campos eletromagnéticos no vácuo<sup>1</sup> como a superposição linear dos mesmos.

Para que fique mais claro veremos agora um exemplo simples. Primeiramente vamos supor duas ondas planas linearmente polarizadas e de frequências arbitrárias. Estas ondas

---

<sup>1</sup>É válido notar que na presença de matéria o princípio da superposição linear é apenas aproximadamente verdade, pois poderão haver termos de ordens superiores nos campos. Estas ordens superiores são normalmente acompanhadas de constantes de multiplicação muito pequenas fazendo com que a superposição linear ainda seja aproximadamente verdade, ademais a interferência entre ondas eletromagnéticas continuará existindo mesmo com a presença de termos de ordem superiores.

são caracterizadas por seus campos elétricos

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_1 \exp[\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t + \phi_1] \quad (2.13)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_2 \exp[\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t + \phi_2]. \quad (2.14)$$

Pelo princípio da superposição linear o campo resultante é nada mais que  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ . Porém, a *intensidade*<sup>2</sup> de um campo eletromagnético pode ser definida como o módulo da média temporal do vetor de Poynting sob um tempo  $T$  muito maior do que a escala de tempo característica associada com a onda, de forma que esta pode ser definida como:

$$\langle f(t) \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt \quad (2.15)$$

Lembrando que o vetor de Poynting é definido como  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , a frase anterior é equivalente a equação:

$$I := |\langle \mathbf{S} \rangle| = c \langle u_{\text{EM}} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle \quad (2.16)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo,  $\epsilon_0$  é a constante de *permissividade elétrica* do vácuo e  $u_{\text{EM}}$  é a densidade de energia da onda, como por vezes a intensidade é definida em termos desta uma igualdade extra foi adicionada para abranger também esta outra definição. Além disso  $\langle \cdot \rangle$  é a média temporal sob o tempo  $T$ . Dito isto, só necessário investigarmos o comportamento do último termo  $\langle |\mathbf{E}|^2 \rangle$ , portanto

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)(\mathbf{E}_1^* + \mathbf{E}_2^*) \rangle = \quad (2.17)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 c [|\mathcal{E}_1|^2 + |\mathcal{E}_2|^2 + 2\langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle] = I_1 + I_2 + \epsilon_0 c |\mathcal{E}_1| |\mathcal{E}_2| \langle \cos \theta \rangle \quad (2.18)$$

no qual  $\theta$  é dado por:

$$\theta = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2. \quad (2.19)$$

---

<sup>2</sup>Aqui utilizamos o termo intensidade, porém é comum definir a intensidade apenas como proporcional ao módulo do campo ao quadrado, isto é, sem a média que colocamos aqui.

O último termo da eq.(2.18) é chamado de *termo de interferência*, pois é ele que faz com que a intensidade total não seja apenas a soma das intensidades. Caso reescrevamos o módulo da amplitude das ondas em termos das intensidades  $\sqrt{\epsilon_0 c} |\mathcal{E}_i| = \sqrt{2I_i}$ , o termo de interferência fica limitado pelos valores  $\pm 2\sqrt{I_1 I_2}$ , conseqüentemente a intensidade fica limitada  $(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 \leq I \leq (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$ . No caso de ondas de mesma amplitude ( $|\mathcal{E}_1| = |\mathcal{E}_2|$ ) será possível uma interferência totalmente destrutiva ou construtiva.

É possível que  $\theta$ , conhecido como *diferença de fase*, dependa do tempo tanto de forma direta através do termo  $(\omega_1 - \omega_2)t$  quanto de forma indireta por uma dependência temporal do termo  $\Delta\phi := \phi_1 - \phi_2$ . Resulta, então, que o último termo da eq.(2.18) será nulo devido a média de  $\cos\theta$  em um tempo muito grande<sup>3</sup> ser nula. Conseqüentemente a interferência é inexistente para  $\theta$  dependente do tempo, neste caso dizemos que estas duas ondas são *incoerentes* pois não geram interferência. A conclusão que pode ser tirada disso é que, caso a diferença entre as fases  $\Delta\phi$  dependam do tempo estas ondas serão incoerentes. De forma parecida, se a diferença das frequências  $\omega_1 - \omega_2$  for não nula as ondas serão incoerentes, isto é, quando as duas ondas tiverem frequências diferentes elas sempre serão incoerentes.

Graças aos fatores apresentados até aqui é possível se fazer uma maior interpretação da eq.(2.18) e do significado da *coerência*. Começamos esta interpretação analisando o motivo de termos utilizado uma média na eq.(2.16), fizemos isto pois se tratando de ondas eletromagnéticas visíveis (já que iremos utilizar ondas no contexto de ótica) suas frequências são muito altas e assim o que será efetivamente perceptível é a média temporal da intensidade. Se tratando da luz visível sua frequência é entre 430-750 terahertz (THz), enquanto um olho humano consegue captar imagens (“tirar fotos”) com uma frequência da ordem de dezenas a centenas de hertz, portanto as oscilações da luz visível são totalmente imperceptíveis para os olhos humanos, logo o que nós vemos verdadeiramente é, assim

---

<sup>3</sup>De forma que  $\theta(t+T) - \theta(t) \geq 2\pi$  seja verdade para que a média seja sobre um tempo maior ou igual a um período.



como escrito na eq.(2.16), uma média temporal da intensidade total da luz que chega aos nossos olhos.

Estes fatos explicitam que para duas ondas interferirem, e serem coerentes, é necessário que haja uma correlação entre elas, como por exemplo o caso no qual as duas ondas tem a mesma frequência sucedendo que  $\theta = \Delta\phi$ . Nessa situação, para que a interferência seja possível é necessário que  $\Delta\phi$  não dependa do tempo tendo, portanto, uma diferença de fase bem definida que implica em uma correlação entre as duas ondas. Por isso, os casos mais básicos de coerência tratados em ótica são aqueles nos quais existem dois feixes originados de uma mesma fonte e, após uma diferença de caminho ótico, eles interferem. Esta diferença de caminho ótico pode tanto se originar de uma diferença no tempo de propagação dos dois, quanto de uma separação espacial destes, em ambos os casos estas diferenças farão com que exista uma diferença de fase e conseqüentemente um  $\theta$  não nulo, gerando assim um padrão de interferência.

Podemos analisar a coerência no caso que mais nos interessa que é como a propriedade de um feixe. Para isso iremos avaliar a interação dos campos oriundos de apenas dois pontos do feixe, o que irá gerar uma equação de interferência parecida com a (2.18). Portanto, com uma breve generalização da eq.(2.18) é possível se encontrar

$$I = |C_1|^2 I_1 + |C_2|^2 I_2 + 2\text{Re}[C_1 C_2^* \langle u^*(\mathbf{r}_1, t_1) u(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle], \quad (2.20)$$

onde  $u$  é o campo em questão,  $C_1$  e  $C_2$  são constantes multiplicativas que podem existir ao se escrever o campo total,  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  são as posições dos pontos do feixe que estão sendo avaliados,  $t_1$  e  $t_2$  são os tempos de propagação de cada ponto até uma posição em comum no espaço. Note que antes em (2.18) nós consideramos que ambos os feixes com o mesmo  $\mathbf{r}$  e  $t$ , mas em geral a interferência pode ocorrer a uma distância diferente para as duas ondas e o tempo para elas se propagarem até o dado ponto pode ser diferente ou um atraso temporal pode ser adicionado a uma delas com relação a outra.

Bem como apresentado antes, o último termo da equação é um termo que diz sobre a

correlação deste campo<sup>4</sup>, e por isto definimos a função:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1, t_2) = \langle u^*(\mathbf{r}_1, t_1)u(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle \quad (2.21)$$

Esta pode ser reescrita da forma mais conhecida como a *função de coerência mútua* ao se supor que os campos são estacionários, e esta só depende dos tempos pela diferença  $\tau = t_2 - t_1$ . Portanto

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \langle u^*(\mathbf{r}_1, t)u(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle. \quad (2.22)$$

A função de coerência mútua é uma quantidade importante na teoria de coerência ótica. Com isso, intensidade média (2.16) no ponto  $\mathbf{r}$  pode ser escrita em termos da função de coerência mútua (2.22) como

$$I(\mathbf{r}) = \langle u^*(\mathbf{r}, t)u(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle_t = \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}; 0). \quad (2.23)$$

Este fato evidencia ainda mais uma propriedade importante da função de coerência mútua, esta função é positivo semi-definida, para provar isso basta notar que para um conjunto de  $n$  tempos, posições e constantes complexas  $c_i$

$$\left| \sum_{i=1}^n u(\mathbf{r}_i, t_i) \right|^2 \geq 0, \quad (2.24)$$

logo

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n c_i u(\mathbf{r}_i, t_i) \right|^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i^* c_j u^*(\mathbf{r}_i, t_i) u(\mathbf{r}_j, t_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i^* c_j \Gamma(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; t_j - t_i) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

É também conveniente normalizar a função de coerência mútua, esta recebe o nome *grau de coerência complexo*

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)}{[\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1; 0)]^{1/2} [\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2; 0)]^{1/2}}, \quad (2.26)$$

---

<sup>4</sup>Esta é reconhecida como a *função de correlação-cruzada* entre os processos aleatórios  $u(\mathbf{r}_1, t)$  e  $u(\mathbf{r}_2, t)$ , esse nome vem tanto do estudo de processos aleatórios quanto do estudo e processamento de sinais.

de forma que esta tem os limites

$$0 \leq |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)| \leq 1. \quad (2.27)$$

Neste trabalho não faremos um estudo a coerência dos feixes, porém as equações e definições apresentadas aqui serão úteis quando falarmos dos feixes parcialmente coerentes do Modelo Schell-Gaussiano no próximo capítulo.

## 2.2 Feixes Gaussianos

Como comentado previamente, qualquer feixe coerente pode ser decomposto em conjuntos de soluções ortogonais, dois deles chamados modos Hermite-Gauss e modos Laguerre-Gauss, logo estes conjuntos formam uma base para os feixes coerentes paraxiais. Além de também ser possível descrever um feixe parcialmente coerente como uma soma incoerente de feixes coerentes, portanto poderíamos considerar, neste caso, que os feixes Hermite-Gauss e Laguerre-Gauss também seriam uma possível base para feixes parcialmente coerentes.

A possibilidade de escrever a maior parte dos feixes em termos de modos Hermite-Gauss e Laguerre-Gauss e as simetrias que estes modos carregam faz com que um estudo destes dois modos seja vantajoso. Desta forma, aqui iniciaremos um breve estudo de funções gaussianas, porém antes de começarmos o estudo dos modos Hermite-Gauss e Laguerre-Gauss iremos introduzir os conceitos sobre funções gaussianas, distribuição de Wigner e matriz de covariâncias para que possamos usá-los para na explicação de tais modos.

### 2.2.1 Funções Gaussianas

Feixes gaussianos, assim como distribuições gaussianas, estados gaussianos e funções gaussianas como um todo, possuem algumas propriedades de extrema importância. Funções gaussianas são usadas em todas as áreas da física, aqui trabalharemos com um foco maior

na utilização de funções gaussianas aplicadas a ótica, porém alguns outros sistemas nos quais se usam funções gaussianas e que tem uma grande proximidade com algumas das teorias e processos que discutiremos aqui são os de informação quântica (no estudo de variáveis contínuas) e teoria de grupos (operações gaussianas: operações unitárias que preservam a estrutura gaussiana de um estado), por exemplo.

Para maior visualização, é válido lembrar a estrutura de uma função gaussiana em um espaço de duas dimensões:

$$f(x, y) = A \exp \left( - \left( \frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-y_0)^2}{2\sigma_y^2} \right) \right), \quad (2.28)$$

sendo  $A$  o coeficiente de amplitude da função,  $(x_0, y_0)$  o ponto central da função que é também o ponto onde a função atinge seu maior valor em módulo e  $\sigma_x^2$  e  $\sigma_y^2$  controlam as larguras desta função com relação as coordenadas  $x$  e  $y$  respectivamente.

Já em um espaço com  $n$  dimensões uma função gaussiana pode ser definida como

$$f(\mathbf{x}) = \exp(-\mathbf{x}^T U \mathbf{x}) \quad (2.29)$$

onde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  é um vetor coluna de  $n$  dimensões,  $^T$  é a função tranposição (que troca as linhas pelas colunas de uma matriz) e  $U$  é uma matriz  $n \times n$  positiva definida. Uma propriedade que nos é importante surge quando deslocamos esta função e a integramos em todo o espaço:

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} \exp(-\mathbf{x}^T U \mathbf{x} + \mathbf{v}^T \mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det U}} \exp \left( \frac{1}{4} \mathbf{v}^T U^{-1} \mathbf{v} \right) \quad (2.30)$$

com  $\mathbf{v}$  sendo um vetor de dimensão  $n$  arbitrário. Esta propriedade será usada quando falarmos de distribuição de Wigner.

Em todos estes estudos um dos aspectos fundamentais da função gaussiana é que esta é univocamente determinada por seus primeiros e segundos *momentos*. Aqui utilizamos *momento* com o significado matemático, isto é, uma medida quantitativa do perfil de uma função. Este é um conceito utilizado principalmente em mecânica e em estatística, porém

também é possível utiliza-lo no em ótica para descrever a distribuição espacial dos modos do feixe de luz. Portanto, o  $n$ -ésimo momento de uma função real e contínua de uma variável real  $f(x)$  em respeito a um valor  $a$  é

$$\mu_n = \int dx (x - a)^n f(x) \quad (2.31)$$

Quando falamos de momento sem mencionar com respeito a qual valor que este é calculado é comum que seja para o caso no qual  $a = 0$ , inclusive é comum a definição de momento com  $a = 0$ . O caso nomeado de *momento central* é aquele para o qual  $a$  é o primeiro momento  $a = \mu_1$ , com  $\mu_1$  calculado para  $a = 0$ . No caso em que se trata, por exemplo, de uma distribuição de probabilidade o momento zero será a probabilidade total, já o primeiro momento será a média, o segundo momento central será a variância e assim por diante. Se  $f(x)$  representar a distribuição transversal do modo de um feixe, a função caracteriza apenas uma estrutura geométrica do feixe e não uma estrutura estatística, ou seja, caracteriza o como ele está espalhado pelo espaço transversal em um instante de tempo e em uma posição fixa da direção de propagação deste.

Utilizando as definições feitas, é simples visualizar que para uma função gaussiana em duas dimensões como a (2.28) teremos a identificação de que o primeiro momento é  $x_0$  na coordenada  $x$  e  $y_0$  na coordenada  $y$ , já o segundo momento central é dado por  $\sigma_x^2$  na coordenada  $x$  e  $\sigma_y^2$  na coordenada  $y$ . Uma propriedade de funções gaussianas que vale comentar é que esta fica univocamente definida ao se conhecer o primeiro e o segundo momento central. Não iremos provar isto agora, mas uma forma de visualizar este fato será vista logo mais a frente após a apresentação da distribuição de Wigner.

## 2.2.2 Distribuição de Wigner e Matriz de Covariância

Em mecânica quântica o estado de um sistema é descrito pela matriz densidade  $\hat{\rho}$ , porém esta não é a única forma de se descrever um sistema quântico. Em especial, este trabalho tem interesse em uma descrição probabilística no espaço de fase, que surge como uma representação de  $\hat{\rho}$  como uma distribuição das variáveis de posição e momento.

Em 1932 E. Wigner propôs [8] uma distribuição com o intuito de fazer, assim como é feito em mecânica clássica, uma análise da distribuição de probabilidade de um estado no espaço de fase. Esta distribuição, nomeada como homenagem ao mesmo, se aproxima da estrutura da distribuição densidade probabilidade no espaço de fase usada em mecânica clássica, porém a *distribuição de Wigner* pode assumir valores negativos, portanto não pode ser interpretada como uma densidade de probabilidade. Apesar de não ser uma densidade de probabilidade propriamente, esta mantém muitas das propriedades conhecidas na mecânica clássica para densidades de probabilidade no espaço de fase, e por isso acabou também sendo conhecida como *distribuição de quase-probabilidade de Wigner*.

Em seu artigo Wigner apresenta sua distribuição utilizando a função de onda na representação de posição  $\psi(\mathbf{x})$ . Supondo um sistema com  $N$  dimensões e sendo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  o vetor posição no espaço real e por sua vez  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$  o vetor dos momentos, tem-se a definição [8]

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} \int d\boldsymbol{\mu} \psi\left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{2}\right) \psi^*\left(\mathbf{x} + \frac{\boldsymbol{\mu}}{2}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\mu}}. \quad (2.32)$$

Uma generalização da eq.(2.32) para um estado quântico qualquer descrito por uma matriz densidade  $\hat{\rho}$  se dá:

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} \int d\boldsymbol{\mu} \left\langle \mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{2} \left| \hat{\rho} \right| \mathbf{x} + \frac{\boldsymbol{\mu}}{2} \right\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\mu}}. \quad (2.33)$$

Parte importante desta distribuição são suas propriedades, abaixo olharemos para algumas mais importantes.

- 1) A distribuição de Wigner é real.

$$W : \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{p}\} \longrightarrow W(\mathbf{x}, \mathbf{p})$$

2) Suas *marginais*<sup>5</sup> são:

$$\int d\mathbf{p} W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \langle \mathbf{x} | \hat{\rho} | \mathbf{x} \rangle \quad (2.34)$$

$$\int d\mathbf{x} W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \langle \mathbf{p} | \hat{\rho} | \mathbf{p} \rangle \quad (2.35)$$

$$\int d\mathbf{p} \int d\mathbf{x} W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \text{Tr}(\hat{\rho}) \quad (2.36)$$

No caso de estados puros o lado direito das duas primeiras equações se tornam a densidade de probabilidade na representação de posição  $|\psi(\mathbf{x})|^2$  e na representação de momento  $|\psi(\mathbf{p})|^2$  respectivamente. E para estados físicos temos que  $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$ , que na interpretação de quasi-densidade de probabilidade representa a probabilidade total.

3) É possível calcular o valor médio de um operador  $\hat{A}$  através da distribuição de Wigner como

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{A}) = \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{p} W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) A(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \quad (2.37)$$

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int d\boldsymbol{\mu} \left\langle \mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{2} \left| \hat{A} \right| \mathbf{x} + \frac{\boldsymbol{\mu}}{2} \right\rangle e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\mu}} \quad (2.38)$$

É possível notar que estas propriedades da distribuição de Wigner apresentam um dos motivos desta distribuição ser chamada de distribuição de quasi-probabilidade, isto pois todas estas propriedades são também propriedades de uma distribuição de probabilidade.

## Matriz de Covariância

Aqui utilizaremos a distribuição de Wigner na caracterização e na construção de estados gaussianos, estes representam estados quânticos óticos para os quais a distribuição de Wigner é uma função gaussiana. Nesse caso a distribuição de Wigner pode ser escrita em termos de uma matriz chamada matriz de covariância

---

<sup>5</sup>Marginal é um termo oriundo da teoria de probabilidade. Suponha uma distribuição de probabilidade de duas variáveis  $f(x, y)$ , um *distribuição marginal* é a distribuição de apenas uma das variáveis dado que não se conhece a outra, esta normalmente é calculada somando sobre a variável não conhecida, isto é,  $g(x) = \sum_y f(x, y)$  sendo  $g(x)$  a distribuição marginal de  $f(x, y)$  em  $x$ .

$$W(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^N \sqrt{\det(V)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\langle \boldsymbol{\xi} \rangle - \boldsymbol{\xi})^T V^{-1} (\langle \boldsymbol{\xi} \rangle - \boldsymbol{\xi}) \right], \quad (2.39)$$

onde  $\boldsymbol{\xi}$  é o vetor no espaço de fase  $\boldsymbol{\xi} = (x_1, p_1, x_2, p_2, \dots, x_N, p_N)$ ,  $\langle \boldsymbol{\xi} \rangle$  é o valor médio de  $\boldsymbol{\xi}$  e  $V$  é a matriz de covariância que explicaremos abaixo. O resultado (2.39) sai diretamente da eq.(2.30), pois a distribuição de Wigner de uma função gaussiana não é nada mais que a integral de uma função gaussiana deslocada.

A matriz de covariância (MC) é uma matriz que contém todos os segundos momentos centrais, e é definida como

$$V_{ij} := \left\langle \frac{\{\Delta \hat{\xi}_i, \Delta \hat{\xi}_j\}}{2} \right\rangle = \text{Tr} \left( \frac{\{\Delta \hat{\xi}_i, \Delta \hat{\xi}_j\}}{2} \hat{\rho} \right) = \quad (2.40)$$

$$= \int d\boldsymbol{\xi} \Delta \xi_i \Delta \xi_j W(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} (\langle \hat{\xi}_i \hat{\xi}_j \rangle + \langle \hat{\xi}_j \hat{\xi}_i \rangle) - \langle \hat{\xi}_i \rangle \langle \hat{\xi}_j \rangle, \quad (2.41)$$

sendo  $\{A, B\} = AB + BA$  o anticomutador de  $A$  com  $B$  e  $\Delta \hat{\xi}_i$  é

$$\Delta \hat{\xi}_i = \hat{\xi}_i - \langle \hat{\xi}_i \rangle. \quad (2.42)$$

Tudo o que foi dito até aqui sobre distribuições de Wigner e MC se aplica a descrição probabilística de sistemas físicos (mais especificamente sistemas quânticos multi-partidos [9]), porém ambos podem também serem usados para descrever uma distribuição transversal de intensidade de um feixe ótico. Portanto, a média descrita na eq.(2.41) é uma média estatística para os casos mais gerais onde a distribuição de Wigner é utilizada para descrever a densidade de probabilidade de um estado no espaço de fase, porém quando se trata de um sistema ótico, que será o caso nesta dissertação, a distribuição de Wigner e a MC descrevem uma propriedade geométrica do feixe, i.e., as médias calculadas na eq.(2.41) seriam médias espaciais para uma seção reta do feixe.

