



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA

Um Estudo do Movimento Browniano em AdS/CFT

Nathan Gomes Caldeira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Orientador: Henrique Boschi Filho

Rio de Janeiro

Março de 2020

Resumo

Um Estudo do Movimento Browniano em AdS/CFT

Nathan Gomes Caldeira

Orientador: Henrique Boschi Filho

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Nesse trabalho estudamos uma descrição holográfica para o movimento Browniano. Para tanto utilizamos o arcabouço da correspondência AdS/CFT. Após uma breve introdução ao assunto apresentamos uma descrição dual para o fenômeno baseada no estudo das flutuações da ponta de uma corda fundamental imersa em um espaçotempo tipo Anti de Sitter-BTZ. São descritos, a partir desse modelo, o deslocamento quadrático médio da partícula, a admitância do sistema, o espectro de frequências do ruído e o tempo de relaxação. Por fim é demonstrada a validade de um teorema de flutuação-dissipação relacionando grandezas obtidas a partir da descrição holográfica.

Palavras-chave: Movimento Browniano, AdS/CFT, Holografia, Teorema de flutuação-dissipação, Admitância, Tempo de relaxação.

Abstract

A Study of Brownian Motion in AdS/CFT

Nathan Gomes Caldeira

Orientador: Henrique Boschi Filho

Abstract da Tese de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

In this Work we study a holographic description for Brownian Motion. For that purpose we use the AdS/CFT correspondence. After a brief introduction to the subject we present a dual description for the phenomenon based on the study of the the fluctuations of a fundamental string endpoint in a Anti de Sitter-BTZ spacetime. We obtain from this model the mean square displacement, the admittance of the system, the noise power spectrum and the relaxation time. Finally, we show the validity of a fluctuation-dissipation theorem relating quantities obtained from the holographic description.

Keywords: Brownian motion, AdS/CFT correspondence, Fluctuation-Dissipation theorem, Admittance, Relaxation time.

Agradecimentos

Agradeço ao sistema de educação pública brasileiro que me educou desde os sete anos e fez possível que eu chegasse aqui.

Agradeço a minha mãe e a minha avó as pessoas que mais admiro no mundo. Ao meu pai e minha família.

Agradeço à família Mendonça por me acolher várias vezes, cumpro aqui minha promessa.

Agradeço ao meu orientador Henrique Boschi Filho, não somente pela enorme ajuda técnica mas por ser também uma ótima pessoa para se trabalhar e conviver.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES pelo suporte financeiro.

Sumário

Sumário	v
Lista de Figuras	vii
1 Introdução	1
2 A Correspondência AdS/CFT	6
2.1 Comentários Gerais Sobre a Correspondência	6
2.2 Cálculo da Temperatura de Um Buraco Negro em AdS	9
3 Movimento Browniano via Holografia	14
3.1 Movimento Browniano e Equação de Langevin	14
3.2 Movimento Browniano a Partir do Bulk	24
3.3 Condições de Fronteira e Cut-off's	30
3.4 O Dicionário	34
4 Teorema de Flutuação-Dissipação a partir do Bulk	37
4.1 Movimento Browniano do Ponto na Fronteira	37
4.2 Admitância, Espectro de Frequências e Tempo de Relaxação a partir do Bulk	42
4.3 O Teorema de Flutuação-Dissipação	50
4.3.1 Teoria de Resposta Linear	50
4.3.2 Checagem Explícita do Teorema de Flutuação-Dissipação	58

	vi
5 Conclusão	60
Referências Bibliográficas	62
A Normalização das Soluções	68
A.1 Normalização do Caso AdS_3 -BTZ	71

Lista de Figuras

- 3.1 A descrição dual para uma partícula executando movimento Browniano: uma corda que se estende da fronteira $r = \infty$ até o horizonte $r = r_h$. O buraco negro presente excita os modos da corda fazendo com que o ponto final dessa no infinito se mova, resultando no movimento Browniano como visto da fronteira. Figura retirada de [17] 26

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho consiste da união sobre a égide da correspondência AdS/CFT de duas áreas bastante diferentes da física. Aqui estudamos o movimento Browniano e quantidades relativas à sua descrição, algo normalmente feito em mecânica estatística, utilizando ferramentas da física de altas energias e da relatividade geral. Sendo assim há uma divisão clara do conteúdo dessa dissertação, por um lado os resultados conhecidos referentes a esse fenômeno e por outro a construção via dualidade AdS/CFT de sua descrição holográfica.