Devido a isto, ao abordar a MC em ótica estaremos falando de uma matriz  $4 \times 4$  que contem as médias geométricas da seção reta de um feixe, sendo as coordenadas no espaço



de fases  $x$ ,  $p_x$ ,  $y$  e  $p_y$ . Ou seja, a MC de um feixe é dada por:

$$V := \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xp_x \rangle & \langle xy \rangle & \langle xp_y \rangle \\ \langle p_x x \rangle & \langle p_x^2 \rangle & \langle p_x y \rangle & \langle p_x p_y \rangle \\ \langle yx \rangle & \langle yp_x \rangle & \langle y^2 \rangle & \langle yp_y \rangle \\ \langle p_y x \rangle & \langle p_y p_x \rangle & \langle p_y y \rangle & \langle p_y^2 \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

A possibilidade de fazer uma mudança de referencial que leve  $\langle x \rangle$  em  $\langle x_0 \rangle = 0$  resulta em uma possível eliminação dos primeiros momentos da MC nos possibilitando escrevê-la como (2.43), o que facilita as contas e em geral pode ser feito, visto que em ótica estas são as coordenadas transversais do feixe no espaço de fases e, portanto, podem ser redefinidas.

Para finalizarmos esta seção apresentamos a equação da amplitude do campo de um feixe gaussiano que propaga na direção  $z$ :

$$u(s, z) = u_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp(-i\psi(z)) \exp\left(-\frac{i\kappa s^2}{2R(z)}\right) \exp\left(-\frac{s^2}{w^2(z)}\right), \quad (2.44)$$

E definimos as variáveis:

- $u_0$  é apenas uma constante de amplitude que pode ser normalizada caso esteja-se trabalhando com feixes normalizados.
- $s^2 = x^2 + y^2$  é a coordenada radial cilíndrica e  $z$  o eixo de propagação do feixe.
- $\kappa$  é o número de onda, assim como apresentado mais cedo.
- $w(z)$  é o raio no qual as amplitudes do campo caem para  $1/e$  dos seus valores axiais.

Em uma posição  $z$  ao longo do feixe  $w(z)$  é dado por:

$$\frac{1}{2}\kappa w^2(z) = \frac{z_R^2 + z^2}{z_R}. \quad (2.45)$$

- $z_R$  é o comprimento de Rayleigh (ou intervalo de Rayleigh) do feixe que é determinado dado um tamanho da cintura do feixe. A uma distância da cintura do feixe igual ao comprimento de Rayleigh  $z_R$ , a largura  $w$  do feixe é  $\sqrt{2}$  mais larga do que no foco do feixe onde  $w = w_0$ . Isto implica que a intensidade neste ponto é metade

da intensidade de pico, onde  $z = 0$ . Sendo  $\lambda$  o comprimento de onda e  $n$  o índice de refração do meio no qual o feixe se propaga, o comprimento de Rayleigh é:

$$z_R = \frac{\pi w_0^2 n}{\lambda}. \quad (2.46)$$

- $\psi(z)$  é a fase de Gouy. A fase de Gouy resulta em um aumento aparente no comprimento de onda próximo à cintura do feixe. E a fase de Gouy é dada por:

$$\psi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right). \quad (2.47)$$

- $R(z)$  é o raio de curvatura da frente de onda (a curvatura da superfície de fase constante). A equação que descreve  $R$  como função de  $z$  é:

$$R(z) = \frac{z_R^2 + z^2}{z}. \quad (2.48)$$

## 2.3 Feixes Hermite-Gauss e Laguerre-Gauss

Duas possíveis soluções para a equação paraxial (2.12) são os feixes Hermite-Gauss e Laguerre-Gauss, que têm estes nomes devido aos polinômios de Hermite e Laguerre que surgem nestas soluções. O termo Gauss vem de ambas as soluções serem reconhecidas como modos gaussianos de ordem superiores, em outras palavras, estas soluções, assim como o feixe gaussiano, são proporcionais a uma função gaussiana nas variáveis espaciais, porém também contêm outras funções que alteram a distribuição espacial do feixe. Estas funções formam uma base para a construção de feixes, de forma que sempre é possível escrever um feixe como uma combinação linear de feixes Hermite-Gauss ou Laguerre-Gauss.

### 2.3.1 Hermite-Gauss

Não há necessidade aqui, de se deduzir as equações dos modos Hermite-Gauss, pois estas são amplamente conhecidas e divulgadas em diversos livros e artigos. Portanto a equação da amplitude do modo Hermite-Gauss(HG) como apresentada na ref.[10] tem a

forma:

$$u_{nm}^{\text{HG}}(x, y, z) = C_{nm}^{\text{HG}}(1/w) \exp[-i(n + m + 1)\psi] \exp\left(-\frac{i\kappa(x^2 + y^2)}{2R}\right) \exp\left[-(x^2 + y^2)/w^2\right] H_n(x\sqrt{2}/w) H_m(y\sqrt{2}/w), \quad (2.49)$$

Aqui definimos as seguintes variáveis:

- $n$  e  $m$  são os índices dos modos retangulares, já que o feixe HG tem esta simetria.
- $H_n(u)$  é o polinômio de Hermite de ordem  $n$  que será descrito em seguida.
- $C_{nm}^{\text{HG}}$  é uma constante multiplicativa que no caso do feixe normalizado é:

$$C_{nm}^{\text{HG}} = \left(\frac{2}{\pi n! m!}\right)^{1/2} 2^{-N/2} \quad (2.50)$$

- $N = n + m$  é a ordem do modo. Isto quer dizer que quanto maior o valor de  $N$  mais o modo se diferencia de um modo gaussiano.

Que tem uma forma muito parecida com a do feixe gaussiano. Daqui em diante iremos omitir a dependência em  $z$  de todas as funções, já que todas estas dependências serão de forma indireta. Além disso,  $C_{nm}^{\text{HG}}$  é escolhido de tal forma que a amplitude do feixe seja normalizada, ou seja,  $\int dx dy |u_{nm}^{\text{HG}}|^2 = 1$ . É perceptível que esta função é o produto do que poderíamos chamar de dois HG em uma dimensão

$$u_{nm}^{\text{HG}}(x, y, z) = \phi_n(x)\phi_m(y), \quad (2.51)$$

com

$$\phi_j(v) = C_j e^{-\alpha v^2} H_j(v\sqrt{2}/w) \exp[-i(j + 1/2)\psi], \quad (2.52)$$

$$C_j = \left(\frac{2^{-j} \sqrt{2}}{j! \sqrt{\pi} w}\right)^{1/2}, \quad (2.53)$$

$$\alpha = \frac{i\kappa}{2R} + \frac{1}{w^2}. \quad (2.54)$$

## Propriedades dos Polinômios de Hermite

Algumas das propriedades de (2.49) serão usadas mais a frente, portanto iremos aqui explicitá-las e calcular alguns casos recorrentes nos cálculos que estão por vir. Inicialmente lembramos de algumas propriedades dos polinômios de Hermite.

A definição de polinômios de Hermite é dada pela equação:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.55)$$

E estes polinômios são ortogonais em relação a uma função peso  $e^{-x^2}$ , isto é,

$$\int dx e^{-x^2} H_n(x) H_k(x) = 0 \quad \forall n \neq k. \quad (2.56)$$

Um caso mais geral, fácil de ser mostrado, encontrado em [11] é

$$\int dx e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} H_n\left(\frac{x}{\sigma}\right) H_m\left(\frac{x}{\sigma}\right) = 2^n n! \sqrt{\pi} \sigma \delta_{nm}. \quad (2.57)$$

Note que para  $\sigma = \frac{w}{\sqrt{2}}$  o resultado de (2.57) é exatamente  $\frac{1}{C_n^2}$  que explicita que  $C_n$  é a normalização de  $\phi_n(x)$ .

Como iremos utilizar polinômios de Hermite para fazer cálculos dos feixes Hermite-Gauss, algumas propriedades se tornam úteis de se conhecer. Com o auxílio da função geratriz destes polinômios  $e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) t^n / n!$  é possível encontrar algumas dessas propriedades:

$$H'_n(x) := \frac{d}{dx} H_n(x) = 2n H_{n-1}(x), \quad (2.58)$$

$$2x H_n(x) = H_{n+1}(x) + H'_n(x), \quad (2.59)$$

$$x H_n(x) = \frac{1}{2} H_{n+1}(x) + n H_{n-1}(x). \quad (2.60)$$

Com todas as informações já obtidas podemos, assim como em [11], calcular o segundo momento

$$\int dx x^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} H_n^2\left(\frac{x}{\sigma}\right) = 2^n n! \sqrt{\pi} \sigma^3 \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (2.61)$$

que assim como antes ao escolhermos  $\sigma = \frac{w}{\sqrt{2}}$  a equação é igual a  $\frac{w^2}{2C_n^2} (n + 1/2)$ .

Algumas das integrais que irão aparecer na próxima seção estão calculadas no apêndice A e utilizam as propriedades mencionadas acima, todas elas sendo das funções unidimensionais de HG  $\phi_j(u)$ .

### 2.3.2 Laguerre-Gauss

O foco deste estudo está nos feixes Laguerre-Gauss e modelo Schell-Gaussiano Torcido(MSGT), que são ambos feixes com envoltórias gaussianas, sendo o Laguerre-Gauss um feixe coerente e não-gaussiano enquanto MSGT um feixe parcialmente coerente e gaussiano.

Quando há necessidade de se trabalhar com feixes coerentes que carregam momento angular orbital(MAO), ou seja, que carregam momento angular descontando-se a polarização do campo, é natural que se trabalhe com os feixes Laguerre-Gauss. Isto ocorre devido a este feixe ter um momento angular bem definido e poder ser considerado como um autoestado<sup>6</sup> de momento angular[4], onde cada fóton carrega  $l\hbar$  de MAO.

Assim como antes, não há necessidade de deduzirmos a equação do feixe Laguerre-Gauss(LG) pois esta é conhecida [10] e tem a forma:

$$u_{nm}^{\text{LG}}(r, \phi, z) = C_{nm}^{\text{LG}}(1/w) \exp[-i(n+m+1)\psi] \exp[-i(n-m)\phi] \exp(-ikr^2/2R) \\ (-1)^{\min(n,m)} (r\sqrt{2}/w)^{|r-m|} \exp(-r^2/w^2) L_{\min(n,m)}^{|n-m|}(2r^2/w^2), \quad (2.62)$$

com a constante de normalização da amplitude do feixe:

$$C_{nm}^{\text{LG}} = \left( \frac{2}{\pi n! m!} \right)^{1/2} \min(n, m) \quad (2.63)$$

e sendo  $L_p^l(u)$  o polinômio generalizado de Laguerre (ou polinômios associados de Laguerre):

$$L_p^l(x) = e^x \frac{x^{-l}}{p!} \frac{d^p}{dx^p} (e^{-x} x^{l+p}). \quad (2.64)$$

---

<sup>6</sup>O termo autoestado aqui é herdado da analogia que feixes paraxiais têm com a mecânica quântica[7], para representar a relação que estes feixes têm com o operador de momento angular  $\hat{L}_z$ .

Vale notar que, por um motivo que será entendido logo mais, usamos índices diferentes dos comumente utilizados para os feixes LG. Desta forma, para facilitar a compreensão física do sistema, descrevemos os índices normalmente utilizados como função dos índices utilizados aqui:  $p = \min(n, m)$  que é o índice radial e  $l = n - m$  é o índice azimutal.

O motivo de utilizarmos tais índices se mostra na facilidade de descrever  $u_{nm}^{\text{LG}}$  como uma combinação linear de feixes HG [10]:

$$u_{nm}^{\text{LG}}(x, y, z) = \sum_{k=0}^N i^k b(n, m, k) u_{N-k, k}^{\text{HG}}(x, y, z) = \sum_{k=0}^N i^k b(n, m, k) \phi_{N-k}(x) \phi_k(y), \quad (2.65)$$

com coeficientes reais

$$b(n, m, k) = \left( \frac{(N-k)!k!}{2^N n! m!} \right)^{1/2} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} [(1-t)^n (1+t)^m]_{t=0}. \quad (2.66)$$

### Matriz de Covariância do Feixe Laguerre-Gauss

Como já foi dito, a MC é capaz de extrair toda a informação "gaussiana" de um feixe, i.e., nela estão contidos todos os segundos momentos de um feixe. O que será feito agora é calcular esta matriz nas coordenada transversais  $x$  e  $y$  de um feixe LG. Para o cálculo de algumas destas correlações será necessário o uso da distribuição de Wigner.

É possível notar que existe uma simetria nos eixos  $x$  e  $y$  para o feixe LG (2.62), isto fica evidente quando olhamos para (2.65). Isso facilitará a conta, pois precisaremos calcular apenas um dos casos. Também levando em conta que, no caso clássico, todas as variáveis comutam, é necessário apenas calcular os casos  $\langle x^2 \rangle$ ,  $\langle xp_x \rangle$ ,  $\langle xy \rangle$ ,  $\langle xp_y \rangle$ ,  $\langle p_x^2 \rangle$  e  $\langle p_x p_y \rangle$ , pois os outros casos serão análogos a estes. Além disso, calcular a transformada de Fourier de (2.65) em relação a uma variável cartesiana não é algo fácil, portanto todos os cálculos envolvendo  $p_x$  ou  $p_y$  serão feitos com a distribuição de Wigner.

Começando com o cálculo de  $\langle x^2 \rangle$  será necessário conhecermos  $|u_{nm}^{\text{LG}}(x, y, z)|^2 := u_{nm}^{\text{LG}}(x, y, z) u_{nm}^{\text{LG}*}(x, y, z)$  para facilitar as contas futuras, já que todas envolverão o módulo da função:

$$\begin{aligned}
|u_{nm}^{\text{LG}}(x, y, z)|^2 &= \left( \sum_{k=0}^N i^k b(n, m, k) \phi_{N-k}(x) \phi_k(y) \right) \left( \sum_{j=0}^N (-i)^j b(n, m, j) \phi_{N-j}^*(x) \phi_j^*(y) \right) = \\
&= \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N i^k (-i)^j b(n, m, k) b(n, m, j) \phi_{N-k}(x) \phi_{N-j}^*(x) \phi_k(y) \phi_j^*(y). \quad (2.67)
\end{aligned}$$

Dotados desta equação iniciamos os cálculos das médias, começando por  $\langle x^2 \rangle$ :

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle &= \int dy dx x^2 \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N i^k (-i)^j b(n, m, k) b(n, m, j) \phi_{N-k}(x) \phi_{N-j}^*(x) \phi_k(y) \phi_j^*(y) = \\
&= \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N i^k (-i)^j b(n, m, k) b(n, m, j) \int dx x^2 \phi_{N-k}(x) \phi_{N-j}^*(x) \int dy \phi_k(y) \phi_j^*(y) = \\
&= \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N i^k (-i)^j b(n, m, k) b(n, m, j) \int dx x^2 \phi_{N-k}(x) \phi_{N-j}^*(x) \delta_{nj} = \\
&= \sum_{k=0}^N b^2(n, m, k) \int dx x^2 |\phi_{N-k}(x)|^2 \\
&= \sum_{k=0}^N b^2(n, m, k) C_{N-k}^2 \int dx x^2 e^{-\frac{2x^2}{w^2}} H_{N-k}^2(x\sqrt{2}/w), \quad (2.68)
\end{aligned}$$

aqui usamos a propriedade encontrada em (2.61)

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle &= \sum_{k=0}^N b^2(n, m, k) C_{N-k}^2 \left( \frac{w}{\sqrt{2}} \right)^3 \frac{\sqrt{2}}{w C_{N-k}^2} \left( N - k + \frac{1}{2} \right) = \\
&= \frac{w^2}{2} \left[ \left( N + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=0}^N b^2(n, m, k) - \sum_{k=0}^N k b^2(n, m, k) \right] = \frac{w^2}{2} \left( N + \frac{1}{2} - \frac{N}{2} \right) \\
&= \frac{w^2}{4} (N + 1). \quad (2.69)
\end{aligned}$$

Passando agora para o cálculo de  $\langle xy \rangle$  usando (2.67), temos

$$\langle xy \rangle = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N i^k (-i)^j b(n, m, k) b(n, m, j) \int dx x \phi_{N-k}(x) \phi_{N-j}^*(x) \int dy y \phi_k(y) \phi_j^*(y), \quad (2.70)$$

fazendo uso da propriedade deduzida no apêndice A (A.2), com  $b_k := b(n, m, k)$  já que

estamos fixando  $n$  e  $m$

$$\begin{aligned}
\langle xy \rangle &= \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N i^k (-i)^j b_k b_j \frac{w}{2} \left[ \sqrt{(N-k)} e^{-i\psi} \delta_{N-k-1, N-j} + \sqrt{(N-j)} e^{i\psi} \delta_{N-k, N-j-1} \right] \\
&= \frac{w}{2} \left[ \sqrt{k} e^{-i\psi} \delta_{k-1, j} + \sqrt{j} e^{i\psi} \delta_{k, j-1} \right] = \\
&= \frac{w^2}{4} \left( \sum_{k=1}^N i b_k b_{k-1} \sqrt{(N-k+1)} \sqrt{k} - \sum_{j=1}^N i b_{j-1} b_j \sqrt{(N-j+1)} \sqrt{j} \right). \quad (2.71)
\end{aligned}$$

Algo muito importante de notar é que em (2.71) foi necessário alterar o limite da soma em  $k$  já que  $b_k$  só está definido no intervalo  $k \in [0, N]$ . Como  $k$  e  $j$  são variáveis mudas o resultado final é

$$\langle xy \rangle = 0. \quad (2.72)$$

Para os próximos cálculos Wigner de um feixe LG

$$\begin{aligned}
W_{\text{LG}}(x, y, p_x, p_y; z) &= \int d\mu d\eta u_{nm}^{\text{LG}}(x - \frac{\mu}{2}, y - \frac{\eta}{2}, z) u_{nm}^{\text{LG}*}(x + \frac{\mu}{2}, y + \frac{\eta}{2}, z) e^{-i\mu p_x} e^{-i\eta p_y} = \\
&= \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N i^k (-i)^j b_k b_j \int d\mu d\eta \phi_{N-k}(x - \frac{\mu}{2}) \phi_k(y - \frac{\eta}{2}) \phi_{N-j}^*(x + \frac{\mu}{2}) \phi_j^*(y + \frac{\eta}{2}) e^{-i\mu p_x} e^{-i\eta p_y}. \quad (2.73)
\end{aligned}$$

Para  $\langle p_x^2 \rangle$ :

$$\langle p_x^2 \rangle = \int dx dp_x dy dp_y p_x^2 W_{\text{LG}}(x, y, p_x, p_y; z), \quad (2.74)$$

sendo que em  $y$  teremos uma equação como (A.1), portanto

$$\langle p_x^2 \rangle = \sum_{k=0}^N b_k^2 \int dx d\mu \phi_{N-k}(x - \frac{\mu}{2}) \phi_{N-k}^*(x + \frac{\mu}{2}) \int dp_x p_x^2 e^{-i\mu p_x}, \quad (2.75)$$

porém

$$\int dp_x p_x^2 e^{-i\mu p_x} = -\delta''(\mu), \quad (2.76)$$

logo

$$\langle p_x^2 \rangle = - \sum_{k=0}^N b_k^2 \int dx \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \left[ \phi_{N-k}(x - \frac{\mu}{2}) \phi_{N-k}^*(x + \frac{\mu}{2}) \right]_{\mu=0}. \quad (2.77)$$



Utilizando (A.8)

$$\begin{aligned}
\langle p_x^2 \rangle &= \sum_{k=0}^N b_k^2 \left[ \frac{1}{w^2} + \frac{\kappa^2 w^2}{2R^2} \left( N - k + \frac{1}{2} \right) + \frac{2(N-k)}{w^2} \right] = \\
&= \left[ \frac{1}{w^2} + \frac{\kappa^2 w^2}{2R^2} \left( N + \frac{1}{2} \right) + \frac{2N}{w^2} \right] \sum_{k=0}^N b_k^2 - \left( \frac{\kappa^2 w^2}{2R^2} + \frac{2}{w^2} \right) \sum_{k=0}^N k b_k^2 = \\
&= \frac{1}{w^2} + \frac{\kappa^2 w^2}{2R^2} \left( N + \frac{1}{2} \right) + \frac{2N}{w^2} - \left( \frac{\kappa^2 w^2}{2R^2} + \frac{2}{w^2} \right) \frac{N}{2} = \\
&= \frac{1}{w^2} (N+1) + \frac{\kappa^2 w^2}{4R^2} (N+1). \tag{2.78}
\end{aligned}$$