O movimento Browniano, assim nomeado em homenagem ao botânico inglês Robert Brown (1773-1858) que foi um dos primeiros estudiosos a descrevê-lo de forma mais profunda em 1827 [1], é o nome dado ao fenômeno que consiste no movimento aparentemente aleatório de partículas, por exemplo, pólen, ao serem suspensas em um fluido. Historicamente seu estudo está relacionado à comprovação da hipótese atômica que havia levantado acalorada controvérsia durante todo o século XIX, tendo assim, valor de estudo também nesse aspecto.

Esse fenômeno ocorre em geral para qualquer partícula imersa em um fluido a temperatura finita e até mesmo para os quarks presentes em um plasma de quarks e glúons. Mas apesar de mais conhecido nesse tipo de contexto há outras aplicações aparte dessa. É o que ocorre, por exemplo, em circuitos elétricos onde as flutuações térmicas dos elétrons dão origem a diferenças de potencial entre componentes. Ou ainda, no movimento de pequenos espelhos suspensos em um gás diluído.[2]

Um dos grandes resultados do jovem Einstein vivendo seu “ano miraculoso” foi o estudo do movimento Browniano. Para isso ele se valeu do uso da teoria cinética dos gases e assim de um ponto de vista atomista para descrever o fenômeno [3]. Seus resultados juntos com a posterior confirmação experimental desses por Perrin [citar] levaram à aceitação pela comunidade científica da hipótese atômica, já que os resultados quantitativos concordavam com as previsões advindas do trabalho teórico baseado nessa suposição.

Outro marco importante no estudo do movimento Browniano e de sistemas estatísticos em geral ocorreu com a apresentação por Kubo de uma série de trabalhos em que ele estudava a equação de Langevin e as propriedades de resposta linear (veja por exemplo [4],[5]), um de seus resultados mais interessantes é o conhecido teorema de flutuação-dissipação [4]. Esse teorema relaciona, como o nome diz, grandezas relativas à flutuação com outras associadas à dissipação. Ele se aplica tanto a sistemas clássicos quanto quânticos e é de extrema importância em física estatística por amarrar duas partes importantes da descrição de sistemas estatísticos. De fato, em geral, qualquer sistema em contato com um banho térmico experimentará fricção e dissipação, o que esse teorema nos diz é que esses efeitos não são independentes.

A correspondência AdS/CFT, por sua vez, foi conjecturada pela primeira vez em 1998 [6], ela estabelece a grosso modo uma relação dual entre uma teoria de cordas em um espaço de Anti de Sitter (bulk) e uma teoria de campos com simetria conforme na fronteira de tal espaço. Essa fronteira aqui tem um sentido particular, é o que se chama de fronteira conforme, mas a ideia é que ela é equivalente ao espaçotempo de Minkowski, sendo assim, um palco natural para o estudo da física que tem como cenário esse espaçotempo.