Comparando (2.78) com (2.69) é possível ver que  $\langle p_x^2 \rangle$  depende de  $\langle x^2 \rangle$

$$\langle p_x^2 \rangle = \frac{\kappa^2}{R^2} \langle x^2 \rangle + \frac{1}{w^2} (N+1). \tag{2.79}$$

Para  $\langle xp_y \rangle$ :

$$\langle xp_y \rangle = \int dx dp_x dy dp_y xp_y W_{\text{LG}}(x, y, p_x, p_y; z), \tag{2.80}$$

como nesse caso existem os termos

$$\int dp_y p_y e^{-i\eta p_y} = i\delta'(\eta), \tag{2.81}$$

$$\int dp_x e^{-i\mu p_x} = \delta(\mu), \tag{2.82}$$

temos

$$\begin{aligned}
\langle xp_y \rangle &= \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N i^k (-i)^j b_k b_j \int dx d\mu x \phi_{N-k}(x - \frac{\mu}{2}) \phi_{N-j}^*(x + \frac{\mu}{2}) \delta(\mu) \\
&\quad \int dy d\eta \phi_k(y - \frac{\eta}{2}) \phi_j^*(y + \frac{\eta}{2}) (i\delta'(\eta)) = \\
&= -i \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N i^k (-i)^j b_k b_j \int dx x \phi_{N-k}(x) \phi_{N-j}^*(x) \\
&\quad \int dy \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \phi_k(y - \frac{\eta}{2}) \phi_j^*(y + \frac{\eta}{2}) \right]_{\eta=0}. \tag{2.83}
\end{aligned}$$

Aqui utilizamos as eq.(A.2) e eq.(A.3),

$$\begin{aligned} \langle xp_y \rangle &= -i \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N i^k (-i)^j b_k b_j \frac{w}{2} \left[ \sqrt{N-k} e^{-i\psi} \delta_{N-k-1, N-j} + \sqrt{N-j} e^{i\psi} \delta_{N-k, N-j-1} \right] \\ &\quad \left[ \sqrt{k} e^{-i\psi} \delta_{k-1, j} \left( \frac{i\kappa w}{2R} - \frac{1}{w} \right) + \sqrt{j} e^{i\psi} \delta_{k, j-1} \left( \frac{i\kappa w}{2R} + \frac{1}{w} \right) \right] = \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} &= -i \frac{w}{2} \left[ \sum_{j=1}^N i^{-1} b_{j-1} b_j \sqrt{j} \sqrt{N-j+1} \left( \frac{i\kappa w}{2R} + \frac{1}{w} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^N (-i)^{-1} b_k b_{k-1} \sqrt{k} \sqrt{N-k+1} \left( \frac{i\kappa w}{2R} - \frac{1}{w} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.85)$$

já que  $j$  e  $k$  são termos mudos podemos mudar  $j \rightarrow k$ , por isto

$$\begin{aligned} \langle xp_y \rangle &= -\frac{w}{2} \left[ \sum_{k=1}^N b_{k-1} b_k \sqrt{k} \sqrt{N-k+1} \left( \frac{i\kappa w}{2R} + \frac{1}{w} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^N b_k b_{k-1} \sqrt{k} \sqrt{N-k+1} \left( \frac{i\kappa w}{2R} - \frac{1}{w} \right) \right] = \\ &= -\sum_{k=1}^N b_k b_{k-1} \sqrt{k} \sqrt{N-k+1} = \frac{l}{2}, \end{aligned} \quad (2.86)$$

sendo que a última igualdade foi calculada numericamente e  $l$  é o índice azimutal, como já apresentado antes, mas também pode ser identificado como o número de MAO. No caso de  $\langle p_x y \rangle$  basta realizar uma troca nas variáveis que resultará em uma simples troca nos índices  $k \rightarrow N-k$ ,  $j \rightarrow N-j$  das funções  $\phi_n(u)$  em eq.(2.83), conseqüentemente resultando apenas nesta mesma troca no interior dos parênteses da eq.(2.84), acabando por nos dar um resultado final no qual o sinal é trocado já que a mudança efetiva desta troca só se apresenta na ordem de  $i$ . Assim sendo:

$$\langle yp_x \rangle = -\frac{l}{2} \quad (2.87)$$

Para  $\langle xp_x \rangle$ :

$$\langle xp_x \rangle = \int dx dp_x dy dp_y xp_x W_{LG}(x, y, p_x, p_y; z), \quad (2.88)$$

assim como no caso de  $\langle p_x^2 \rangle$ , em  $y$  teremos um termo como (A.1), logo

$$\langle xp_x \rangle = \sum_{k=0}^N b_k^2 \int dx d\mu x \phi_{N-k}(x - \frac{\mu}{2}) \phi_{N-k}^*(x + \frac{\mu}{2}) \int dp_x p_x e^{-i\mu p_x}, \quad (2.89)$$

porém

$$\int dp_x p_x e^{-i\mu p_x} = i\delta'(\mu), \quad (2.90)$$

deste modo

$$\langle xp_x \rangle = i \sum_{k=0}^N b_k^2 \int dx x \frac{d}{d\xi} \left[ \phi_{N-k}(x - \frac{\xi}{2}) \phi_{N-k}^*(x + \frac{\xi}{2}) \right]_{\xi=0} = \quad (2.91)$$

$$= -\frac{\kappa}{R} \sum_{k=0}^N b_k^2 \int dx x^2 |\phi_{N-k}(x)|^2 = -\frac{\kappa}{R} \langle x^2 \rangle. \quad (2.92)$$

A passagem da primeira para a segunda linha pode ser entendida retornando à segunda linha da eq.(A.3) e fazendo  $j = k$ .

De posse dos resultados (2.69), (2.72), (2.78), (2.86), (2.87) e (2.92) somos capazes de escrever a MC para o feixe LG:

$$V_{\text{LG}} = \begin{pmatrix} \frac{w^2}{4}(N+1) & -\frac{\kappa}{R}\langle x^2 \rangle & 0 & \frac{l}{2} \\ -\frac{\kappa}{R}\langle x^2 \rangle & \frac{\kappa^2}{R^2}\langle x^2 \rangle + \frac{1}{w^2}(N+1) & -\frac{l}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{l}{2} & \frac{w^2}{4}(N+1) & -\frac{\kappa}{R}\langle y^2 \rangle \\ \frac{l}{2} & 0 & -\frac{\kappa}{R}\langle y^2 \rangle & \frac{\kappa^2}{R^2}\langle y^2 \rangle + \frac{1}{w^2}(N+1) \end{pmatrix}. \quad (2.93)$$

Está manifesto nesta equação que o feixe LG diverge mais quanto maior for sua ordem, isto é, quanto maior for  $N$ , além de ser explícito como o MAO afeta a correlação entre  $x$  e  $p_y$  e entre  $y$  e  $p_x$ . Notamos também que este resultado é condizente com fato já conhecido que cada fóton do feixe LG carrega momento angular  $l$ .

$$\langle L_z \rangle = \langle xp_y \rangle - \langle yp_x \rangle = l \quad (2.94)$$

## Capítulo 3

# Modelo Schell-Gaussiano Torcido

Os feixes do modelo Schell-Gaussiano (MSG) foram amplamente estudados no final dos anos 80 e início dos anos 90 [12, 13, 14, 15] e continuam sendo estudados e usados principalmente na área de ótica. Esses feixes são uma generalização dos feixes gaussianos coerentes que inclui, além destes, os feixes gaussianos parcialmente coerentes. Sua extrema importância surge pois, apesar de serem parcialmente coerentes estes feixes podem ser tão direcionais quanto lasers totalmente coerentes [12, 13], o que trás tanto a possibilidade da produção de lasers dessa forma quanto a possibilidade de se estudar coerência utilizando tais feixes<sup>1</sup>.

Em 1993 Simon e Mukunda [1] introduziram uma nova classe de feixes MSG, que se diferencia da estrutura que fora estudada até a época por um fator de fase dependente de posição na densidade espectral cruzada que foi chamada de *fase de torção* (twisted phase em inglês), esse nome foi dado devido ao efeito que esta fase gera no feixe girando-o ao entorno de seu eixo conforme o feixe se propaga.

---

<sup>1</sup>Feixes MSG podem ser produzidos iniciando-se com uma fonte espacialmente incoerente [14] ou como uma superposição de lasers independentes [15].

## 3.1 Teoria Básica dos Feixes do modelo Schell-Gaussiano Torcido

### 3.1.1 Modelo Schell-Gaussiano

#### Densidade Espectral Cruzada

Antes de adentrarmos o estudo dos feixes do modelo Schell-Gaussiano Torcido precisamos entender uma importante função utilizada na descrição de feixes parcialmente coerentes, a *densidade espectral cruzada* que é a transformada de Fourier da função de coerência mútua:

$$\mathcal{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\tau \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) e^{i\omega\tau}. \quad (3.1)$$

Esta por sua vez tem uma propriedade que pode ser observada ao voltarmos para a função de coerência mútua

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt u^*(\mathbf{r}_1, t) u(\mathbf{r}_2, t + \tau) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{\tau-T}^{\tau+T} dt' u^*(\mathbf{r}_1, t' - \tau) u(\mathbf{r}_2, t') = \\ &= \langle u^*(\mathbf{r}_1, t' - \tau) u(\mathbf{r}_2, t') \rangle = \langle u(\mathbf{r}_1, t' - \tau) u^*(\mathbf{r}_2, t') \rangle^* = \\ &= \Gamma^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; -\tau). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Notando que isto só é verdade devido ao limite que leva  $T$  para infinito. Com a propriedade acima e (3.1) é possível deduzir por uma simples mudança de variável de integração que a densidade espectral cruzada é hermitiana, isto é,

$$\mathcal{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = \mathcal{W}^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; \omega). \quad (3.3)$$

Uma outra propriedade interessante é que esta função é positivo semi-definida, devido a mesma propriedade da função de coerência mútua como mostrado em (2.25), portanto

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i^* c_j \mathcal{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) \geq 0. \quad (3.4)$$

Que também pode ser estendida para o contínuo, resultando em

$$\int \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \mathcal{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) f^*(\mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_2) \geq 0, \quad (3.5)$$

sendo  $f(\mathbf{r})$  uma função de quadrado integrável.

Esta função fornece uma caracterização da distribuição de intensidade e de fase de uma secção reta do feixe (para um dado  $z$  fixo) no espaço de fase. (parcialmente simétrico?)

### 3.1.2 Feixes do modelo Schell-Gaussiano Torcido

Os feixes introduzidos por Simon e Mukunda correspondem a densidade espectral cruzada gaussiana axialmente simétrica mais geral possível. A fase de torção tem um limite superior, que será visto logo mais a frente, mas que é basicamente proporcional ao inverso do quadrado do comprimento de coerência transversal do feixe. Portanto esta fase de torção não pode estar presente no caso de um feixe gaussiano completamente coerente com comprimento de coerência transversal infinito.

Após a apresentação dos feixes MSGT um experimento foi realizado em 1994 por Friberg *et al.* [16] que conseguiu gerar feixes MSGT a partir de uma superposição contínua de feixes gaussianos elípticos coerentes mutualmente não correlacionados que foram espacialmente deslocados, propagados em diferentes direções e possuíam frentes de ondas aberrantes.

Uma pergunta feita no artigo original[1] explicita bem as propriedades desse sistema: *”Qual é a densidade espectral cruzada Gaussiana mais geral (em um plano transversal) que é invariante sob rotações arbitrárias ao entorno do eixo  $z$ ?”*. A resposta a esta pergunta surge quando você leva em conta apenas ordens quadráticas dos vetores transversais e que são invariantes sob rotações:  $\rho_1^2 = \rho_1 \cdot \rho_1$ ,  $\rho_2^2 = \rho_2 \cdot \rho_2$ ,  $\rho_1 \cdot \rho_2$  e  $\rho_1 \cdot \epsilon \rho_2 = x_1 y_2 - x_2 y_1$  onde  $\rho_{1/2} = (x_{1/2}, y_{1/2})$  é o vetor das coordenadas transversais e  $\epsilon$  é a matriz antissimétrica

$$\epsilon = i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Dessa forma qualquer expressão quadrática invariante por rotações para dois vetores transversais  $\boldsymbol{\rho}_1$  e  $\boldsymbol{\rho}_2$  tem a forma

$$E(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \alpha \boldsymbol{\rho}_1^2 + \beta \boldsymbol{\rho}_2^2 + \gamma \boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_2 + \theta \boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\rho}_2. \quad (3.7)$$

Para que (3.7) seja hermitiano precisamos que  $\alpha^* = \beta$ ,  $\gamma^* = \gamma$  e  $\theta^* = -\theta$ . Sem perda de generalidade é possível reescrever (3.7) para o caso hermitiano como

$$E(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = a(\boldsymbol{\rho}_1^2 + \boldsymbol{\rho}_2^2) + b(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)^2 + ic(\boldsymbol{\rho}_1^2 - \boldsymbol{\rho}_2^2) + id\boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\rho}_2, \quad (3.8)$$

com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Aqui é possível escolher tais parâmetros de forma a coincidir com as variáveis já conhecidas de feixes MSG. Por isso, a densidade espectral cruzada gaussiana axialmente simétrica mais geral o possível, associada com um feixe monocromático parcialmente coerente no plano em que  $z$  é constante é[1]

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \frac{I}{2\pi\sigma^2} \exp \left[ -\frac{(\boldsymbol{\rho}_1^2 + \boldsymbol{\rho}_2^2)}{4\sigma^2} - \frac{(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)^2}{2\delta^2} - \frac{i\kappa(\boldsymbol{\rho}_1^2 - \boldsymbol{\rho}_2^2)}{2R} - i\kappa u \boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\rho}_2 \right]. \quad (3.9)$$

Sendo nesta equação  $I$  a intensidade total do feixe,  $\sigma$  a largura efetiva do feixe,  $\delta$  é o comprimento de coerência transversal,  $R$  é o raio de curvatura e  $u$  foi denominado parâmetro de torção. Toda a fase proporcional a  $u$  é o que denomina-se fase de torção, esta é fase que foi adicionada no MSGT e que o diferencia de um MSG comum, isto implica que o caso no qual  $u = 0$  a eq.(3.9) recai na densidade espectral cruzada do feixe MSG.<sup>2</sup>

O efeito gerado pela fase de torção é o de rodar o campo ao entorno do seu eixo de propagação, por isso esta recebeu tal nome. Este efeito gera uma conexão direta entre a fase de torção e o parâmetro de torção com o MAO. Um cuidado deve ser tomado, pois aqui, diferente do caso do feixe LG, o MAO que este feixe carrega não está igualmente distribuído por seus fótons. Como pode-se entender um feixe MSGT como uma superposição de feixes gaussianos se propagando em diferentes direções, o MAO carregado é

<sup>2</sup>Algo a ser ressaltado é que a família de feixes MSG é uma família de três parâmetros, isto é, cada feixe MSG é univocamente determinado dados os três parâmetros  $\sigma$ ,  $\delta$  e  $R$ . No caso dos MSGT adiciona-se um quarto parâmetro  $u$ , de forma que a família dos MSGT é uma família de quatro parâmetros.

uma média do momento angular desses feixes com relação à direção de propagação do feixe MSGT.

Como dito no artigo de Simon [9], este é um caso no qual é útil e benéfico fazer uso da distribuição de Wigner. Em vista disso, é proveitoso definir-se a distribuição de Wigner de uma dada densidade espectral cruzada:

$$W(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}) = \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^2 \int d^2\Delta\boldsymbol{\rho} \Gamma\left(\boldsymbol{\rho} - \frac{\Delta\boldsymbol{\rho}}{2}, \boldsymbol{\rho} + \frac{\Delta\boldsymbol{\rho}}{2}\right) e^{i\kappa\mathbf{p}\cdot\Delta\boldsymbol{\rho}}. \quad (3.10)$$

onde  $\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2)$  e  $\Delta\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2$ .

Assim como foi feito no capítulo anterior, é factível calcular a MC partindo-se da distribuição de Wigner<sup>3</sup>. Por final temos a MC do MSGT[1]

$$V_{\text{MSGT}} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & -\frac{\sigma^2}{R} & 0 & u\sigma^2 \\ -\frac{\sigma^2}{R} & \frac{1}{\kappa^2}\left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{4\sigma^2}\right) + \frac{\sigma^2}{R^2} + u^2\sigma^2 & -u\sigma^2 & 0 \\ 0 & -u\sigma^2 & \sigma^2 & -\frac{\sigma^2}{R} \\ u\sigma^2 & 0 & -\frac{\sigma^2}{R} & \frac{1}{\kappa^2}\left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{4\sigma^2}\right) + \frac{\sigma^2}{R^2} + u^2\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

sendo esta a matriz igual a do artigo original, Simon e Mukunda optaram por escrever o momento como uma variável adimensional, mais a frente contornaremos esse problema.

Esta matriz nos possibilita visualizar um dos aspectos fundamentais dos feixes MSGT que é a divergência gerada pela fase de torção, isto se apresenta no termo de  $\langle p_{x/y}^2 \rangle \propto u^2\sigma^2$ . Este aspecto foi amplamente explorado no estudo da caracterização de lasers. Porém neste trabalho os termos de  $\langle xp_y \rangle = u\sigma^2$  exercerá uma maior importância devido a este apresentar uma correlação entre as coordenadas duas coordenadas transversais e por este apresentar uma característica de MAO.

Para que a densidade espectral cruzada seja válida é preciso que (3.9) seja uma *função positiva semidefinida* ou *função não-negativa definida*. Devido a esse requerimento, um limite superior para a intensidade do parâmetro de torção pode ser derivado[1, 17]:

$$|u| \leq \frac{1}{\kappa\delta^2}. \quad (3.12)$$

---

<sup>3</sup>Esta conta não está feita aqui, já que este é um resultado encontrado no artigo [1] e revisitado pelo mesmo autor em [17].



Esta equação demonstra um aspecto fundamental da fase de torção, esta não pode existir no caso de um feixe completamente coerente, ou seja, quando o comprimento de coerência transversal vai para infinito ( $\delta \rightarrow \infty$ ).

## 3.2 Conexão entre feixes Laguerre-Gauss e do Modelo Schell-Gaussiano Torcido

Como já foi dito, a fase de torção gera uma rotação e portanto MAO assim. É notório que o feixe LG forma uma base para os feixes coerentes paraxiais e que este é autoestado de MAO, i. e., tem MAO bem definido. Devido a estes fatos a busca por uma relação entre os feixes MSGT e LG torna-se curiosa e evidente. Esta seção busca encontrar tal relação comparando as MC de ambos os feixes, sendo válido lembrar que devido o feixe MSGT ser gaussiano toda a sua informação está contida em sua MC diferentemente do feixe LG.

É evidente que a matriz (2.93) se assemelha em sua estrutura com a matriz (3.11). Buscamos então analisar essa semelhança igualando os termos destas duas matrizes. Para isso ser feito existe a necessidade de arrumar a dimensão da matriz (3.11), pois esta tem  $\mathbf{p}$  adimensional, bastando multiplicar cada termo por  $\kappa$  para cada ordem de  $\mathbf{p}$  contida no mesmo:

$$V_{\text{MSGT}} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & -\frac{\kappa\sigma^2}{R} & 0 & \kappa u\sigma^2 \\ -\frac{\kappa\sigma^2}{R} & \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{4\sigma^2} + \kappa^2 \left( \frac{\sigma^2}{R^2} + u^2\sigma^2 \right) & -\kappa u\sigma^2 & 0 \\ 0 & -\kappa u\sigma^2 & \sigma^2 & -\frac{\kappa\sigma^2}{R} \\ \kappa u\sigma^2 & 0 & -\frac{\kappa\sigma^2}{R} & \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{4\sigma^2} + \kappa^2 \left( \frac{\sigma^2}{R^2} + u^2\sigma^2 \right) \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

Igualando termo a termo de (2.93) com (3.13):

$$\sigma^2 = \frac{w^2}{4}(N+1), \quad (3.14)$$

$$-\frac{\kappa_{\text{MSGT}}\sigma^2}{R_{\text{MSGT}}} = -\frac{\kappa_{\text{LG}}}{R_{\text{LG}}}\frac{w^2}{4}(N+1), \quad (3.15)$$

$$\kappa_{\text{MSGT}}u\sigma^2 = \frac{l}{2}, \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{4\sigma^2} + \kappa_{\text{MSGT}}^2 \left( \frac{\sigma^2}{R_{\text{MSGT}}^2} + u^2\sigma^2 \right) = \frac{\kappa_{\text{LG}}^2}{R_{\text{LG}}^2}\frac{w^2}{4}(N+1) + \frac{1}{w^2}(N+1), \quad (3.17)$$

de forma que chegamos à seguinte relação das variáveis de um feixe MSGT com as de um feixe LG:

$$\sigma^2 = \frac{w^2}{4}(N+1), \quad (3.18)$$

$$\frac{\kappa_{\text{MSGT}}}{R_{\text{MSGT}}} = \frac{\kappa_{\text{LG}}}{R_{\text{LG}}}, \quad (3.19)$$

$$u = \frac{l}{2\kappa_{\text{MSGT}}\sigma^2}, \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{w^2}(N+1) - \kappa_{\text{MSGT}}^2 u^2 \sigma^2 - \frac{1}{4\sigma^2} = \frac{1}{4\sigma^2}[N(N+2) - 4l^2]. \quad (3.21)$$

Sendo assim, o mais natural é definirmos  $\kappa := \kappa_{\text{MSGT}} = \kappa_{\text{LG}}$  e  $R := R_{\text{MSGT}} = R_{\text{LG}}$  para além das equações (3.18), (3.20) e (3.21).