Desde seu surgimento essa conjectura tem sido utilizada para investigar as mais diferentes áreas da física. Uma de suas primeiras aplicações foi feita por Maldacena para o cálculo do loop de Wilson [7]. Nesse trabalho também é obtida a energia de um par quark-antiquark. Seguindo essa linha, uma próspera área de aplicação da correspondência que se formou foi no estudo da QCD, no que é conhecido muitas vezes como correspondência

AdS/QCD. Nesse caso busca-se modos de obter teorias duais que reproduzam aspectos chave da QCD, possibilitando a exploração de regimes de difícil acesso do modo usual. Nesse contexto o arcabouço da correspondência é particularmente útil para o estudo do regime de baixas energias pois esse é fortemente acoplado e não perturbativo. Podemos citar como exemplo de trabalhos nessa área, entre outros, o artigo de Polchinski e Strassler que estudam o espalhamento de glueballs [8] e [9] onde as massas desses glueballs são obtidos.

Também se tornou atualmente uma área ativa de pesquisa o estudo da correspondência no contexto da física da matéria condensada, a chamada correspondência AdS/CMT. Nesse caso tem sido estudados uma grande variedade de sistemas. Hoje já existem descrições duais para, por exemplo, supercondutores [10],[11] e líquidos de Fermi [12] entre outros.

Com o passar do tempo a correspondência se mostrou cada vez mais versátil, seu uso atualmente se estende pelas mais diversas aplicações. A abundância de deformações do espaço de Anti de Sitter, ou seja, espaçotempos que assintoticamente se comportam como AdS, e os diferentes *setups* (configurações) para cálculos com, por exemplo, a adição de branas (veja o próximo capítulo para um rápido comentário sobre branas) fizeram com que a aplicabilidade de seus métodos se multiplicasse. Além das já citadas áreas, descrições usando as ideias advindas da conjectura incluem, por exemplo, a correspondência fluido-gravidade [13], o cálculo de coeficientes de transporte, incluindo o importante resultado do limite inferior para a razão entre viscosidade e densidade de entropia $\frac{\eta}{s} \geq \frac{1}{4\pi}$ [14],[15] além do estudo da entropia de emaranhamento [16].

Nessa dissertação estudaremos mais um sistema do rico repertório de aplicações dessa dualidade, o movimento Browniano. Para isso seguiremos como referência principal o artigo “*Brownian Motion in AdS/CFT*” [17]. Esse não é o primeiro trabalho na literatura a calcular quantidades relativas ao movimento Browniano com a utilização de técnicas holográficas, antes tivemos, por exemplo, o cálculo do coeficiente de fricção por [18],

tempos de relaxação para o movimento de quarks em um plasma de quarks e gluons em [19] e o coeficiente de difusão desse movimento é calculado em [20] entre outros. A diferença é que [17] trata de forma detalhada a construção do modelo holográfico para o fenômeno, dando uma descrição bastante completa, calculando várias quantidades a partir do modelo de bulk, além de prover o interessante resultado de um teorema de flutuação-dissipação a partir de tais quantidades. Aqui revisitamos vários de seus resultados com objetivo geral de construir uma representação por meio da correspondência AdS/CFT que possibilite o estudo do movimento Browniano e, a partir disso, computar então, várias quantidades de interesse relativas a esse fenômeno. Tendo feito isso, o objetivo final é reproduzir o resultado conhecido como teorema de flutuação-dissipação a partir dessas grandezas.

De início para modelar o movimento Browniano precisamos introduzir um dual a um sistema de temperatura finita. Pela correspondência isso é feito introduzindo-se um buraco negro no espaço AdS [6][21]. Em particular usaremos um buraco negro do tipo Schwarzschild-AdS. Representaremos, então, o equivalente de bulk da partícula como uma corda que se estende do horizonte do buraco negro até a fronteira do nosso espaço tempo. Pela correspondência, essa fronteira representa a teoria não gravitacional que queremos modelar e assim a ponta da corda, que reside em tal fronteira, pode ser interpretada como a partícula de interesse. Os passos seguintes são obter e quantizar as soluções clássicas do movimento da corda e calcular a partir disso quantidades relativas a descrição do fenômeno, tendo como base essa descrição dual. Por fim reuniremos algumas dessas quantidades obtidas de modo a deduzir um teorema de flutuação-dissipação a partir da descrição holográfica desenvolvida.