Tendo agora em mãos todas as relações necessárias para que as MC dos dois feixes sejam idênticas. Isto acarreta, como esperado, em uma relação direta entre o parâmetro de torção e o número de MAO (3.20). Além de que, utilizando (3.20) podemos impor que um feixe MSGT tenha MAO médio  $\langle L_z \rangle = \langle xp_y \rangle - \langle yp_x \rangle$  igual a de um feixe LG, porém é impossível fazer com que cada fóton do feixe MSGT carregue MAO, devido a sua estrutura. Em outras palavras, o feixe MSGT não é autoestado de MAO, enquanto o LG sim.

### 3.3 Correlações no Modelo Schell-Gaussiano Torcido para Sistemas Bipartidos

Sistemas bipartidos têm uma conexão direta com feixes óticos, é simples de compreender isto ao pensar em uma simples substituição dos nomes das coordenadas

$$\text{FEIXE ÓTICO } (x, p_x, y, p_y) \Leftrightarrow (x_1, p_1, x_2, p_2) \text{ SISTEMAS BIPARTIDOS.}$$

Este aspecto vai além de uma bela analogia, mas trás a capacidade de duas áreas da física conversarem entre sim. Esta proximidade gera trocas que possibilitam a utilização de efeitos antes desconhecidos de uma área a serem explorados.

Quando nos perguntamos o que é necessário que um sistema para que este seja capaz de executar uma tarefa, estamos basicamente nos questionando sobre qual recurso é necessário para seja possível fazer tal tarefa. É então que surge o debate sobre as correlações e suas origens. Sabemos hoje que sistemas quânticos contêm correlações que são impossíveis de existirem em sistemas clássicos.

O emaranhamento é uma das correlações que são exclusivas da mecânica quântica. Ele é dos temas fundamentais na discussão sobre mecânica quântica, parecendo ser contra intuitivo até mesmo para pesquisadores. Muitos acreditam ser, inclusive, o aspecto mais característico da mecânica quântica e o único sem análogos clássicos. Atualmente já se sabem diversas formas de utilizar emaranhamento como uma ferramenta para realizar tarefas de forma mais efetiva.

#### 3.3.1 Emaranhamento Gaussiano

Quantificar emaranhamento não é algo fácil, pois os únicos casos bem definidos que temos são os casos limites no quais se tem estados maximamente emaranhados, como no caso de estados de Bell, ou minimamente emaranhados, que são os estados separáveis. Porém, para atestar-se a presença de emaranhamento basta verificar que o estado em questão não é separável.

Um critério que atesta se um sistema é ou não separável foi proposto por Peres[18].

Horodecki[19] mostrou que este critério é necessário e suficiente nos casos de  $2 \times 2$  e  $2 \times 3$  dimensões, deixando, porém, de ser suficiente para dimensões superiores. Devido a isto o critério passou-se a ser conhecido por critério de separabilidade de Peres-Horodecki, que também habitual encontrá-lo com o nome de *critério de transposição parcial positiva* (nome oriundo da propriedade de matrizes densidade utilizada em sua demonstração).

Já no caso de variáveis contínuas, o critério de Peres-Horodecki foi demonstrado[20] ser um critério necessário e suficiente para todos os estados gaussianos bipartidos em  $1 \oplus N$  modos<sup>4</sup>. Em seu artigo Simon foi capaz de encontrar uma desigualdade que deve ser satisfeita para a MC de um sistema bipartido, isto é, um critério para os segundos momentos de um sistema bipartido que equivale ao de Peres-Horodecki, sendo uma condição necessária porém não suficiente de separabilidade.

Apresentaremos, agora, o resultado da ref.[20] que utilizaremos. Dada uma MC  $4 \times 4$  por blocos:

$$V = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são matrizes  $2 \times 2$ . A MC de um estado separável deve obedecer:

$$\det A \det B + \left( \frac{1}{4} - |\det C| \right)^2 - \text{tr}(AJCJBJC^T J) \geq \frac{1}{4} (\det A + \det B), \quad (3.23)$$

com  $\text{tr}(\cdot)$  sendo a função traço de uma matriz e  $J$  sendo a matriz  $2 \times 2$  antissimétrica de determinante unitário:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Curiosamente, estados para os quais  $\det C \geq 0$  satisfazem (3.23).

Todavia, como dito no capítulo 2, um estado gaussiano (assim como um feixe gaussiano) tem toda sua informação contida na MC, sendo possível demonstrar que isto torna o critério acima necessário e suficiente para a separabilidade de estados gaussianos bipartidos.

---

<sup>4</sup>Porém este deixa de ser suficiente para  $2 \oplus 2$  [21]. Uma outra condição foi encontrada após, sendo válida para qualquer sistema modos  $m \oplus n$  gaussianos bisimétricos [22, 23, 24, 25]

Utilizando este critério podemos calcular se um sistema bipartido que possua uma MC igual a MC do MSGT(3.11) poderia ter emaranhamento ou não. Igualando (3.22) a (3.11):

$$C = \begin{pmatrix} 0 & u\sigma_x^2 \\ -u\sigma_y^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

e calculando  $\det C$

$$\det C = u^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2 \geq 0, \quad (3.26)$$

como consequência de  $u, \sigma_x, \sigma_y \in \mathbb{R}$ . Chegando assim a conclusão de que um estado bipartido gaussiano com MC igual a (3.11) é **sempre separável**. Vale comentar que, apesar de um feixe LG ter uma MC equivalente a de um feixe MGST, o mesmo não é necessariamente separável, visto que o feixe LG não é um feixe gaussiano e por conseguinte a MC não determina totalmente seu estado.

### 3.3.2 Discórdia Quântica

O resultado anterior poderia levar alguns a acreditar que um sistema bipartido contendo uma MC do MSGT não teria correlações quânticas para realizar tarefas de informação quântica ou computação quântica. Entretanto, estariam cometendo um erro ao resumir correlações quânticas a emaranhamento. Os diversos anos de estudo de computação e informação quântica geraram múltiplos trabalhos os quais mostraram diversas formas de se definir correlações quânticas. Um dos trabalhos que buscou botar um ponto final neste debate, diferenciando correlações clássicas<sup>5</sup> de correlações quânticas foi publicado por Ollivier e Zurek[26]. O artigo em questão apresentou um novo conceito nomeado *Discórdia Quântica* (em inglês *Quantum Discord*).

A grande importância dos estados gaussianos trouxe o estudo da discórdia quântica para estes sistemas. Dois artigos quase simultâneos foram publicados por Giorda e Paris [27] e Adesso e Datta [28] sobre este tema.

---

<sup>5</sup>Em alguns lugares é possível encontrar esta discussão com o termo *classicalidade*.

Calcular o ínfimo existente na discórdia gaussiana é, em geral, complicado. Como nosso objetivo aqui era o de demonstrar que sistemas bipartidos que tenham a mesma MC do MSGT e que a utilização de feixes MSGT na conversão paramétrica descendente (que será estudada no próximo capítulo) são ambos capazes de gerar experimentos úteis em pesquisas de ótica quântica, computação quântica e informação quântica, faz-se suficiente a apresentação do resultado da ref.[28]:

*” Os únicos estados gaussianos de dois modos que têm discórdia quântica gaussiana nula, são os estados produto  $\sigma_{AB} = \alpha \oplus \beta$ , i.e., estados sem nenhuma correlação...”*

O que causa que o caso citado e estudado tenha discórdia quântica gaussiana.

## Capítulo 4

# Conversão Paramétrica Descendente

A conversão paramétrica descendente (CPD) [29] é um processo ótico não linear no qual se incide um campo intenso em um cristal não-linear, este campo intenso é, em geral, um feixe de laser comumente chamado de *feixe de bombeio*. Neste processo o feixe de bombeio interage com o cristal resultando na excitação de dois modos óticos de frequências mais baixas, conhecidos como feixes convertidos, e comumente chamados de sinal e complementar (em inglês, *signal e idler*), que serão indicados pelos índices  $s$  e  $c$  respectivamente.

O estudo da CPD originou-se devido a processos de interação não linear com a matéria no eletromagnetismo clássico, mas se intensificou devido a sua ampla aplicabilidade em informação quântica. Esta se dá principalmente graças à possibilidade de gerar pares de fótons únicos altamente correlacionados, nomeados de *fótons gêmeos*.

Recentemente o tema vem sendo explorado também para feixes de bombeio não coerentes [2, 3, 30, 31], tornando interessante analisar possíveis relações deste processo com o MSGT. Para isto será empregado, neste capítulo, o formalismo de distribuição de Wigner e MC para o caso de fótons gêmeos.

O estado dos modos fotônicos excitados após o cristal (dos fótons gêmeos) pode ser encontrado com algumas aproximações [29]:

- (a) O feixe de bombeio é totalmente coerente em todos os seus graus de liberdade.

- (b) O tempo de interação é grande o suficiente para que  $\text{senc}[(\omega_s + \omega_c)t/2]$  seja significativo apenas quando  $\omega_s + \omega_c = \omega_b$  onde  $\omega_b$  é a frequência do feixe de bombeio e  $\text{senc}$  é a função seno cardinal. Isto pode ser feito utilizando-se um feixe de bombeio com potência moderada, de maneira que o tempo entre duas CPD seja muito grande comparado com o tempo de resolução da detecção.
- (c) O extensão de frequência dos campos convertidos é pequena comparada com as frequências centrais. Isto pode ser feito adicionando um filtro de frequências em frente ao detector.
- (d) O feixe de bombeio propaga na direção  $z$  e o cristal é grande o suficiente nas direções  $x$  e  $y$  para conter todo o perfil transversal do feixe.
- (e) O feixe de bombeio contém apenas polarização extraordinária. Fica implícito, nesta suposição, que estamos lidando com cristais birrefringentes negativos.

Com isto, o estado é dado por [32, 29]

$$|\psi\rangle = |vac\rangle + \sum_{\sigma_s, \sigma_c} \int d\omega_s \int d\omega_c \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}_c \phi_{\sigma_s, \sigma_c}(\mathbf{q}_s, \omega_s; \mathbf{q}_c, \omega_c) |\mathbf{q}_s, \omega_s, \sigma_s\rangle |\mathbf{q}_c, \omega_c, \sigma_c\rangle, \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{q}_s$  e  $\mathbf{q}_c$  são os vetores de onda transversais,  $\omega_s$  e  $\omega_c$  são as frequências dos fótons,  $\sigma_s$  e  $\sigma_c$  são as polarizações dos fótons,  $|vac\rangle$  é o estado do vácuo que leva em conta que os fótons não foram gerados,  $|\mathbf{q}_j, \omega_j, \sigma_j\rangle$  é o estado de um fóton caracterizado por seu vetor de onda transversal  $\mathbf{q}_j$ , sua frequência  $\omega_j$  e sua polarização  $\sigma_j$ . Além disso,  $\phi_{\sigma_s, \sigma_c}$  é a função

$$\phi_{\sigma_s, \sigma_c} \approx C_{\sigma_s, \sigma_c} G_s(\omega_s) G_c(\omega_c) v(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_c, \omega_s + \omega_c) \text{senc}[(k_{sz} + k_{cz} - k_{pz})L/2] \quad (4.2)$$

sendo  $k_{pz}$  a componente na direção  $z$  do vetor de onda do feixe de bombeio,  $\text{senc}$  a função seno cardinal,  $L$  o comprimento do cristal na direção de propagação do feixe (definida como  $z$ ),  $C_{\sigma_s, \sigma_c}$  uma constante que depende do tensor de susceptibilidade não linear,



$G_j(\omega_j)$  é a função espectral definida pelos filtros de frequência colocados após o cristal e  $v^j$  é a função de distribuição do feixe de bombeio. Quando a anisotropia do meio puder ser negligenciada, o termo  $k_{sz} + k_{cz} - k_{pz}$  pode ser escrito como  $\sqrt{|\mathbf{k}_s|^2 - |\mathbf{q}_s|^2} + \sqrt{|\mathbf{k}_c|^2 - |\mathbf{q}_c|^2} - \sqrt{|\mathbf{k}_p|^2 - |\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_c|^2}$ .

Por conveniência iremos usar uma notação para o estado dos fótons com uma dada polarização

$$|\psi, \sigma_s, \sigma_c\rangle = \int d\omega_s \int d\omega_c \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}_c \phi_{\sigma_s, \sigma_c}(\mathbf{q}_s, \omega_s; \mathbf{q}_c, \omega_c) |\mathbf{q}_s, \omega_s\rangle |\mathbf{q}_c, \omega_c\rangle. \quad (4.3)$$

Como foi dito, um dos interesses deste trabalho é o estudo da CPD no caso de feixes de bombeio parcialmente coerentes, portando necessitamos ampliar o resultado acima. Para tal fim, podemos ganhar generalidade supondo que o estado final após uma CPD é uma mistura de estados puros dos fótons gêmeos dados em (4.3), outra forma de compreender esta mistura seria que o feixe de bombeio é uma mistura de feixes coerentes, ou que temos uma mistura de estados de dois fótons produzidos por cristais diferentes. Assim, a nossa abordagem poderá incluir resultados anteriores [?], além de descrever experimentos distintos com geometrias diferentes envolvendo diversos cristais, lasers, etc. Esta matriz densidade de uma CPD extremamente geral, é escrita como

$$\begin{aligned} \rho_{\sigma_s, \sigma_c, \sigma_{s'}, \sigma_{c'}} &= \sum_j c_j |\psi, \sigma_s, \sigma_c\rangle_j \langle \psi, \sigma_{s'}, \sigma_{c'} |_j = \\ &= \sum_j c_j \int d\omega_s \int d\omega_c \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}_c \phi_{\sigma_s, \sigma_c}^j(\mathbf{q}_s, \omega_s; \mathbf{q}_c, \omega_c) |\mathbf{q}_s, \omega_s\rangle |\mathbf{q}_c, \omega_c\rangle \\ &\quad \int d\omega_{s'} \int d\omega_{c'} \int d\mathbf{q}_{s'} \int d\mathbf{q}_{c'} \phi_{\sigma_{s'}, \sigma_{c'}}^{j*}(\mathbf{q}_{s'}, \omega_{s'}; \mathbf{q}_{c'}, \omega_{c'}) \langle \mathbf{q}_{s'}, \omega_{s'} | \langle \mathbf{q}_{c'}, \omega_{c'} |, \end{aligned} \quad (4.4)$$

aqui estamos, na verdade, tratando de um elemento de polarização da matriz densidade, ou seja  $\rho_{\sigma_s, \sigma_c, \sigma_{s'}, \sigma_{c'}} = \langle \sigma_s, \sigma_c | \rho | \sigma_{s'}, \sigma_{c'} \rangle$ . Aqui também deixamos implícito que cada  $\sigma$  pode depender de  $j$ , já que cada feixe coerente do feixe misto de entrada pode ter uma polarização diferente.

Nos trabalhos [2, 3] os autores consideram feixes parcialmente coerentes, e obtêm a função de correlação cruzada dos dois fótons. Aqui optamos por fazer algo mais geral,

pois notamos que a incoerência poderia vir através de um laser parcialmente incoerente incidente num único cristal, ou através de um laser coerente incidente em vários cristais, onde os pares de fótons são misturados incoerentemente.

## 4.1 Distribuição de Wigner na Conversão Paramétrica Descendente

Aqui iniciaremos um tratamento dos fótons gêmeos com a distribuição de Wigner, este estudo já se mostrou útil em alguns trabalhos recentes.

Conhecemos a distribuição de Wigner para uma matriz densidade (2.33), porém como teremos duas partículas cada uma com suas coordenadas

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \mathbf{r}', \mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \left\langle \mathbf{k} + \frac{\mathbf{k}_1}{2} \left| \left\langle \mathbf{k}' + \frac{\mathbf{k}_2}{2} \right| \rho \left| \mathbf{k} - \frac{\mathbf{k}_1}{2} \right\rangle \right| \mathbf{k}' - \frac{\mathbf{k}_2}{2} \right\rangle e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}_1} e^{i\mathbf{r}' \cdot \mathbf{k}_2}, \quad (4.5)$$

aqui utilizamos  $\mathbf{k}$  no local de  $\mathbf{p}$  para facilitar nosso tratamento, lembrando que  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ . Em nossa notação, no local do trivetor  $\mathbf{k}$  usaremos o bivector transversal  $\mathbf{q}$  e a frequência  $\omega$ , com a qual é possível calcular o número de onda na direção de propagação  $k_z$ .

Assim a distribuição de Wigner dos fótons após o cristal é

$$\begin{aligned} W_{\sigma_s, \sigma_c, \sigma_{s'}, \sigma_{c'}}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \omega; \mathbf{r}', \mathbf{q}', \omega') &= \sum_j \frac{c_j}{(2\pi)^6} \int d\omega_1 \int d\mathbf{q}_1 \int d\omega_2 \int d\mathbf{q}_2 \int d\omega_s \int d\omega_c \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}_c \\ &\int d\omega_{s'} \int d\omega_{c'} \int d\mathbf{q}_{s'} \int d\mathbf{q}_{c'} e^{i\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{q}_1} e^{i\mathbf{r}'_T \cdot \mathbf{q}_2} e^{i\mathbf{r}_z \omega_1} e^{i\mathbf{r}'_z \omega_2} \\ &\phi_{\sigma_s, \sigma_c}^j(\mathbf{q}_s, \omega_s; \mathbf{q}_c, \omega_c) \phi_{\sigma_{s'}, \sigma_{c'}}^{j*}(\mathbf{q}_{s'}, \omega_{s'}; \mathbf{q}_{c'}, \omega_{c'}) \\ &\left\langle \mathbf{q} + \frac{\mathbf{q}_1}{2}, \omega + \frac{\omega_1}{2} \left| \left\langle \mathbf{q}' + \frac{\mathbf{q}_2}{2}, \omega' + \frac{\omega_2}{2} \right| \rho_{\sigma_s, \omega_s} \right| \mathbf{q}_c, \omega_c \right\rangle \\ &\left\langle \mathbf{q}_{s'}, \omega_{s'} \left| \left\langle \mathbf{q}_{c'}, \omega_{c'} \right| \rho_{\sigma_{s'}, \omega_{s'}} \left| \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}_1}{2}, \omega - \frac{\omega_1}{2} \right\rangle \right| \mathbf{q}' - \frac{\mathbf{q}_2}{2}, \omega' - \frac{\omega_2}{2} \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.6)$$

como estamos na aproximação paraxial, visto que tratam-se de feixes, podemos escrever  $|\mathbf{k}| = \omega/c \approx k_z$ , para simplificar as contas fazemos  $c = 1$ , o que não resultará em nenhuma alteração no resultado final, já que este não aparecerá.

Nesta equação os fótons têm as coordenadas no espaço de fase como sendo  $(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \omega)$  para o fóton sinal e  $(\mathbf{r}', \mathbf{q}', \omega')$  para o fóton complementar, também separamos a coordenada do espaço real em coordenadas transversais  $\mathbf{r}_T$  e a coordenada da direção de propagação  $r_z$ , de modo que o vetor fica  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_T, r_z)$ . Simplificando nossa notação, deixaremos implícita a dependência da distribuição de Wigner com cada uma das polarizações  $\sigma_s, \sigma_c, \sigma_{s'}, \sigma_{c'}$  e com as coordenadas no espaço de fase dos fótons  $\mathbf{r}, \mathbf{q}, \omega, \mathbf{r}', \mathbf{q}', \omega'$  fazendo

$$W_\sigma := W_{\sigma_s, \sigma_c, \sigma_{s'}, \sigma_{c'}}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \omega; \mathbf{r}', \mathbf{q}', \omega'). \quad (4.7)$$

Conhecemos o produto interno

$$\langle \mathbf{q}, \omega | \mathbf{q}_j, \omega_j \rangle = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_j) \delta(\omega - \omega_j), \quad (4.8)$$

consequentemente os produtos internos da eq.(4.6) conjuntamente com as integrais geram as seguintes mudanças:

$$\mathbf{q}_s \rightarrow \mathbf{q} + \frac{\mathbf{q}_1}{2} \quad ; \quad \omega_s \rightarrow \omega + \frac{\omega_1}{2}; \quad (4.9)$$

$$\mathbf{q}_c \rightarrow \mathbf{q}' + \frac{\mathbf{q}_2}{2} \quad ; \quad \omega_c \rightarrow \omega' + \frac{\omega_2}{2}; \quad (4.10)$$

$$\mathbf{q}_{s'} \rightarrow \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}_1}{2} \quad ; \quad \omega_{s'} \rightarrow \omega - \frac{\omega_1}{2}; \quad (4.11)$$

$$\mathbf{q}_{c'} \rightarrow \mathbf{q}' - \frac{\mathbf{q}_2}{2} \quad ; \quad \omega_{c'} \rightarrow \omega' - \frac{\omega_2}{2}; \quad (4.12)$$

resultando em

$$\begin{aligned} W_\sigma = \sum_j \frac{c_j}{(2\pi)^6} \int d\omega_1 \int d\mathbf{q}_1 \int d\omega_2 \int d\mathbf{q}_2 e^{i\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{q}_1} e^{i\mathbf{r}'_T \cdot \mathbf{q}_2} e^{ir_z \omega_1} e^{ir'_z \omega_2} \\ \phi_{\sigma_s, \sigma_c}^j(\mathbf{q} + \frac{\mathbf{q}_1}{2}, \omega + \frac{\omega_1}{2}; \mathbf{q}' + \frac{\mathbf{q}_2}{2}, \omega' + \frac{\omega_2}{2}) \\ \phi_{\sigma_{s'}, \sigma_{c'}}^{j*}(\mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}_1}{2}, \omega - \frac{\omega_1}{2}; \mathbf{q}' - \frac{\mathbf{q}_2}{2}, \omega' - \frac{\omega_2}{2}), \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde aqui  $\phi^j$  requer algumas alterações na eq.(4.2) devido à dependência em  $j$ :

- $C_{\sigma_s, \sigma_c} \rightarrow C_{\sigma_s, \sigma_c}^j$  já que  $C_{\sigma_s, \sigma_c}$  depende do tensor de susceptibilidade não linear e agora podemos ter um cristal diferente para cada  $j$ .