A organização do restante será a seguinte. Primeiro no capítulo 2 citamos alguns resultados e interpretações úteis para o restante do trabalho relativas à correspondência, além disso, damos uma fórmula para a temperatura do buraco negro Schwarzschild-AdS, a qual utilizaremos no decorrer do trabalho. A seguir, no capítulo 3, estabelecemos de início

a descrição usual do Movimento Browniano utilizada em mecânica estatística. Partimos, depois disso, para a descrição em detalhes da configuração holográfica que usaremos para nossa modelagem. Estudamos as soluções para o caso do movimento Browniano em $1 + 1$ dimensões, quantizando-as e impondo condições de fronteira sobre elas. Já no capítulo 4 calculamos várias quantidades ligadas à descrição do movimento Browniano a partir da representação dual usando o buraco negro em AdS_3 . Entre outras grandezas obteremos a admitância e o espectro de potência do ruído. Após isso, derivamos o teorema de flutuação-dissipação com base na teoria de resposta linear. Por fim, usando as quantidades advindas do nosso modelo de bulk recuperamos o teorema de flutuação-dissipação usando somente a descrição holográfica.

Capítulo 2

A Correspondência AdS/CFT

2.1 Comentários Gerais Sobre a Correspondência

A ideia desse capítulo é fazer um apanhado geral de alguns conceitos e ideias relativos à correspondência AdS/CFT. Não ser dados resultados conhecidos no espírito de apresentá-los. Maiores detalhes poderão ser encontrados nas referências que serão fornecidas. Referências gerais de revisões introdutórias são, por exemplo, a de Ramallo [22] e o artigo conhecido como MAGOO em alusão a seus autores [23].

Como dito na introdução a correspondência *AdS/CFT* é a conjectura originalmente estabelecida por Maldacena em [6]. Ela afirma que a física da teoria de supercordas em um espaço tempo $AdS_{d+1} \times M$ onde M é alguma variedade de compactificação de dimensão $10 - d - 1$, em geral uma esfera, é equivalente à uma teoria de campos com simetria conforme (uma CFT na sigla em inglês). Atualmente a área engloba muitas variantes dessa definição inicial, de modo que é difícil dar uma ideia geral do que se trata. Basta aqui dizer que devido à sua flexibilidade esse arcabouço tem sido utilizado para estudar os mais diferentes sistemas, sendo possível relaxar vários dos requerimentos acima, permitindo-se, por exemplo, o estudo de sistemas que não possuem simetria conforme ou que não são nem ao menos relativísticos.

A seguir descrevemos alguns conceitos presentes na correspondência AdS/CFT úteis no decorrer do trabalho. Serão apenas descritos resultados e ideias superficialmente, uma maior profundidade pode ser obtida nas referências.

Branas: As assim chamadas p-branas são objetos não perturbativos em teorias de cordas e supercordas que se estendem por p dimensões espaciais, elas generalizam a ideia de partícula e corda para dimensões mais altas. Tais objetos podem ser usados como pontos finais para cordas abertas. No caso que as extremidades dessas nesses pontos obedecem condições tipo Dirichlet elas são conhecidas como Dp-Branas. Um fato importante sobre branas é que elas podem ser usadas para implementar simetrias do tipo $U(N)$. Elas também são objetos que gravitam, podendo ser vistas como fontes de cordas fechadas. Referências sobre branas incluem Polchinski *et al* [24], Johnson [25] e livros-texto mais modernos de teoria das cordas e sobre a correspondência AdS/CFT como [26] e [27].

Origens da correspondência: Originalmente, essa dualidade surgiu do estudo da equivalência entre duas visões sobre a física de um conjunto de N D3-branas sobrepostas. Primeiro, há uma visão que trata as branas como fontes para simetrias tipo $U(N)$ e $SU(N)$ nas cordas abertas que têm pontos finais nelas. O outro ponto de vista, por sua vez, envolve o fato de que as branas são objetos gravitacionais, haja vista que são soluções para supergravidade, interagindo assim também por meio de tal força.