- $G_n(\omega_n) \rightarrow G_n^j(\omega_n)$  supondo que para cada cristal pode-se adicionar um diferente filtro de frequência.
- $v(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_c, \omega_s + \omega_c) \rightarrow v^j(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_c, \omega_s + \omega_c)$  leva em conta que podemos ter múltiplos feixes de bombeio cada um com um diferente perfil.
- $k_{pz} \rightarrow k_{pz}^j$  devido a termos diferentes feixes de bombeio e diferentes cristais, em geral os vetores de onda serão diferentes. Além disto, diferentes cristais poderem afetar de formas distintas a discrepância do vetor de onda  $k_{sz} + k_{iz} - k_{pz}^j$ .
- $L \rightarrow L^j$  pois cada cristal poderá ter um comprimento diferente.

Até aqui foi usada a notação

$$k_{sz} = |\mathbf{k}(\mathbf{q}_s, \omega_s) \cdot \hat{z}|. \quad (4.14)$$

Porém, é necessária uma mudança devido às eqs.(4.9)-(4.12)

$$k_{sz} := |\mathbf{k}(\mathbf{q} + \frac{\mathbf{q}_1}{2}, \omega + \frac{\omega_1}{2}) \cdot \hat{z}|, \quad (4.15)$$

$$k_{cz} := |\mathbf{k}(\mathbf{q}' + \frac{\mathbf{q}_2}{2}, \omega' + \frac{\omega_2}{2}) \cdot \hat{z}|, \quad (4.16)$$

$$k'_{sz} := |\mathbf{k}(\mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}_1}{2}, \omega - \frac{\omega_1}{2}) \cdot \hat{z}|, \quad (4.17)$$

$$k'_{cz} := |\mathbf{k}(\mathbf{q}' - \frac{\mathbf{q}_2}{2}, \omega' - \frac{\omega_2}{2}) \cdot \hat{z}|. \quad (4.18)$$

Retornando a (4.6) ficamos com

$$\begin{aligned}
W_\sigma &= \sum_j \frac{c_j}{(2\pi)^6} \int d\omega_1 \int d\mathbf{q}_1 \int d\omega_2 \int d\mathbf{q}_2 e^{i\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{q}_1} e^{i\mathbf{r}'_T \cdot \mathbf{q}_2} e^{i\mathbf{r}_z \omega_1} e^{i\mathbf{r}'_z \omega_2} \\
&\quad C_{\sigma_s, \sigma_c}^j G_s^j(\omega + \frac{\omega_1}{2}) G_c^j(\omega' + \frac{\omega_2}{2}) v^j(\mathbf{q} + \frac{\mathbf{q}_1}{2} + \mathbf{q}' + \frac{\mathbf{q}_2}{2}, \omega + \frac{\omega_1}{2} + \omega' + \frac{\omega_2}{2}) \\
&\quad C_{\sigma_{s'}, \sigma_{c'}}^{j*} G_{s'}^{j*}(\omega - \frac{\omega_1}{2}) G_{c'}^{j*}(\omega' - \frac{\omega_2}{2}) v^{j*}(\mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}_1}{2} + \mathbf{q}' - \frac{\mathbf{q}_2}{2}, \omega - \frac{\omega_1}{2} + \omega' - \frac{\omega_2}{2}) \\
&\quad \text{senc}[(k_{sz} + k_{iz} - k_{pz}^j)L^j/2] \text{senc}[(k'_{sz} + k'_{iz} - k_{pz}^j)L^j/2]. \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Podemos agora fazer uma mudança de variáveis da seguinte forma

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_1 \pm \omega_2}{2}, \quad (4.20)$$

$$\Omega_{\pm} = \omega \pm \omega', \quad (4.21)$$

$$\mathbf{q}_{\pm} = \frac{\mathbf{q}_1 \pm \mathbf{q}_2}{2}, \quad (4.22)$$

$$\mathbf{Q}_{\pm} = \mathbf{q} \pm \mathbf{q}'. \quad (4.23)$$

Ao aplicarmos essas mudanças

$$\begin{aligned} W_{\sigma} = & \sum_j \frac{2^6 c_j}{(2\pi)^6} C_{\sigma_s, \sigma_c}^j C_{\sigma_{s'}, \sigma_{c'}}^{j*} \int d\omega_+ \int d\mathbf{q}_+ \int d\omega_- \int d\mathbf{q}_- \\ & G_s^j(\Omega_+ + \Omega_- + \omega_+ + \omega_-) G_c^j(\Omega_+ - \Omega_- + \omega_+ - \omega_-) \\ & G_{s'}^{j*}(\Omega_+ + \Omega_- - \omega_+ - \omega_-) G_{c'}^{j*}(\Omega_+ - \Omega_- - \omega_+ + \omega_-) \\ & v^j(\mathbf{Q}_+ + \mathbf{q}_+, \Omega_+ + \omega_+) v^{j*}(\mathbf{Q}_+ - \mathbf{q}_+, \Omega_+ - \omega_+) \\ & \text{senc}[(k_{sz} + k_{iz} - k_{pz}^j)L^j/2] \text{senc}[(k'_{sz} + k'_{iz} - k_{pz}^{j'})L^j/2] \\ & e^{i\mathbf{r}_T \cdot (\mathbf{q}_+ + \mathbf{q}_-)} e^{i\mathbf{r}'_T \cdot (\mathbf{q}_+ - \mathbf{q}_-)} e^{ir_z(\omega_+ + \omega_-)} e^{ir'_z(\omega_+ - \omega_-)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde redefinimos a função  $G$  da seguinte forma  $G(A) := G(\frac{A}{2})$ . Agora aplicamos mais uma mudança de variáveis

$$\mathbf{r}_{T\pm} = \frac{\mathbf{r}_T \pm \mathbf{r}'_T}{2} \quad (4.25)$$

$$r_{z\pm} = \frac{r_z \pm r'_z}{2} \quad (4.26)$$

Com isso chegamos à distribuição de Wigner para as variáveis de soma e de subtração

das coordenadas dos fótons

$$\begin{aligned}
W_\sigma(\mathbf{r}_+, \mathbf{Q}_+, \Omega_+, \mathbf{r}_-, \mathbf{Q}_-, \Omega_-) &= \sum_j \frac{c_j}{\pi^6} C_{\sigma_s, \sigma_c}^{j*} C_{\sigma_s, \sigma_c}^j \int d\omega_+ \int d\omega_- \int d\mathbf{q}_+ \int d\mathbf{q}_- \\
&G_s^j(\Omega_+ + \Omega_- + \omega_+ + \omega_-) G_c^j(\Omega_+ - \Omega_- + \omega_+ - \omega_-) \\
&G_{s'}^{j*}(\Omega_+ + \Omega_- - \omega_+ - \omega_-) G_{c'}^{j*}(\Omega_+ - \Omega_- - \omega_+ + \omega_-) \\
&\text{senc}[(k_{sz} + k_{iz} - k_{pz}^j)L^j/2] \text{senc}[(k'_{sz} + k'_{iz} - k'_{pz}^j)L^j/2] \\
&v^j(\mathbf{Q}_+ + \mathbf{q}_+, \Omega_+ + \omega_+) v^{j*}(\mathbf{Q}_+ - \mathbf{q}_+, \Omega_+ - \omega_+) \\
&e^{ir_{z+}\omega_+} e^{ir_{z-}\omega_-} e^{i2\mathbf{r}_{T+}\cdot\mathbf{q}_+} e^{i2\mathbf{r}_{T-}\cdot\mathbf{q}_-}, \tag{4.27}
\end{aligned}$$

As variáveis  $\mathbf{r}_+, \mathbf{Q}_+, \Omega_+, \mathbf{r}_-, \mathbf{Q}_-, \Omega_-$  podem ser compreendidas, em uma analogia com a mecânica clássica, como coordenadas de centro de massa, no caso das variáveis soma, e coordenadas relativas, no caso das variáveis subtração. Olhar para a distribuição de Wigner dos fótons reescrita desta forma traz uma interpretação importante, é possível notar que as coordenadas transversais do "centro de massa" só afetam a distribuição através da função  $v^j$  do feixe de bombeio, já as coordenadas transversais relativas afetam a distribuição unicamente através da discrepância do vetor de onda  $k_{sz} + k_{iz} - k_{pz}^j$ , sendo esta, por sua vez, conectada com a configuração e estrutura do cristal.

Este resultado se mostra interessante, pois torna ainda mais claro como a distribuição final e as correlações dos fótons gêmeos podem ser olhadas separadamente nas coordenadas transversais do centro de massa e relativas. Separando desta maneira nos tornamos capazes de fazer um melhor estudo de como possíveis feixes de bombeio e possíveis cristais afetam a CPD e principalmente a correlação entre os fótons.

## 4.2 Aproximações

A equação (4.27) acima foi obtida usando-se algumas poucas aproximações. No entanto, ela é bastante geral e complicada para que se extraia algo mais dela. No estudo da CPD existem diversas aproximações que podem ser aplicadas, algumas delas extre-

mamente válidas para grande parte dos experimentos feitos com CPD, elas também nos ajudam a obter equações mais reveladoras da física do problema.

Uma próxima aplicação é ignorar a anisotropia devida à birrefringência do cristal. Esta aproximação requer, então, que o cristal seja bastante fino na direção longitudinal (alguns poucos milímetros). Como já havíamos dito, esta aproximação nos permite escrever a discrepância do vetor de onda como sendo

$$\sqrt{|\mathbf{k}_s|^2 - |\mathbf{q}_s|^2} + \sqrt{|\mathbf{k}_c|^2 - |\mathbf{q}_c|^2} - \sqrt{|\mathbf{k}_p|^2 - |\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_c|^2}. \quad (4.28)$$

Descreveremos outras aproximações a seguir em mais detalhe.

### 4.2.1 Aproximação Paraxial

Para simplificar, iremos definir a função de discrepância do vetor de onda

$$\Delta^j := \Delta(\mathbf{q}_s, \omega_s; \mathbf{q}_c, \omega_c; \mathbf{k}_p^j) = k_{sz} + k_{cz} - k_{pz}^j \quad (4.29)$$

Uma das possíveis aproximações de serem aplicadas a CPD é a aproximação de Fresnel, que é uma aplicação particular da aproximação paraxial. Supondo que um feixe monocromático está se propagando na direção  $z$  em um meio isotrópico, o vetor de onda na direção  $z$  pode ser escrito como

$$k_z = \sqrt{k^2 - q^2} \approx k_z \left( 1 - \frac{q^2}{2k^2} \right). \quad (4.30)$$

A aproximação acima é conhecida como a aproximação de Fresnel, esta pode ser obtida com uma expansão em série de Taylor quando  $q^2 \ll k^2$ . É possível perceber que a equação acima respeita a aproximação paraxial caso se tente desenhar raios no espaço recíproco (espaço de  $\mathbf{k}$ ) respeitando a equação (4.30), pois isto implicaria em desenhar raios paraxiais. Além disso, a única aproximação utilizada em (4.30) foi que  $q^2 \ll k^2$ , isto quer dizer que os vetores de onda transversais são muito menores que o vetor de onda total, implicando em uma pequena divergência do raio e respeitando a estrutura de raios paraxiais.

Aplicando a aproximação de Fresnel para cada um dos feixes (feixe de bombeio, feixe sinal e feixe complementar) em nossa função discrepância do vetor de onda (4.29) ficamos com

$$\Delta^j = k_{sz} + k_{iz} - k_{pz}^j \approx |\mathbf{k}_s| \left(1 - \frac{\mathbf{q}_s^2}{2\mathbf{k}_s^2}\right) + |\mathbf{k}_c| \left(1 - \frac{\mathbf{q}_c^2}{2\mathbf{k}_c^2}\right) - |\mathbf{k}_p^j| \left(1 - \frac{(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_c)^2}{2\mathbf{k}_s^2}\right) \quad (4.31)$$

$$= -\frac{1}{2|\mathbf{k}_p^j|} \left[ \sqrt{\frac{|\mathbf{k}_c|}{|\mathbf{k}_s|}} \mathbf{q}_s - \sqrt{\frac{|\mathbf{k}_s|}{|\mathbf{k}_c|}} \mathbf{q}_c \right]^2 \quad (4.32)$$

nominamos  $\gamma_s = \sqrt{\frac{|\mathbf{k}_c|}{|\mathbf{k}_s|}}$  e  $\gamma_c := \sqrt{\frac{|\mathbf{k}_s|}{|\mathbf{k}_c|}}$  apenas para simplificação. Isto resulta em nosso caso, lembrando das eqs (4.9)-(4.12) e (4.20)-(4.23)

$$\begin{aligned} \Delta^j &\approx -\frac{1}{2|\mathbf{k}_p^j|} [\gamma_s \mathbf{q}_s - \gamma_c \mathbf{q}_c]^2 = -\frac{1}{2|\mathbf{k}_p^j|} \left[ \gamma_s \left( \mathbf{q} + \frac{\mathbf{q}_1}{2} \right) - \gamma_c \left( \mathbf{q}' + \frac{\mathbf{q}_2}{2} \right) \right]^2 \\ &= -\frac{1}{2|\mathbf{k}_p^j|} \left[ \frac{\gamma_s}{2} (\mathbf{Q}_+ + \mathbf{Q}_- + \mathbf{q}_+ + \mathbf{q}_-) - \frac{\gamma_c}{2} (\mathbf{Q}_+ - \mathbf{Q}_- + \mathbf{q}_+ - \mathbf{q}_-) \right]^2 \\ &= -\frac{1}{8|\mathbf{k}_p^j|} [(\gamma_s + \gamma_c)(\mathbf{Q}_- + \mathbf{q}_-) + (\gamma_s - \gamma_c)(\mathbf{Q}_+ + \mathbf{q}_+)]^2 \end{aligned} \quad (4.33)$$

vamos desmembrar os valores de  $\gamma_s$  e  $\gamma_c$  em nosso caso. Como não estamos levando em conta os diferentes índices de refração, logo

$$\gamma_s = \gamma_c^{-1} = \sqrt{\frac{|\mathbf{k}_c|}{|\mathbf{k}_s|}} = \sqrt{\frac{\omega_c}{\omega_s}} = \sqrt{\frac{\omega' + \frac{\omega_2}{2}}{\omega + \frac{\omega_1}{2}}} = \sqrt{\frac{\Omega_+ - \Omega_- + \omega_+ - \omega_-}{\Omega_+ + \Omega_- + \omega_+ + \omega_-}}, \quad (4.34)$$

$$\gamma_{s'} = \gamma_{c'}^{-1} = \sqrt{\frac{|\mathbf{k}_{c'}|}{|\mathbf{k}_{s'}|}} = \sqrt{\frac{\omega_{c'}}{\omega_{s'}}} = \sqrt{\frac{\omega' - \frac{\omega_2}{2}}{\omega - \frac{\omega_1}{2}}} = \sqrt{\frac{\Omega_+ - \Omega_- - \omega_+ + \omega_-}{\Omega_+ + \Omega_- - \omega_+ - \omega_-}}. \quad (4.35)$$

É importante notar que em (4.33) temos que  $\Delta^j = \Delta(\mathbf{Q}_+, \mathbf{Q}_-, \mathbf{q}_+, \mathbf{q}_-; \mathbf{k}_p^j)$  e também que graças a (4.9)-(4.12) temos a seguinte propriedade

$$\Delta'^j := k'_{sz} + k'_{iz} - k'_{pz} = \Delta(\mathbf{q}_{s'}, \omega_{s'}; \mathbf{q}_{c'}, \omega_{c'}; \mathbf{k}_p^j) = \Delta(\mathbf{Q}_+, \mathbf{Q}_-, -\mathbf{q}_+, -\mathbf{q}_-; \mathbf{k}_p^j) \quad (4.36)$$



Agora podemos voltar com (4.33) em (4.27)

$$\begin{aligned}
W_\sigma &= \sum_j \frac{c_j}{\pi^6} C_{\sigma_{s'}, \sigma_{c'}}^{j*} C_{\sigma_s, \sigma_c}^j \int d\omega_+ \int d\omega_- \int d\mathbf{q}_+ \int d\mathbf{q}_- \\
&G_s^j(\Omega_+ + \Omega_- + \omega_+ + \omega_-) G_c^j(\Omega_+ - \Omega_- + \omega_+ - \omega_-) \\
&G_{s'}^{j*}(\Omega_+ + \Omega_- - \omega_+ - \omega_-) G_{c'}^{j*}(\Omega_+ - \Omega_- - \omega_+ + \omega_-) \\
&\text{senc} \left[ \left( -\frac{1}{8|\mathbf{k}_p^j|} [(\gamma_s + \gamma_c)(\mathbf{Q}_- + \mathbf{q}_-) + (\gamma_s - \gamma_c)(\mathbf{Q}_+ + \mathbf{q}_+)]^2 \right) L^j/2 \right] \\
&\text{senc} \left[ \left( -\frac{1}{8|\mathbf{k}_p^{j'}|} [(\gamma_{s'} + \gamma_{c'})(\mathbf{Q}_- - \mathbf{q}_-) + (\gamma_{s'} - \gamma_{c'})(\mathbf{Q}_+ - \mathbf{q}_+)]^2 \right) L^j/2 \right] \\
&v^j(\mathbf{Q}_+ + \mathbf{q}_+, \Omega_+ + \omega_+) v^{j*}(\mathbf{Q}_+ - \mathbf{q}_+, \Omega_+ - \omega_+) \\
&e^{ir_z + \omega_+} e^{ir_z - \omega_-} e^{i2\mathbf{r}_{T+} \cdot \mathbf{q}_+} e^{i2\mathbf{r}_{T-} \cdot \mathbf{q}_-}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Esta equação realça o fato já discutido das características dos fótons poderem ser separadas entre as coordenadas do "centro de massa" e as coordenadas relativas. Com o intuito de explicitar melhor isto, é possível estabelecer

$$g_{s,c}^j(\Omega_+ + \omega_+; \Omega_- + \omega_-) := G_s^j(\Omega_+ + \omega_+ + \Omega_- + \omega_-) G_c^j(\Omega_+ + \omega_+ - (\Omega_- + \omega_-)), \tag{4.38}$$

$$g_{s',c'}^{j*}(\Omega_+ - \omega_+; \Omega_- - \omega_-) := G_{s'}^{j*}(\Omega_+ - \omega_+ + \Omega_- - \omega_-) G_{c'}^{j*}(\Omega_+ - \omega_+ - (\Omega_- - \omega_-)), \tag{4.39}$$

algo parecido aparece para (4.34) e (4.35). Devido a isto alteramos a eq.(4.37) para

$$\begin{aligned}
W_\sigma &= \sum_j \frac{c_j}{\pi^6} C_{\sigma_{s'}, \sigma_{c'}}^{j*} C_{\sigma_s, \sigma_c}^j \int d\omega_+ \int d\omega_- \int d\mathbf{q}_+ \int d\mathbf{q}_- \\
&g_{s,c}^j(\Omega_+ + \omega_+; \Omega_- + \omega_-) g_{s',c'}^{j*}(\Omega_+ - \omega_+; \Omega_- - \omega_-) \\
&\text{senc} \left[ \left( -\frac{1}{8|\mathbf{k}_p^j|} [(\gamma_s + \gamma_c)(\mathbf{Q}_- + \mathbf{q}_-) + (\gamma_s - \gamma_c)(\mathbf{Q}_+ + \mathbf{q}_+)]^2 \right) L^j/2 \right] \\
&\text{senc} \left[ \left( -\frac{1}{8|\mathbf{k}_p^{j'}|} [(\gamma_{s'} + \gamma_{c'})(\mathbf{Q}_- - \mathbf{q}_-) + (\gamma_{s'} - \gamma_{c'})(\mathbf{Q}_+ - \mathbf{q}_+)]^2 \right) L^j/2 \right] \\
&v^j(\mathbf{Q}_+ + \mathbf{q}_+, \Omega_+ + \omega_+) v^{j*}(\mathbf{Q}_+ - \mathbf{q}_+, \Omega_+ - \omega_+) \\
&e^{ir_z + \omega_+} e^{ir_z - \omega_-} e^{i2\mathbf{r}_{T+} \cdot \mathbf{q}_+} e^{i2\mathbf{r}_{T-} \cdot \mathbf{q}_-} .
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Com esta equação chegamos perto de poder escrever a função de dentro das integrais como  $f(\mathbf{Q}_+ + \mathbf{q}_+; \mathbf{Q}_- + \mathbf{q}_-; \Omega_+ + \omega_+; \Omega_- + \omega_-) f^*(\mathbf{Q}_+ + \mathbf{q}_+; \mathbf{Q}_- + \mathbf{q}_-; \Omega_+ + \omega_+; \Omega_- + \omega_-)$ , que seria proveitoso devido a isto resultar na distribuição de Wigner da suposta função  $f$ . Porém os índices  $s, c, s', c'$  nos impedem de fazer isso já que seria necessário que  $s = s'$  e  $c = c'$ , para que esta afirmação seja válida é preciso que, lembrando de (4.1) onde foram definidos esses índices, os fótons gêmeos só tenham uma polarização possível.