Impondo-se que esse conjunto de branas seja solução das equações de Einstein faz com que ele em certo regime se torne o espaço de Anti de Sitter, o qual possui como fronteira no infinito de uma de suas coordenadas o espaço de Minkowski. Sobre certos limites, então, a primeira visão descreverá uma física do tipo Super Yang-Mills, enquanto que, a segunda passará a corresponder à teoria de cordas tipo IIB em $AdS_5 \times S_5$. Como essas visões devem ser equivalentes por se tratarem dos mesmos objetos, devemos ter que essas duas descrições são duais, representando dinamicamente a mesma física.

Para uma explicação pictórica e bastante esclarecedora nesse tópico veja, por exemplo, o capítulo 3 de [28]. Referências gerais são, entre outras, [6] e [23].

Introduzindo Temperatura na correspondência: A correspondência AdS/CFT também admite a descrição de sistemas com temperatura não nula. O modo de se fazer isso é introduzindo buracos negros do tipo AdS como duais a esses sistemas de temperatura finita. Nesse caso, associaremos a temperatura de Hawking do buraco negro presente com a temperatura da teoria de fronteira.

A origem de tal equivalência vem do estudo das chamadas black p-branas, que são objetos análogos a buracos negros. De modo semelhante ao argumento para o surgimento da equivalência convencional esses objetos levam à equivalência a temperatura finita. Para argumentos relacionados a equivalência com temperatura não nula veja, por exemplo, [6][21][23] e o capítulo 11 de [27].

Escalas de energia e coordenada holográfica: Seja o espaço de Anti de Sitter dado pela métrica

$$ds^2 = \frac{r^2}{\ell^2} [\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu] + \frac{\ell^2}{r^2} dr^2, \quad (2.1)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e ℓ é o raio do espaço AdS.

Para um observador na fronteira $r \rightarrow \infty$ (espaço de Minkowski) a métrica é, por sua vez, igual a

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + d\vec{x}^2. \quad (2.2)$$

Nesse caso o tempo é medido pela coordenada t , já para um observador em *AdS* o intervalo de tempo próprio, que ocorre quando esse observador se desloca somente no tempo, se relaciona com o medido por esse observador no espaço de Minkowski seguindo a fórmula

$$\Delta t_{prop} = \sqrt{g_{tt}} \Delta t = \frac{r}{\ell} \Delta t. \quad (2.3)$$

Sendo assim em termos dimensionais a energia medida por esses dois observadores é relacionada por

$$E_{prop} = \frac{\ell}{r} E. \quad (2.4)$$

Em *AdS* a escala de energia característica é dada pelo inverso do seu raio, $E_{prop} \sim \ell^{-1}$, isso ocorre por esse dar uma medida da curvatura desse espaço, dessa forma podemos escrever que a energia na teoria da fronteira se comporta como

$$E \sim \frac{r}{\ell^2}. \quad (2.5)$$

Isso significa que a coordenada holográfica pode ser relacionada à escala de energia da teoria dual. De modo que, se nos aproximamos de $r \rightarrow \infty$ acessamos energias mais altas do ponto de vista da teoria não gravitacional, ou seja, vamos ao seu regime UV. Inversamente se r é pequeno a energia na fronteira é também pequena e estamos no IR. Para um argumento semelhante veja o capítulo 4 de [29].

Tal relacionamento provê *insights* em como controlar a escala de energia que queremos estudar nos modelos holográficos que construímos. Se, por exemplo, limitamos a coordenada holográfica em AdS, estamos efetivamente impondo restrições também à energia acessada na teoria de fronteira associada. No decorrer do texto usaremos disso efetivamente para regular nosso modelo.

2.2 Cálculo da Temperatura de Um Buraco Negro em AdS

Nessa seção o objetivo é prover um resultado que será utilizado mais a frente no texto. Nominalmente a temperatura de um buraco negro em AdS. Aqui seguimos de perto o tratamento feito por Ramallo em [22].

De início, lembramos que a função de partição para o ensemble canônico é dada por

$$Z = Tr\{e^{-\frac{H}{T}}\}, \quad (2.6)$$

sendo H o operador Hamiltoniano, T sua temperatura e estamos tomando a constante de Boltzmann $k_B = 1$.

Além disso, para um operador qualquer \mathcal{O} a média térmica é dada por

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{Tr\{\mathcal{O}e^{-\frac{H}{T}}\}}{Z} = \frac{Tr\{\mathcal{O}e^{-\beta H}\}}{Z}, \quad (2.7)$$

sendo $\beta = \frac{1}{T}$.

Em teoria quântica de campos a temperatura finita uma receita para se calcular essas médias térmicas é utilizando o formalismo de tempo imaginário [30], nesse caso fazemos uma rotação de Wick de modo que o intervalo de tempo Δt convencional é levado em

$$\Delta t = t_f - t_i \rightarrow -i\Delta t_E \quad (2.8)$$

onde t_E é conhecido como tempo euclidiano.

Também é preciso fazer a identificação

$$\beta \iff \Delta t_E. \quad (2.9)$$

Esses passos são feitos para que haja uma equivalência do operador $e^{-\beta H}$ com o operador de evolução temporal $e^{-i(t_f-t_i)H}$. Isso, por sua vez, permite o uso do maquinário da integral de caminho para o cálculo de quantidades como (2.7). Uma última etapa necessária para levar em conta a operação de traço que também aparece em (2.7) é tomar o tempo como periódico com período β . Na representação por integral de caminho isso torna os estados final e inicial iguais como ocorre ao se tirar o traço.

A seguir queremos usar essas ideias para obter a temperatura de Hawking de um buraco negro. De início tomemos uma métrica euclidiana

$$ds^2 = g(r)[f(r)dt_E^2 + d\vec{x}^2] + \frac{1}{h(r)}dr^2, \quad (2.10)$$

aqui tomaremos as funções $f(r)$ e $h(r)$ tendo um zero de primeira ordem em $r = r_0$, onde será a localização do horizonte, e $g(r)$ tal que $g(r_0) \neq 0$. Assim para $r \approx r_0$ podemos fazer as aproximações

$$f(r) \approx f'(r)(r - r_0), \quad h(r) \approx h'(r)(r - r_0), \quad (2.11)$$

enquanto que tomamos $g(r) = g(r_0)$. Sendo assim, próximo ao horizonte teremos

$$ds^2 \approx g(r_0)[f'(r_0)(r - r_0)dt_E^2 + d\vec{x}^2] + \frac{1}{h'(r_0)(r - r_0)}dr^2. \quad (2.12)$$

Vamos então definir uma nova variável ρ tal que

$$\rho = 2\sqrt{\frac{r - r_0}{h'(r_0)}}. \quad (2.13)$$

Com essa definição temos

$$d\rho = \frac{1}{\sqrt{h'(r_0)(r - r_0)}} dr. \quad (2.14)$$

Seguindo, para completar a mudança de variáveis, estabelecemos ainda uma variável θ dada por