Podemos fazer com que nossos filtros sejam extremamente centrados em uma frequência de forma que a delta de Dirac seja uma boa aproximação. Lembrando que definimos  $G(A) := G(\frac{A}{2})$ , temos

$$G_s^j(\Omega_+ + \Omega_- + \omega_+ + \omega_-) = \delta\left(\frac{\Omega_+ + \Omega_- + \omega_+ + \omega_-}{2} - \Omega_s^j\right), \quad (4.41)$$

$$G_c^j(\Omega_+ - \Omega_- + \omega_+ - \omega_-) = \delta\left(\frac{\Omega_+ - \Omega_- + \omega_+ - \omega_-}{2} - \Omega_c^j\right), \quad (4.42)$$

$$G_{s'}^{j*}(\Omega_+ + \Omega_- - \omega_+ - \omega_-) = \delta\left(\frac{\Omega_+ + \Omega_- - \omega_+ - \omega_-}{2} - \Omega_{s'}^j\right), \quad (4.43)$$

$$G_{c'}^{j*}(\Omega_+ - \Omega_- - \omega_+ + \omega_-) = \delta\left(\frac{\Omega_+ - \Omega_- - \omega_+ + \omega_-}{2} - \Omega_{c'}^j\right), \quad (4.44)$$

onde  $\Omega_s^j, \Omega_c^j, \Omega_{s'}^j$  e  $\Omega_{c'}^j$  são as frequências centrais de  $G_s^j, G_c^j, G_{s'}^j$  e  $G_{c'}^j$ , respectivamente. Adicionar estes filtros é equivalente a supor que estamos tratando do caso monocromático onde tanto o feixe de bombeio quanto os feixes sinal e complementar têm frequências bem definidas. Com estas deltas é possível integrarmos nas variáveis  $\omega_+$  e  $\omega_-$  chegando, ao final, as substituições

$$\omega_+ \rightarrow \Omega_s^j + \Omega_c^j - \Omega_+, \quad (4.45)$$

$$\omega_- \rightarrow \Omega_s^j - \Omega_c^j - \Omega_-, \quad (4.46)$$

que mantêm duas das deltas com os novos argumentos

$$G_{s'}^{j*}(\Omega_+ + \Omega_- - \omega_+ - \omega_-) = \delta\left((\Omega_+ + \Omega_-) - (\Omega_s^j + \Omega_{s'}^j)\right), \quad (4.47)$$

$$G_{c'}^{j*}(\Omega_+ - \Omega_- - \omega_+ + \omega_-) = \delta\left((\Omega_+ - \Omega_-) - (\Omega_c^j + \Omega_{c'}^j)\right). \quad (4.48)$$

Vale então notar que devido a estas deltas de Dirac, não ganhamos nenhuma interpretação de física a mais mantendo a distribuição de frequências no espaço de fases. Em razão disso, integraremos em todo o espaço de fase de frequência  $\Omega_+$  e  $\Omega_-$

$$\begin{aligned}
W_\sigma &:= \int d\Omega_+ d\Omega_- W_\sigma(\mathbf{r}_+, \mathbf{Q}_+, \Omega_+, \mathbf{r}_-, \mathbf{Q}_-, \Omega_-) = \\
&= \sum_j \frac{c_j}{\pi^6} C_{\sigma_{s'}, \sigma_{c'}}^{j*} C_{\sigma_s, \sigma_c}^j \int d\mathbf{q}_+ \int d\mathbf{q}_- e^{i2\mathbf{r}_{T+} \cdot \mathbf{q}_+} e^{i2\mathbf{r}_{T-} \cdot \mathbf{q}_-} \\
&\text{senc} \left[ \left( -\frac{1}{8|\mathbf{k}_p^j|} [(\gamma_s + \gamma_c)(\mathbf{Q}_- + \mathbf{q}_-) + (\gamma_s - \gamma_c)(\mathbf{Q}_+ + \mathbf{q}_+)]^2 \right) L^j/2 \right] \\
&\text{senc} \left[ \left( -\frac{1}{8|\mathbf{k}'_p^j|} [(\gamma_{s'} + \gamma_{c'})(\mathbf{Q}_- - \mathbf{q}_-) + (\gamma_{s'} - \gamma_{c'})(\mathbf{Q}_+ - \mathbf{q}_+)]^2 \right) L^j/2 \right] \\
&v^j(\mathbf{Q}_+ + \mathbf{q}_+, \Omega_s^j + \Omega_c^j) v^{j*}(\mathbf{Q}_+ - \mathbf{q}_+, \Omega_{s'}^j + \Omega_{c'}^j) \\
&\exp \left[ \frac{i r_{z+}}{2} (\Omega_s^j + \Omega_c^j - \Omega_{s'}^j - \Omega_{c'}^j) \right] \exp \left[ \frac{i r_{z-}}{2} (\Omega_s^j - \Omega_c^j - \Omega_{s'}^j + \Omega_{c'}^j) \right] \quad (4.49)
\end{aligned}$$

Como consequência reescrevemos os valores de (4.34) e (4.35) como sendo

$$\gamma_s = \gamma_c^{-1} = \sqrt{\frac{\Omega_c^j}{\Omega_s^j}}, \quad (4.50)$$

$$\gamma_{s'} = \gamma_{c'}^{-1} = \sqrt{\frac{\Omega_{c'}^j}{\Omega_{s'}^j}}. \quad (4.51)$$

Retornando com essas substituições na eq.(4.37), encontramos

$$\begin{aligned}
W_\sigma &= \sum_j \frac{c_j}{(\pi\hbar)^4} C_{\sigma_{s'}, \sigma_{c'}}^{j*} C_{\sigma_s, \sigma_c}^j \int d\mathbf{q}_+ \int d\mathbf{q}_- e^{i2\mathbf{r}_{T+} \cdot \mathbf{q}_+} e^{i2\mathbf{r}_{T-} \cdot \mathbf{q}_-} \\
&\text{senc} \left[ \left( -\frac{1}{8|\mathbf{k}_p^j|} [(\gamma_s + \gamma_c)(\mathbf{Q}_- + \mathbf{q}_-) + (\gamma_s - \gamma_c)(\mathbf{Q}_+ + \mathbf{q}_+)]^2 \right) L^j/2 \right] \\
&\text{senc} \left[ \left( -\frac{1}{8|\mathbf{k}'_p^j|} [(\gamma_{s'} + \gamma_{c'})(\mathbf{Q}_- - \mathbf{q}_-) + (\gamma_{s'} - \gamma_{c'})(\mathbf{Q}_+ - \mathbf{q}_+)]^2 \right) L^j/2 \right] \\
&v^j(\mathbf{Q}_+ + \mathbf{q}_+, \Omega_s^j + \Omega_c^j) v^{j*}(\mathbf{Q}_+ - \mathbf{q}_+, \Omega_{s'}^j + \Omega_{c'}^j). \quad (4.52)
\end{aligned}$$

No caso em que o fóton sinal tiver apenas uma polarização e o fóton complementar também

podemos substituir  $s'$  por  $s$  e  $c'$  por  $c$ .

$$\begin{aligned}
W_\sigma &= \sum_j \frac{c_j}{\pi^6} C_{\sigma_s, \sigma_c}^{j*} C_{\sigma_s, \sigma_c}^j \int d\mathbf{q}_+ \int d\mathbf{q}_- e^{i2\mathbf{r}_{T+} \cdot \mathbf{q}_+} e^{i2\mathbf{r}_{T-} \cdot \mathbf{q}_-} \\
&\quad \text{senc} \left[ \left( -\frac{1}{8|\mathbf{k}_p^j|} [(\gamma_s + \gamma_c)(\mathbf{Q}_- + \mathbf{q}_-) + (\gamma_s - \gamma_c)(\mathbf{Q}_+ + \mathbf{q}_+)]^2 \right) L^j/2 \right] \\
&\quad \text{senc} \left[ \left( -\frac{1}{8|\mathbf{k}_p^j|} [(\gamma_s + \gamma_c)(\mathbf{Q}_- - \mathbf{q}_-) + (\gamma_s - \gamma_c)(\mathbf{Q}_+ - \mathbf{q}_+)]^2 \right) L^j/2 \right] \\
&\quad v^j(\mathbf{Q}_+ + \mathbf{q}_+, \Omega_s^j + \Omega_c^j) v^{j*}(\mathbf{Q}_+ - \mathbf{q}_+, \Omega_s^j + \Omega_c^j). \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Aqui já é possível verificar que a função pode ser escrita como  $f(\mathbf{Q}_+ - \mathbf{q}_+; \mathbf{Q}_- + \mathbf{q}_-) f^*(\mathbf{Q}_+ + \mathbf{q}_+; \mathbf{Q}_- + \mathbf{q}_-)$  onde  $f$  é o produto de  $\text{senc}$  com  $v^j$ .

## 4.2.2 Fótons Degenerados

Uma última simplificação a ser feita é supor fótons gêmeos degenerados, ou seja,  $|\mathbf{k}_s| = |\mathbf{k}_c| = k \Rightarrow \gamma_s = \gamma_c = 1$ .

$$\begin{aligned}
W_\sigma &= \sum_j \frac{c_j}{\pi^2} |C_{\sigma_s, \sigma_c}^j|^2 \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{q}_+ \int d\mathbf{q}_- e^{i\mathbf{r}_{T+} \cdot \mathbf{q}_+} e^{i\mathbf{r}_{T-} \cdot \mathbf{q}_-} \\
&\quad \text{senc} \left[ \left( -\frac{1}{4k} (\mathbf{Q}_- + \frac{\mathbf{q}_-}{2})^2 \right) L^j/2 \right] \text{senc} \left[ \left( -\frac{1}{4k} (\mathbf{Q}_- - \frac{\mathbf{q}_-}{2})^2 \right) L^j/2 \right] \\
&\quad v^j(\mathbf{Q}_+ + \frac{\mathbf{q}_+}{2}, \Omega_s^j + \Omega_c^j) v^{j*}(\mathbf{Q}_+ - \frac{\mathbf{q}_+}{2}, \Omega_s^j + \Omega_c^j), \tag{4.54}
\end{aligned}$$

onde também usamos  $|\mathbf{k}_p^j| = |\mathbf{k}_s| + |\mathbf{k}_c|$  e mudamos as variáveis de integração  $q_+ \rightarrow \frac{q_+}{2}$  e  $q_- \rightarrow \frac{q_-}{2}$ , para que esta equação se pareça mais com a eq.(2.32). Implicando em uma estrutura que podemos explorar como

$$W_\sigma = \sum_j \frac{c_j}{\pi^2} |C_{\sigma_s, \sigma_c}^j|^2 W_+^j(\mathbf{r}_{T+}, \mathbf{Q}_+) W_-^j(\mathbf{r}_{T-}, \mathbf{Q}_-) \tag{4.55}$$

onde

$$W_+^j(\mathbf{r}_{T+}, \mathbf{Q}_+) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q}_+ e^{i\mathbf{r}_{T+} \cdot \mathbf{q}_+} v^j(\mathbf{Q}_+ + \mathbf{q}_+, \Omega_s^j + \Omega_c^j) v^{j*}(\mathbf{Q}_+ - \mathbf{q}_+, \Omega_s^j + \Omega_c^j) \quad (4.56)$$

$$W_-^j(\mathbf{r}_{T-}, \mathbf{Q}_-) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q}_- e^{i\mathbf{r}_{T-} \cdot \mathbf{q}_-} \text{senc} \left[ \left( -\frac{1}{4k} (\mathbf{Q}_- + \mathbf{q}_-)^2 \right) L^j / 2 \right] \quad (4.57)$$

$$\text{senc} \left[ \left( -\frac{1}{4k} (\mathbf{Q}_- - \mathbf{q}_-)^2 \right) L^j / 2 \right]. \quad (4.58)$$

Esta solução demonstra como as propriedades dos fótons gêmeos podem ser divididas entre as coordenadas do centro de massa e as coordenadas do "centro de massa" e as coordenadas relativas. No caso que propusemos aqui, somos capazes, inclusive, de definir distribuições de Wigner para cada uma dessas coordenadas. Observando melhor as eqs.(4.56) e (4.58), é possível perceber que  $W_+^j$  é a distribuição de Wigner da função de distribuição transversal do feixe de bombeio onde suas variáveis são as coordenadas do centro de massa dos fótons gêmeo. Por sua vez,  $W_-^j$  é a distribuição de Wigner da função seno cardinal com suas variáveis sendo as coordenadas relativas dos fótons gêmeos, um adendo a ser feito é que este seno cardinal não é uma função qualquer para as coordenadas relativas, esta função tem dependência com a discrepância do vetor de onda e portanto depende da estrutura do cristal.

Esta estrutura também mostra como a suposição de diversos feixes de bombeio e diversos cristais afeta a distribuição de Wigner dos fótons gêmeos, além de também mostrar como a incoerência oriunda do feixe de bombeio será transmitida para os fótons através da soma incoerente da distribuição de Wigner de cada um dos feixes de bombeio  $W_+^j$ . Lembramos que toda a incoerência do feixe, em nosso caso, é supostamente proveniente da soma incoerente dos feixes de bombeio (todos eles coerentes), porém caso se use diferentes tipos de cristais é possível também que alguma incoerência surja devido a  $W_-^j$ . É importante notar que todo feixe pode ser decomposto em uma mistura de feixes coerentes. E por isso, nossa descrição é geral.

Agora, no caso em que tenhamos apenas um cristal  $W_-^j$  e  $C_{\sigma_s, \sigma_c}^j$  deixam de depender de

$j$  já que a dependencia em  $j$  de ambas as funções é unicamente originária das propriedades do cristal. Portanto, (4.55) assume a forma

$$\begin{aligned} W_\sigma(\mathbf{r}_+, \mathbf{Q}_+, \mathbf{r}_-, \mathbf{Q}_-) &= \frac{|C_{\sigma_s, \sigma_c}|^2}{\pi^2} W_-(\mathbf{r}_{T-}, \mathbf{Q}_-) \sum_j c_j W_+^j(\mathbf{r}_{T+}, \mathbf{Q}_+) \\ &= W_-(\mathbf{r}_{T-}, \mathbf{Q}_-; k) W_{\text{bombeio}}(\mathbf{r}_{T+}, \mathbf{Q}_+; \Omega_+). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Um caso oposto é aquele no qual se tenha apenas um feixe de bombeio, com isso, poderíamos reduzir (4.55) a

$$W_\sigma(\mathbf{r}_+, \mathbf{Q}_+, \mathbf{r}_-, \mathbf{Q}_-) = W_+(\mathbf{r}_{T+}, \mathbf{Q}_+) \sum_j \frac{c_j}{\pi^2} |C_{\sigma_s, \sigma_c}^j|^2 W_-^j(\mathbf{r}_{T-}, \mathbf{Q}_-). \quad (4.60)$$

Os dois casos trazem uma estrutura que poderá ser explorada em algum futuro experimento. A eq.(4.59) favorece o caso em que toda a falta de coerência é resultante do feixe de bombeio, nesse caso é inclusive possível escapar da situação suposta inicialmente, na qual o feixe de bombeio é incoerente graças a soma incoerente de feixes coerentes, isso se dá pois agora a distribuição de Wigner  $W_{\text{bombeio}}$  contém apenas a função do feixe de bombeio que adentra um único cristal, como um feixe incoerente pode ser escrito como a soma incoerente de feixes coerentes, nosso caso se torna geral o suficiente para abranger diversos tipos de feixes incoerentes. Já a estrutura da eq.(4.60) contém a distribuição de Wigner do feixe coerente de entrada em  $W_+$  e toda a incoerência se torna proveniente da utilização de diferentes cristais. Esta segunda requer um pouco mais de estudo da estrutura dos cristais e suas diferentes implicações, além de que uma mudança na estrutura do cristal pode resultar em uma mudança na aproximação feita em (4.33).

### 4.3 Matriz de Covariância

Agora que temos posse da distribuição de Wigner da CPD, estamos preparados para escrever a MC da CPD. Para termos uma melhor visão da física do problema utilizaremos os dois casos (4.59) e (4.60) nos quais  $W_+$  é separável de  $W_-$ . A MC nas variáveis do

centro de massa e da posição relativa

$$(V_{CPD})_{ij} = \int d\mathbf{q}_+ \int d\mathbf{q}_- \xi_{\pm i} \xi_{\pm j} W_+ W_-, \quad (4.61)$$

sendo  $\boldsymbol{\xi}_{\pm} := (x_{\pm}, q_{\pm x}, y_{\pm}, q_{\pm y}, x_{\mp}, q_{\mp x}, y_{\mp}, q_{\mp y})$  e  $x_{\pm} = \frac{x_s \pm x_c}{2}$ . Considerando que temos os primeiros momentos nulos, resulta da separabilidade de  $W_+$  e  $W_-$  que a MC da CPD pode ser escrita por blocos

$$V_{CPD}^{\pm} = \begin{pmatrix} V_+ & 0 \\ 0 & V_- \end{pmatrix}, \quad (4.62)$$

com

$$(V_+)_{ij} = \int d\mathbf{q}_+ \xi_{+i} \xi_{+j} W_+, \quad (4.63)$$

$$(V_-)_{ij} = \int d\mathbf{q}_- \xi_{-i} \xi_{-j} W_-. \quad (4.64)$$

Para analisar como fica a matriz de covariância do sistema nas coordenadas dos fótons, fazemos a mudança de variáveis  $\boldsymbol{\xi}_{\pm} \rightarrow \boldsymbol{\xi}_{sc} = (x_s, q_{sx}, y_s, q_{sy}, x_c, q_{cx}, y_c, q_{cy})$

$$V_{CPD}^{sc} = \begin{pmatrix} V_s & V_{sc} \\ V_{cs} & V_c \end{pmatrix}, \quad (4.65)$$

onde  $V_s$  e  $V_c$  são as MC do fóton sinal e complementar, respectivamente, e  $V_{sc}$  e  $V_{cs}$  são as matrizes da correlação não local entre o fóton sinal e o complementar. Os valores de  $V_s, V_c, V_{sc}, V_{cs}$  são:

$$V_s = V_c = \frac{1}{4}(V_+ + V_-) \quad (4.66)$$

$$V_{sc} = V_{cs} = \frac{1}{4}(V_+ - V_-). \quad (4.67)$$

Com isso é possível concluir que, nos casos tratados em (4.59) e (4.60), a correlação proveniente do feixe de bombeio é repassada para os fótons tanto de forma local como de forma não local, visto que  $V_+$  é a MC do feixe de bombeio.

### 4.3.1 Modelo Schell-Gaussiano Torcido na Conversão Paramétrica Descendente

Um caso particular no qual os resultados acima são aplicáveis é quando se bombeia um cristal com um feixe do MSGT. Neste caso a equação (4.59) é aplicável e um feixe MSGT

pode ser produzido com múltiplos feixes coerentes. Isto implica que  $V_+ = V_{MSGT}$  (definida em (3.13)).

Uma última simplificação que pode ser feita é a de aproximar a função  $\text{senc}[\cdot]$  por uma gaussiana. Esta aproximação pode ser encontrada na ref.[33]. Tendo essa gaussiana variância  $\sigma_{q_-}^2$ , a MC da CPD com um feixe de bombeio do MSGT igual a (4.65)

$$V_{CPD}^{sc} = \begin{pmatrix} V_{sx} & V_{sxy} & V_{scx} & V_{scxy} \\ V_{sxy} & V_{sy} & V_{scxy} & V_{scy} \\ V_{csx} & V_{csxy} & V_{cx} & V_{cxy} \\ V_{csxy} & V_{csy} & V_{cxy} & V_{cy} \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

onde

$$V_{sm} = V_{cm} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\sigma^2 + \sigma_{q_-}^2) & -\frac{\kappa\sigma^2}{R} \\ -\frac{\kappa\sigma^2}{R} & \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{4\sigma^2} + \kappa^2 \left( \frac{\sigma^2}{R^2} + u^2\sigma^2 \right) + \frac{1}{4\sigma_{q_-}^2} \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

$$V_{sxy} = V_{cxy} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & \kappa u \sigma_x^2 \\ -\kappa u \sigma_y^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

$$V_{scm} = V_{csm} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\sigma^2 - \sigma_{q_-}^2) & -\frac{\kappa\sigma^2}{R} \\ -\frac{\kappa\sigma^2}{R} & \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{4\sigma^2} + \kappa^2 \left( \frac{\sigma^2}{R^2} + u^2\sigma^2 \right) - \frac{1}{4\sigma_{q_-}^2} \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

$$V_{scxy} = V_{cscxy} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & \kappa u \sigma^2 \\ -\kappa u \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

onde  $m$  conta tanto para  $x$  quanto para  $y$ .

As matrizes (4.69) e (4.70) contêm correlações entre as coordenadas do fóton sinal ou complementar, e assim são correlações internas de cada fóton. Já as matrizes (4.71) e (4.72) contêm apenas correlações entre uma coordenada do fóton sinal com uma coordenada do complementar, logo, consideramos estas como sendo correlações "não locais"<sup>1</sup>. Vemos que a fase de torção  $u$  aparece em todas estas matrizes. Assim, a fase de torção do bombeio influencia tanto as correlações locais entre  $x$  e  $y$  do sinal ou complementar, quanto as correlações não locais entre os fótons sinal e complementar.

---

<sup>1</sup>Chamamos estas de correlações não locais pois são correlações que existem mesmo que os fótons sejam infinitamente separados após a CPD ocorrer.



## Capítulo 5

# Considerações Finais

Como foi possível notar, nosso estudo pode ser dividido em duas etapas, a primeira na qual estudamos dois feixes clássicos, um totalmente coerente e outro parcialmente coerente, estudamos também suas MC e as relações com o MAO. A segunda parte de nosso estudo foi um estudo sobre a CPD utilizando a distribuição de Wigner e a MC para avaliar como efeitos e correlações são passadas do feixe de bombeio para os fótons gêmeos resultantes.

Esta dissertação buscou, também, misturar duas linguagens diferentes, uma delas sendo a linguagem de ótica clássica, que se baseia principalmente no estudo das densidades espectrais cruzadas e das MC resultantes, e a outra da mecânica quântica, esta se baseia principalmente no estudo de matrizes densidade e correlações entre sistemas. A forma mais óbvia de conectar estas linguagens é através da distribuição de Wigner, utilizada em ambas áreas de estudo, além da MC a qual contém as correlações entre as variáveis.

Com um foco em compreender melhor o feixe do MSGT, uma comparação com um feixe LG foi feita. A escolha deste não foi atoa, é claro que feixe MSGT carrega MAO, isto inclusive já foi estudado em alguns artigos [34], devido a isto buscar uma comparação deste com um feixe coerente, amplamente conhecido e utilizado e que é autoestado do momento angular (tem momento angular orbital  $l\hbar$  por fóton) parece algo natural e produtivo. Levando em conta que o feixe MSGT é um feixe gaussiano, e portanto a MC contém toda a informação sobre o feixe, uma comparação deste com o feixe LG pode ser feita através

de MC. Relembramos que, devido ao feixe LG não ser gaussiano, este não tem toda sua informação contida em sua MC.

Como a MC do feixe LG não foi encontrada na literatura, foi necessário a calcular. No resultado encontrado para esta em (2.93) fica claro sua relação com o MAO em especial ao se lembrar que  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  e como temos a direção preferencial  $z$ ,  $L_z = xp_y - yp_x$ . Caso queria se conhecer o momento angular médio deste feixe basta  $\langle L_z \rangle = \langle xp_y \rangle - \langle yp_x \rangle = l$ , que condiz com o MAO por fóton conhecido do feixe LG [4]. Sob posse desta matriz, fomos capazes de fazer uma comparação do feixe MSGT.

É possível notar em (3.13) que a conexão entre MSGT e LG é simples e direta, a MC de um MSGT é facilmente reproduzida caso se queira. Consequentemente toda a informação contida em um MSGT pode ser colocada de igual forma em um feixe LG, porém o contrário não pode ser afirmado. Apesar do feixe MSGT poder parecer ser mais geral devido a sua coerência ser apenas parcial, isto não é necessariamente verdade por causa de sua estrutura gaussiana que limita que toda sua informação esteja contida em seus segundos momentos. Graças a isso é possível compreender que dependendo do caso é possível se colar mais informação em um feixe LG do que em um feixe MSGT.

Para entendermos melhor a conexão entre estes feixes, vamos olhar para suas MC. A MC do MGST (3.13) define uma família de quatro parâmetros  $\sigma, \delta, R, u$  para feixes gaussianos. Quando  $u = 0$  a família de quatro parâmetros definida a partir do feixe MSGT é reduzida a conhecida família de três parâmetros do modelo Schell-Gaussiano. Já no caso da matriz (2.93) vemos que esta também contém quatro parâmetros, estes sendo  $w, R, N, l$ , é também possível escolher  $\sigma, R, p, l$ , além de outros conjuntos de quatro parâmetros. O quesito mais importante é notar que, assim como na MC do MSGT, aqui existe um conjunto de quatro parâmetros independentes, sendo um deles exatamente  $N$  (ou  $p$ ). Enfatizamos que  $N$  é um deles, pois assim como para o MSGT um de seus parâmetros é exatamente o parâmetro que faz com que o feixe seja parcialmente coerente, no LG um dos parâmetros é o parâmetro que faz com que o feixe seja não gaussiano.

Em vista disso, escolhemos o conjunto  $(\sigma, R, l, N)$  de quatro parâmetros independentes da MC do feixe LG (sendo  $\sigma^2 = \frac{w}{4}(N + 1)$ ). Ao comparar este conjunto com o do MSGT é possível notar algumas relações:

- (a) Da equação (3.18) vemos que ambos os  $\sigma$  representam a variância.
- (b) Da equação (3.19) vemos que ambos os  $R$  representam o raio de curvatura.
- (c) Da equação (3.20) vemos que tanto  $l$  quanto  $u$  se relacionam com o MAO.
- (d) Tanto  $\delta$  quanto  $N$  são os parâmetros que trazem a diferença de cada um dos feixes em comparação com o feixe gaussiano coerente.
- (f) Tanto  $\delta$  quanto  $N$  impõe limites nos parâmetros que se relacionam com o MAO, isto é, para o MSGT  $|u| \leq \frac{1}{\kappa\delta^2}$  e para o LG  $|l| \leq N$ .

Vemos que estes dois feixes tem uma grande relação entre si, inclusive na forma como estes se diferenciam de um feixe gaussiano coerente. Vale explicitar que ambos os feixes carregam MAO como podemos ver em suas MC, porém cada um deles faz isso de uma forma diferente. O feixe LG é um autoestado de momento angular, e portanto cada fóton seu carrega a mesma quantidade de momento angular orbital  $l\hbar$ . Já para o feixe MSGT é necessário mais cuidado, o momento angular que este carrega é apenas na média sobre todos os seus fótons, esse aspecto é mais facilmente visualizado e compreendido ao se fazer uma análise do feixe MSGT como uma combinação não coerente de feixes gaussianos, cada um deles coerente, se propagando em diferentes direções. Como cada feixe se propaga em uma direção diferente, cada fóton do feixe tem um momento com direção e sentido diferentes, chegamos assim a conclusão que o MAO carregado por um MSGT só existe pois cada feixe tem uma direção de propagação levemente diferente. O MSGT não é autoestado de momento angular e para cada fóton sempre haverá um eixo com relação ao qual este fóton não tem MAO.

A segunda etapa deste trabalho se apresenta no estudo da CPD para o caso no qual o estado final é dado por um estado mistura, este pode ser tanto por causa de um feixe de bombeio misto, quanto devido a utilização de diversos cristais. Neste estudo calculamos, então, a distribuição de Wigner para um estado final misto da CPD, com esta distribuição fomos capazes de, utilizando algumas aproximações, chegar em uma MC para os fótons gêmeos.

Nas equações (4.59) e (4.60) vemos que, para uma CPD com um estado final misto, tanto no caso em que supomos apenas um cristal com múltiplos feixes de bombeio (não necessariamente coerentes entre si) quanto no caso em que se temos apenas um feixe de bombeio coerente e múltiplos cristais, a distribuição de Wigner final pode ser dividida em uma distribuição de Wigner para o feixe de bombeio nas coordenadas<sup>1</sup> do centro de massa e um distribuição de Wigner nas coordenadas relativas que depende dos cristais. Em consequência disso, fomos capazes de encontrar a MC para os fótons gêmeos nas coordenadas do centro de massa e relativas, nelas a MC total dos fótons gêmeos é diagonal por blocos onde em (4.62)  $V_+$  é uma MC que depende unicamente do(s) feixe(s) de bombeio e  $V_-$  é a MC que depende unicamente dos cristais. Quando se utiliza apenas um feixe de bombeio  $V_+$  é simplesmente a MC do feixe e quando se utilizam múltiplos feixes de bombeio  $V_+$  é a MC para o feixe descrito pela superposição de todos esses feixes.

Após chegamos aos resultados (4.65), (4.66) e (4.67) que demonstram de forma extremamente simples como as correlações do feixe de bombeio passam para os fótons gêmeos tanto de forma local com de forma não local, além de também mostrarem como o cristal (ou os cristais) afeta as correlações destes fótons gêmeos. Para mostrar a capacidade deste resultado fizemos uma breve demonstração de sua utilização para uma situação onde se tem o feixe de bombeio sendo um MSGT com apenas um cristal.

No capítulo 5 foi possível concluir, utilizando o critério de separabilidade de Peres-

---

<sup>1</sup>Na situação onde o se tem múltiplos feixes este feixe de bombeio por vir a ser um feixe parcialmente coerente

Horodecki para sistemas gaussianos bipartidos[20], que um sistema gaussiano bipartido que tenha a MC igual a dos feixes MSGT não pode ter emaranhamento. Porém, este poderia conter discórdia quântica gaussiana, a discórdia geométrica gaussiana e possíveis outros tipos de correlações quânticas as quais mostram que o MSGT pode ser extremamente útil no estudo de efeitos quânticos, em especial para casos no qual se busca também um estudo ao entorno da influência que a coerência pode gerar nesses sistemas.

Encerramos dizendo que pretendemos publicar dois artigos, um voltado mais a parte de ótica desta dissertação e outro voltado para ótica quântica em específico CPD de feixes não coerentes. Também seria interessante, como uma próxima etapa desta pesquisa, analisar como a descrição da CPD com a distribuição de Wigner pode auxiliar no entendimento de correlações e de quais recursos são utilizados em cada experimento onde se faz uso da CPD.

Este trabalho foi um primeiro passo em tentar explorar a produção de estados de dois fótons parcialmente coerentes em seus graus de liberdade espaciais. Os nossos resultados podem ser utilizados para desenhar futuros experimentos, utilizando feixes de bombeio parcialmente coerentes, ou, diferentes cristais não lineares, para produzir estados emaranhados com propriedades distintas. Nesta direção, um trabalho futuro interessante seria tentar observar e manipular a fase de torção dos fótons gêmeos.

## Referências Bibliográficas

- [1] R. Simon and N. Mukunda. Twisted gaussian schell-model beams. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10(1):95–109, Jan 1993. 1, 2, 28, 30, 31, 32
- [2] Anand Kumar Jha and Robert W. Boyd. Spatial two-photon coherence of the entangled field produced by down-conversion using a partially spatially coherent pump beam. *Phys. Rev. A*, 81:013828, Jan 2010. 1, 39, 41
- [3] Enno Giese, Robert Fickler, Wuhong Zhang, Lixiang Chen, and Robert W Boyd. Influence of pump coherence on the quantum properties of spontaneous parametric down-conversion. *Physica Scripta*, 93(8):084001, jul 2018. 1, 39, 41
- [4] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman. Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes. *Phys. Rev. A*, 45:8185–8189, Jun 1992. 2, 21, 58
- [5] Bahaa E A Saleh and Malvin Carl Teich. *Fundamentals of photonics; 2nd ed.* Wiley series in pure and applied optics. Wiley, New York, NY, 2007. 3
- [6] A. Zangwill. *Modern Electrodynamics*. Modern Electrodynamics. Cambridge University Press, 2013. 3
- [7] Dietrich Marcuse. *Light transmission optics*. Van Nostrand Reinhold electrical, 1982. 5, 21

- [8] E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.*, 40:749–759, Jun 1932. 14
- [9] R. Simon, E. C. G. Sudarshan, and N. Mukunda. Gaussian-wigner distributions in quantum mechanics and optics. *Phys. Rev. A*, 36:3868–3880, Oct 1987. 16, 32
- [10] M.W. Beijersbergen, L. Allen, H.E.L.O. van der Veen, and J.P. Woerdman. Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum. *Optics Communications*, 96(1):123 – 132, 1993. 18, 21, 22
- [11] William H. Carter. Spot size and divergence for hermite gaussian beams of any order. *Appl. Opt.*, 19(7):1027–1029, Apr 1980. 20
- [12] E. Wolf and E. Collett. Partially coherent sources which produce the same far-field intensity distribution as a laser. *Optics Communications*, 25(3):293 – 296, 1978. 28
- [13] E. Collett and E. Wolf. Is complete spatial coherence necessary for the generation of highly directional light beams? *Opt. Lett.*, 2(2):27–29, Feb 1978. 28
- [14] P. De Santis, F. Gori, G. Guattari, and C. Palma. An example of a collett-wolf source. *Optics Communications*, 29(3):256 – 260, 1979. 28
- [15] F. Gori. Collett-wolf sources and multimode lasers. *Optics Communications*, 34(3):301 – 305, 1980. 28
- [16] Ari T. Friberg, Eero Tervonen, and Jari Turunen. Interpretation and experimental demonstration of twisted gaussian schell-model beams. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(6):1818–1826, Jun 1994. 30
- [17] R. Simon and N. Mukunda. Twist phase in gaussian-beam optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 15(9):2373–2382, Sep 1998. 32

- [18] Asher Peres. Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 77:1413–1415, Aug 1996. 35
- [19] Pawel Horodecki. Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition. *Physics Letters A*, 232(5):333 – 339, 1997. 36
- [20] R. Simon. Peres-horodecki separability criterion for continuous variable systems. *Phys. Rev. Lett.*, 84:2726–2729, Mar 2000. 36, 61
- [21] R. F. Werner and M. M. Wolf. Bound entangled gaussian states. *Phys. Rev. Lett.*, 86:3658–3661, Apr 2001. 36
- [22] E. Shchukin and W. Vogel. Inseparability criteria for continuous bipartite quantum states. *Phys. Rev. Lett.*, 95:230502, Nov 2005. 36
- [23] Alessio Serafini. Multimode uncertainty relations and separability of continuous variable states. *Phys. Rev. Lett.*, 96:110402, Mar 2006. 36
- [24] Mark Hillery and M. Suhail Zubairy. Entanglement conditions for two-mode states. *Phys. Rev. Lett.*, 96:050503, Feb 2006. 36
- [25] S. P. Walborn, B. G. Taketani, A. Salles, F. Toscano, and R. L. de Matos Filho. Entropic entanglement criteria for continuous variables. *Phys. Rev. Lett.*, 103:160505, Oct 2009. 36
- [26] Harold Ollivier and Wojciech H. Zurek. Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 88:017901, Dec 2001. 37
- [27] Paolo Giorda and Matteo G. A. Paris. Gaussian quantum discord. *Phys. Rev. Lett.*, 105:020503, Jul 2010. 37, 74
- [28] Gerardo Adesso and Animesh Datta. Quantum versus classical correlations in gaussian states. *Phys. Rev. Lett.*, 105:030501, Jul 2010. 37, 38, 74



- [29] S.P. Walborn, C.H. Monken, S. PÃ¡dua, and P.H. Souto Ribeiro. Spatial correlations in parametric down-conversion. *Physics Reports*, 495(4):87 – 139, 2010. 39, 40
- [30] Hugo Defienne and Sylvain Gigan. Spatially entangled photon-pair generation using a partial spatially coherent pump beam. *Phys. Rev. A*, 99:053831, May 2019. 39
- [31] Wuhong Zhang, Robert Fickler, Enno Giese, Lixiang Chen, and Robert W. Boyd. The influence of pump coherence on the generation of position-momentum entanglement in down-conversion. *arXiv e-prints*, page arXiv:1812.09532, Dec 2018. 39
- [32] C. K. Hong and L. Mandel. Theory of parametric frequency down conversion of light. *Phys. Rev. A*, 31:2409–2418, Apr 1985. 40
- [33] James Schneeloch and John C Howell. Introduction to the transverse spatial correlations in spontaneous parametric down-conversion through the biphoton birth zone. *Journal of Optics*, 18(5):053501, apr 2016. 56
- [34] Xiaofeng Peng, Lin Liu, Fei Wang, Sergei Popov, and Yangjian Cai. Twisted laguerre-gaussian schell-model beam and its orbital angular moment. *Opt. Express*, 26(26):33956–33969, Dec 2018. 57
- [35] Alfredo M.Ozorio de Almeida. The weyl representation in classical and quantum mechanics. *Physics Reports*, 295(6):265 – 342, 1998.
- [36] R. Simon, N. Mukunda, and Biswadeb Dutta. Quantum-noise matrix for multimode systems:  $U(n)$  invariance, squeezing, and normal forms. *Phys. Rev. A*, 49:1567–1583, Mar 1994.
- [37] Wojciech Hubert Zurek. Quantum discord and maxwell’s demons. *Phys. Rev. A*, 67:012320, Jan 2003.
- [38] Thomas M. Cover and Joy A. Thomas. *Elements of Information Theory*. Wiley-Interscience; EdiÃ§Ã£o: 2nd, 2006. 70, 72

- [39] L Henderson and V Vedral. Classical, quantum and total correlations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34(35):6899–6905, aug 2001. 74
- [40] Robert W. Boyd. *Nonlinear Optics, Third Edition*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA, 3rd edition, 2008.
- [41] J. Courtial, K. Dholakia, L. Allen, and M.J. Padgett. Gaussian beams with very high orbital angular momentum. *Optics Communications*, 144(4):210 – 213, 1997.
- [42] J. Serna and J. M. Movilla. Orbital angular momentum of partially coherent beams. *Opt. Lett.*, 26(7):405–407, Apr 2001.
- [43] L. Allen, M.J. Padgett, and M. Babiker. Iv the orbital angular momentum of light. volume 39 of *Progress in Optics*, pages 291 – 372. Elsevier, 1999.

## Apêndice A

# Cálculos das Funções de Hermite-Gauss em uma Dimensão

Aqui fazemos as contas utilizadas no capítulo 2 para a função HG unidimensional  $\phi_j(u)$ :

$$\int du \phi_k(u) \phi_j^*(u) = C_k C_j e^{i(j-k)\psi} \int du e^{-\frac{2u^2}{w^2}} H_k(u\sqrt{2}/w) H_j(u\sqrt{2}/w) = \delta_{kj} \quad (\text{A.1})$$

note que aqui foram usados  $\alpha + \alpha^* = 2/w^2$  e (2.57). Além disso, também é interessante calcular:

$$\begin{aligned} \int du u \phi_k(u) \phi_j^*(u) &= C_k C_j e^{i(j-k)\psi} \int du u e^{-\frac{2u^2}{w^2}} H_k(u\sqrt{2}/w) H_j(u\sqrt{2}/w) = \\ &= C_k C_j e^{i(j-k)\psi} \int du e^{-\frac{2u^2}{w^2}} H_k(u\sqrt{2}/w) \frac{w}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2} H_{j+1}(u\sqrt{2}/w) + j H_{j-1}(u\sqrt{2}/w) \right) = \\ &= \frac{w}{\sqrt{2}} \left[ \frac{C_{k-1}}{2C_k} e^{-i\psi} \delta_{k-1,j} + \frac{j C_j}{C_{j-1}} e^{i\psi} \delta_{k,j-1} \right] = \frac{w}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\sqrt{2k}}{2} e^{-i\psi} \delta_{k-1,j} + \frac{j}{\sqrt{2j}} e^{i\psi} \delta_{k,j-1} \right] = \\ &= \frac{w}{2} \left[ \sqrt{k} e^{-i\psi} \delta_{k-1,j} + \sqrt{j} e^{i\psi} \delta_{k,j-1} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde foi usado que  $C_j/C_k = (2^{k-j} k! / j!)^{\frac{1}{2}}$ , além das equações (2.60) e (2.57).

Agora para a integral das derivadas, porém aqui já serão feitas para um caso mais

específico:

$$\begin{aligned}
& \int du \frac{\partial}{\partial \mu} [\phi_k(u - \mu/2) \phi_j^*(u + \mu/2)]_{\mu=0} = \int du \frac{1}{2} \left[ \phi_k(u) \frac{\partial \phi_j^*}{\partial u}(u) - \phi_j^*(u) \frac{\partial \phi_k}{\partial u}(u) \right] = \\
& = C_k C_j e^{i(j-k)\psi} \int du e^{-\frac{2u^2}{w^2}} \left[ \frac{i u \kappa}{R} H_k(u\sqrt{2}/w) H_j(u\sqrt{2}/w) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sqrt{2}}{w} \left( j H_k(u\sqrt{2}/w) H_{j-1}(u\sqrt{2}/w) - k H_{k-1}(u\sqrt{2}/w) H_j(u\sqrt{2}/w) \right) \right] = \\
& = \frac{i\kappa}{R} \int du u \phi_k(u) \phi_j^*(u) + \frac{\sqrt{2}}{w} \left( \frac{j C_j}{C_{j-1}} e^{i\psi} \delta_{k,j-1} - \frac{k C_k}{C_{k-1}} e^{-i\psi} \delta_{k-1,j} \right) = \\
& = \frac{i\kappa w}{2R} \left( \sqrt{k} e^{-i\psi} \delta_{k-1,j} + \sqrt{j} e^{i\psi} \delta_{k,j-1} \right) + \frac{1}{w} \left( \sqrt{j} e^{i\psi} \delta_{k,j-1} - \sqrt{k} e^{-i\psi} \delta_{k-1,j} \right) = \\
& = \sqrt{k} e^{-i\psi} \delta_{k-1,j} \left( \frac{i\kappa w}{2R} - \frac{1}{w} \right) + \sqrt{j} e^{i\psi} \delta_{k,j-1} \left( \frac{i\kappa w}{2R} + \frac{1}{w} \right) \tag{A.3}
\end{aligned}$$

Por último a derivada em segunda ordem:

$$\begin{aligned}
& \int du \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} [\phi_k(u - \mu/2) \phi_k^*(u + \mu/2)]_{\mu=0} = \int du \frac{1}{4} \left[ \phi_k(u) \frac{\partial^2 \phi_k^*}{\partial u^2}(u) + \phi_k^*(u) \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial u^2}(u) - \right. \\
& \quad \left. - 2 \frac{\partial \phi_k}{\partial u}(u) \frac{\partial \phi_k^*}{\partial u}(u) \right] = \frac{1}{4} \int du \left( 2 \operatorname{Re} \left[ \phi_k(u) \frac{\partial^2 \phi_k^*}{\partial u^2}(u) \right] - 2 \left| \frac{\partial \phi_k}{\partial u}(u) \right|^2 \right). \tag{A.4}
\end{aligned}$$

Calculamos separadamente os dois termos

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \left[ \phi_k(u) \frac{\partial^2 \phi_k^*}{\partial u^2}(u) \right] = C_k^2 \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-\frac{2u^2}{w^2}}}{R^2 w^4} H_k(u\sqrt{2}/w) \left\{ 8k(k-1)R^2 w^2 H_{k-2}(u\sqrt{2}/w) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (2R - i\kappa w^2) \left( 4\sqrt{2} k R u w H_{k-1}(u\sqrt{2}/w) + (iu^2 \kappa w^2 + R(w^2 - 2u^2)) H_k(u\sqrt{2}/w) \right) \right\} \right] = \\
& = C_k^2 \frac{e^{-\frac{2u^2}{w^2}}}{R^2 w^4} H_k(u\sqrt{2}/w) \left[ 8k(k-1)R^2 w^2 H_{k-2}(u\sqrt{2}/w) - 8\sqrt{2} k R^2 w u H_{k-1}(u\sqrt{2}/w) - \right. \\
& \quad \left. - \left( 2R^2(w^2 - 2u^2) + \kappa^2 w^4 u^2 \right) H_k(u\sqrt{2}/w) \right] \tag{A.5}
\end{aligned}$$

e utilizando a derivada, assim como já calculada em (A.3),

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial \phi_k}{\partial u}(u) \right|^2 &= C_k^2 \left| \frac{e^{-\alpha u^2}}{R w^2} (2\sqrt{2} k R w H_{k-1}(u\sqrt{2}/w) - u(2R + i\kappa w^2) H_k(u\sqrt{2}/w)) \right|^2 = \\
&= C_k^2 \frac{e^{-\frac{2u^2}{w^2}}}{R^2 w^4} \left[ \left( 2\sqrt{2} k R w H_{k-1}(u\sqrt{2}/w) - 2R u H_k(u\sqrt{2}/w) \right)^2 + u^2 \kappa^2 w^4 H_k^2(u\sqrt{2}/w) \right] = \\
&= C_k^2 \frac{e^{-\frac{2u^2}{w^2}}}{R^2 w^4} \left[ (4R^2 + \kappa^2 w^4) u^2 H_k^2(u\sqrt{2}/w) + 8k^2 R^2 w^2 H_{k-1}^2(u\sqrt{2}/w) - \right. \\
&\quad \left. - 8\sqrt{2} k R^2 w u H_k(u\sqrt{2}/w) H_{k-1}(u\sqrt{2}/w) \right]. \tag{A.6}
\end{aligned}$$

De posse desses resultados voltamos a (A.4):

$$\begin{aligned}
\int du \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} [\phi_k(u - \mu/2) \phi_k^*(u + \mu/2)]_{\mu=0} &= \frac{C_k^2}{2R^2 w^4} \int du e^{-\frac{2u^2}{w^2}} \left[ 8k(k-1) R^2 w^2 H_k(u\sqrt{2}/w) H_{k-2}(u\sqrt{2}/w) \right. \\
&\quad \left. - 2(R^2 w^2 + \kappa^2 w^4 u^2) H_k^2(u\sqrt{2}/w) - 8k^2 R^2 w^2 H_{k-1}^2(u\sqrt{2}/w) \right] = \\
&= \frac{C_k^2}{R^2 w^2} \int du e^{-\frac{2u^2}{w^2}} \left[ 4k(k-1) R^2 H_k(u\sqrt{2}/w) H_{k-2}(u\sqrt{2}/w) - (R^2 + \kappa^2 w^2 u^2) H_k^2(u\sqrt{2}/w) - \right. \\
&\quad \left. - 4k^2 R^2 H_{k-1}^2(u\sqrt{2}/w) \right], \tag{A.7}
\end{aligned}$$

com (2.57) e (2.61) chegamos,

$$\begin{aligned}
\int du \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} [\phi_k(u - \mu/2) \phi_k^*(u + \mu/2)]_{\mu=0} &= -\frac{C_k^2}{R^2 w^2} \left[ \left( R^2 + \frac{\kappa^2 w^4}{2} \left( k + \frac{1}{2} \right) \right) \frac{1}{C_k^2} + \frac{4k^2 R^2}{C_{k-1}^2} \right] = \\
&= -\frac{1}{w^2} - \frac{\kappa^2 w^2}{2R^2} \left( k + \frac{1}{2} \right) - \frac{4k^2}{w^2} \frac{C_k^2}{C_{k-1}^2} = -\frac{1}{w^2} - \frac{\kappa^2 w^2}{2R^2} \left( k + \frac{1}{2} \right) - \frac{2k}{w^2} \tag{A.8}
\end{aligned}$$

## Apêndice B

# Discórdia Quântica Gaussiana

A discórdia quântica surge ao se estudar as definições de informação mútua estruturadas em mecânica estatística clássica e se tentar trazê-las para a mecânica quântica. Para que este problema seja entendido de uma melhor forma é necessário, primeiro, saber as duas definições classicamente equivalentes de informação mútua[38].

Seja  $\mathcal{X}$  uma variável aleatória, a ignorância a respeito da mesma é dada pela entropia de Shannon  $H(\mathcal{X}) = -\sum_x p(\mathcal{X} = x) \log p(\mathcal{X} = x)$ , onde a soma é feita sobre todos os possíveis valores da variável  $\mathcal{X}$ , sendo  $x$  um elemento deste conjunto,  $p(\mathcal{X} = x)$  a função distribuição de probabilidade da variável  $\mathcal{X}$  e logaritmo sempre referindo-se ao logaritmo na base 2  $\log := \log_2$ .

Por simplicidade adotaremos a notação  $p(x) := p(\mathcal{X} = x)$  deixando implícito que  $p(x)$  trata de uma distribuição de probabilidade de  $\mathcal{X}$ , de modo que  $p(x)$  e  $p(y)$  são duas distribuições de probabilidade diferentes, das variáveis  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  respectivamente. Com a probabilidade conjunta de duas variáveis sendo escrita como  $p(x, y) := p(\mathcal{X} = x, \mathcal{Y} = y)$  e a subsequente probabilidade condicional<sup>1</sup> sendo  $p(x|y) := p(\mathcal{X} = x|\mathcal{Y} = y)$ . Onde a probabilidade condicional respeita a regra de Bayes:

$$p(x, y) = p(x|y)p(y) = p(y|x)p(x). \quad (\text{B.1})$$

Desta forma pode-se também definir a entropia de uma distribuição conjunta  $p(x, y)$  como

---

<sup>1</sup>É possível definir um distribuição de probabilidade condicional  $p(\mathcal{X}|\mathcal{Y} = y)$ , para um dado valor  $\mathcal{Y} = y$  neste caso.

sendo

$$H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = - \sum_x \sum_y p(x, y) \log p(x, y) \quad (\text{B.2})$$

assim como para uma variável, porém agora para o vetor  $(\mathcal{X} = x, \mathcal{Y} = y)$ .  $H(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  é chamada de *entropia conjunta*. Também definimos a entropia condicional como sendo a entropia média de uma das variáveis dado que o valor outra variável é conhecido, isto é:

$$H(\mathcal{Y}|\mathcal{X}) = \sum_x p(x) H(\mathcal{Y}|\mathcal{X} = x) = \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} &= - \sum_x p(x) \sum_y p(y|x) \log p(y|x) = \\ &= - \sum_x \sum_y p(x, y) \log p(y|x). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Utilizando a interpretação de a entropia ser a ignorância sobre uma variável aleatória, a entropia condicional  $H(\mathcal{Y}|\mathcal{X})$  pode ser interpretada como a ignorância média sobre a variável  $\mathcal{Y}$  dado  $\mathcal{X}$ . Uma importante propriedade destas entropias pode ser deduzida

$$\begin{aligned} H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) &= - \sum_x \sum_y p(x, y) \log p(x, y) = \\ &= - \sum_x \sum_y p(x, y) \log p(x) p(y|x) = \\ &= - \sum_x \sum_y p(x, y) \log p(x) - \sum_x \sum_y p(x, y) \log p(y|x) = \\ &= H(\mathcal{X}) + H(\mathcal{Y}|\mathcal{X}) = H(\mathcal{Y}) + H(\mathcal{X}|\mathcal{Y}). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Esta equação demonstra que a ignorância que se tem sobre duas variáveis  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  é igual a ignorância sobre uma delas mais a ignorância média sobre a outra variável dado que a primeira é conhecida. Reescrevendo (B.5)  $H(\mathcal{Y}|\mathcal{X}) = H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) - H(\mathcal{X})$ , podemos interpretar também a entropia condicional como a redução na entropia conjunta devido a não se ter ignorância sobre uma das variáveis, i.e., conhecer uma das variáveis.

Quando duas variáveis aleatórias são independentes sua distribuição de probabilidade conjunta fica  $p(x, y) = p(x)p(y)$ , resultando, assim, que  $p(x|y) = p(x)$  e  $p(y|x) = p(y)$ . Conhecer o valor de uma das variáveis não afeta a ignorância sobre a outra, isto também

é notável escrevendo-se a equação

$$H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = H(\mathcal{X}) + H(\mathcal{Y}). \quad (\text{B.6})$$

Agora, para definirmos informação mútua é necessário compreender seu significado. A informação mútua de duas variáveis aleatórias é definida como a informação compartilhada por essas, isto quer dizer que a informação mútua pode ser compreendida como a diferença entre a ignorância que se tem devido a duas variáveis não serem independentes. Sendo  $H_I(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := H(\mathcal{X}) + H(\mathcal{Y})$  a entropia conjunta de uma suposto sistema no qual as variáveis são independentes (como mostrado em (B.6)) e  $H(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  a entropia da distribuição de probabilidade conjunta para a qual quer se conhecer a informação mútua, temos então a definição de informação mútua<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathcal{X} : \mathcal{Y}) &= H_I(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) - H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \\ &= H(\mathcal{X}) + H(\mathcal{Y}) - H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Da regra de Bayes para a entropia (B.5) podemos reescrever (B.7) como

$$\mathcal{J}(\mathcal{X} : \mathcal{Y}) = H(\mathcal{X}) - H(\mathcal{X}|\mathcal{Y}). \quad (\text{B.8})$$

Esta, por sua vez, apresenta uma interpretação de que a informação mútua é o decréscimo médio da entropia de  $\mathcal{X}$  (no caso da eq.(B.8)) devido ao conhecimento de  $\mathcal{Y}$ .

A generalização dos conceitos clássicos para a informação quântica se dá ao trocar a distribuição de probabilidade clássica pela matriz densidade e a entropia de Shannon pela entropia de von Neumann:

$$S(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := S(\rho_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}) = -\text{tr}[\rho_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}} \log \rho_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}] = - \sum_{x,y} \lambda_{x,y} \log \lambda_{x,y}, \quad (\text{B.9})$$

sendo  $\lambda_{x,y}$  os autovalores da matriz densidade  $\rho_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}$ . E as entropias de von Neumann individuais  $S(\mathcal{X})$  e  $S(\mathcal{Y})$  são estabelecidas como

$$S(\mathcal{X}) = S(\rho_{\mathcal{X}}) = S(\text{tr}_{\mathcal{Y}} \rho_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}) \quad (\text{B.10})$$

---

<sup>2</sup>Na ref[38] é possível encontrar uma definição de informação mútua originada da definição de *entropia relativa* ou *distância de Kullback Leibler*.



sendo  $tr_{\mathcal{Y}}$  o traço parcial sobre  $\mathcal{Y}$ . A generalização de  $H(\mathcal{X}|\mathcal{Y})$  para a entropia de von Neumann é  $S(\mathcal{X}|\mathcal{Y})$ , que pode ser entendida como a entropia de um dado sistema após uma medida ter sido feita em  $\mathcal{Y}$ , isto é, podemos definir uma versão quântica de (B.3). Para isso devemos antes estabelecer um conjunto de *medida com operador positivo valorizado* (MOPV, em inglês *positive-operator valued measure* ou POVM)  $\{\Pi_y\}$  no qual cada operador de medida  $\Pi_y$  está associado com um possível resultado indiciado por  $y$

$$H(\mathcal{X}|\mathcal{Y}) \rightarrow S(\mathcal{X}|\{\Pi_y\}) = \sum_y p_y S(\rho_{\mathcal{X}|y}), \quad (\text{B.11})$$

onde  $p_y = tr[\Pi_y \rho_{\mathcal{X},\mathcal{Y}} \Pi_y]$  é a probabilidade do resultado de uma medida ser o  $y$ -ésimo e  $\rho_{\mathcal{X}|y} = tr_{\mathcal{Y}}[\Pi_y \rho_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}]/p_y$ , fazendo-se necessário especificar quais medidas estão sendo feitas em  $\mathcal{Y}$ .

Caso se busque uma generalização do conceito de informação mútua para a informação quântica um desafio será encontrado, as equações (B.7) e (B.8) não são equivalentes para sistemas quânticos. A não equivalência destas duas equações é evidente no fato de que na eq.(B.8) temos uma entropia condicional que exige que especifiquemos o estado de  $\mathcal{X}$  dado um estado de  $\mathcal{Y}$ , porém em mecânica quântica só somos capazes de saber o estado de  $\mathcal{Y}$  após uma medida. Diferença a qual fica ainda mais evidente ao prestar atenção as interpretações dadas antes da definição de  $\mathcal{I}(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$  e após a definição de  $\mathcal{J}(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$ , por isso as botaremos de forma mais clara aqui:

**Interpretação de  $\mathcal{I}(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$ :** diferença entre a ignorância que se tem devido às duas variáveis não serem independentes com o caso no qual as duas variáveis são independentes (para que a informação seja sempre positiva a conta é feita com o caso de variáveis independentes subtraído do caso com variáveis não dependentes, já que  $H(\mathcal{Y}) \geq H(\mathcal{X}|\mathcal{Y})$ ). OU Ignorância perdida devido a um sistema ter variáveis não independentes, comparado com o caso no qual elas são independentes.

**Interpretação de  $\mathcal{J}(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$ :** decrescimento médio da ignorância sobre uma parte do sistema devido ao conhecimento da outra parte.

Devido a essa diferença iremos generalizar as duas diferentes definições clássicas de informação mútua (B.7) e (B.8):

$$\mathcal{I}(\mathcal{X} : \mathcal{Y}) = S(\mathcal{X}) + S(\mathcal{Y}) - S(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \quad (\text{B.12})$$

$$\mathcal{J}(\mathcal{X} : \mathcal{Y})_{\{\Pi_y\}} = S(\mathcal{X}) - S(\mathcal{X}|\{\Pi_y\}), \quad (\text{B.13})$$

notando que em (B.13), assim como em (B.11), é indispensável a especificação do conjunto de medidas utilizado.

Com isso a definição de discórdia é dada como a diferença entre os análogos quânticos de informação mútua (B.12) e (B.13):

$$\delta(\mathcal{X} : \mathcal{Y})_{\{\Pi_y\}} = \mathcal{I}(\mathcal{X} : \mathcal{Y}) - \mathcal{J}(\mathcal{X} : \mathcal{Y})_{\{\Pi_y\}} \quad (\text{B.14})$$

Uma última objeção pode ser feita quanto a esta definição, pois esta depende da escolha de um conjunto de medidas. Para contornar isto, Henderson e Vedral [39] propuseram uma maximização da *informação clássica* (a informação mútua  $\mathcal{J}$  foi nominada desta forma devido a esta ser a informação ganha ao se medir o sistema) sobre todos os MOPV, que é equivalente a uma minimização da discórdia (B.14)

$$\delta(\mathcal{X}|\mathcal{Y})_{\{\Pi_y\}} = \min_{\{\Pi_y\}} [\mathcal{I}(\mathcal{X} : \mathcal{Y}) - \mathcal{J}(\mathcal{X} : \mathcal{Y})_{\{\Pi_y\}}]. \quad (\text{B.15})$$

A grande importância dos estados gaussianos trouxe o estudo da discórdia quântica para estes sistemas. Dois artigos quase simultâneos foram publicados por Giorda e Paris [27] e Adesso e Datta [28] sobre este tema. Aqui nos baseamos na estrutura do artigo [27] para apresentar o conceito.

A MC de um estado gaussiano sempre pode ser escrita da forma por blocos (3.22) onde  $A = a\mathbb{I}$ ,  $B = \mathbb{I}$  e  $C = \text{diag}(c_1, c_2)$ , através de operações simpléticas locais correspondentes a operações unitárias locais que preservam o caráter gaussiano do estado. Algumas quantidades são preservadas sob essas transformações, elas são  $I_1 = \det A$ ,  $I_2 = \det B$ ,  $I_3 = \det C$  e  $I_4 = \det V$  e são referidas como *invariantes simpléticas*.

Para que possamos analisar a discórdia quântica gaussiana é necessário primeiro definir os MOPV como  $\Pi_{\mathbf{X}} = D(\mathbf{X})\rho_M D^\dagger(\mathbf{X})$ , onde  $\int d\mathbf{X}\Pi_{\mathbf{X}} = \mathbb{I}$ ,  $\mathbf{X}$  é um vetor real de duas dimensões e  $\rho_M$  é um estado gaussiano genérico com média nula e MC  $(V_M)_{11} = \alpha$ ,  $(V_M)_{22} = \beta$ ,  $(V_M)_{12} = (V_M)_{21} = \gamma$  com parâmetros fixos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Caso uma medida descrita por  $\Pi_{\mathbf{X}}$  seja feita no modo  $B$  de um sistema gaussiano bipartido, a distribuição de probabilidade dos resultados  $p(\mathbf{X})$  são gaussianas bimodais com MC  $(B+V_M)$ , enquanto o estado condicional  $\rho_{\mathbf{X}}$  do modo  $A$  é um estado gaussiano com média  $\mathbf{X}^T(B+V_M)^{-1}C^T$  e MC dada pelo complemento de Schur  $V_P = A - C(B+V_M)^{-1}C^T$ .

A discórdia quântica pode então ser escrita como

$$\delta(\rho) = S(\rho_B) - S(\rho) + \inf_{\{\Pi_{\mathbf{X}}\}} \int d\mathbf{X} p(\mathbf{X}) S(\rho_{\mathbf{X}}), \quad (\text{B.16})$$

e a forma geral da discórdia gaussiana quântica é

$$\delta(\rho) = h(\sqrt{I_2}) - h(d_-) - h(d_+) + \inf_{V_M} h(V_P) \quad (\text{B.17})$$

onde  $h(x) = (x + \frac{1}{2}) \log(x + \frac{1}{2}) - (x - \frac{1}{2}) \log(x - \frac{1}{2})$  e  $d_{\pm}$  são os autovalores simpléticos de  $\rho$  definidos como  $d_{\pm}^2 = \frac{1}{2}[\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 4I_4}]$ ,  $\Delta = I_1 + I_2 + 2I_3$ .

Ao derivar a equação (B.17) os autores comentam de dois fatos utilizados:

- (i) *A entropia de um estado gaussiano depende unicamente da MC.*
- (ii) *A MC  $V_P$  do estado condicional não depende do resultado da medida em si.*