$$\theta = \frac{1}{2}\sqrt{g(r_0)f'(r_0)h'(r_0)}t_E, \quad (2.15)$$

e assim

$$d\theta = \frac{1}{2}\sqrt{g(r_0)f'(r_0)h'(r_0)}dt_E. \quad (2.16)$$

Nessas novas variáveis temos que

$$\begin{aligned} g(r_0)f'(r_0)(r - r_0)dt_E^2 + \frac{1}{h'(r_0)(r - r_0)}dr^2 &= \frac{4}{g(r_0)f'(r_0)h'(r_0)}\frac{g(r_0)f'(r_0)\rho^2}{4}d\theta^2 \\ &+ \frac{1}{h'(r_0)(r - r_0)}h'(r_0)(r - r_0)d\rho^2 \\ &= d\rho^2 + \rho^2d\theta^2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Assim, a parte da métrica que envolve t_E e r é localmente como a métrica de um plano em coordenadas esféricas. Essa métrica é própria para a região externa do buraco negro, fora do horizonte $\rho = 0$. Uma questão que surge é se o ponto $\rho = 0$ é singular nesse caso. O ponto $r = r_0$ (equivalente a $\rho = 0$) não deveria ser singular pois ele representa o horizonte do buraco negro, região que não é singular. Sendo assim esperamos que $\rho = 0$ também não tenha esse tipo de patologia. Segue que caso a coordenada θ não seja periódica com período 2π teremos o que é chamado de singularidade cônica para esse ponto.

Sendo assim, como a variável θ deve ser periódica com período 2π temos a identificação

$$\frac{1}{2}\sqrt{g(r_0)f'(r_0)h'(r_0)}t_E \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{g(r_0)f'(r_0)h'(r_0)}t_E + 2\pi. \quad (2.18)$$

Mas isso implica, para o tempo euclidiano, na identificação

$$t_E \Leftrightarrow t_E + \frac{4\pi}{\sqrt{g(r_0)f'(r_0)h'(r_0)}}, \quad (2.19)$$

ou seja, o tempo euclidiano também deverá ser periódico. Então pelos argumentos do início da seção teremos que o segundo termo do lado direito de (2.19) equivale ao inverso da temperatura e podemos fazer

$$T = \frac{\sqrt{g(r_0)f'(r_0)h'(r_0)}}{4\pi}. \quad (2.20)$$

Com essa fórmula é possível determinar a temperatura de Hawking para vários tipos de buraco negro. É o que de fato faremos a seguir para um caso de nosso interesse.

Seja o buraco negro em AdS_d dado em coordenadas de Poincaré por

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{z^2} [f(z)dt_E^2 + d\vec{X}_{d-2}^2 + \frac{dz^2}{f(z)}] \quad (2.21)$$

sendo que a função $f(z)$ é, por sua vez, igual a

$$f(z) = 1 - \frac{z^{d-1}}{z_0^{d-1}}, \quad (2.22)$$

logo nessas coordenadas horizonte se localiza em $z = z_0$.

Nesse caso, a coordenada z é a coordenada holográfica de AdS sendo que $0 < z < \infty$, com a fronteira desse espaço localizada em $z = 0$.

É direto observar então tal métrica se encaixa na forma geral (2.10) desde que sejam feitas as identificações

$$g = \frac{\ell^2}{z^2}, \quad h = \frac{z^2}{\ell^2}, \quad (2.23)$$

com função $f(z)$ sendo, naturalmente, equivalente à função f em (2.10).

As derivadas de f e h no horizonte são então

$$f'(z_0) = -\frac{(d-1)}{z_0}, \quad h'(z_0) = -\frac{(d-1)z_0}{\ell^2}. \quad (2.24)$$

A partir disso temos que

$$g(z_0)f'(z_0)h'(z_0) = \frac{(d-1)^2}{z_0^2}. \quad (2.25)$$

Dessa forma, chegamos que a temperatura de Hawking desse buraco negro, a partir de (2.20), é dada por

$$T = \frac{(d-1)}{4\pi z_0}. \quad (2.26)$$

Capítulo 3

Movimento Browniano via Holografia

Neste capítulo desenvolveremos o principal objetivo desse trabalho, uma descrição via holografia do movimento Browniano. Para tanto construiremos, a partir da correspondência *AdS/CFT*, uma representação dual para uma partícula em movimento Browniano. De início revisaremos alguns aspectos gerais da teoria usual do fenômeno. Isso nos dará uma base para o nosso estudo e nos proporcionará um entendimento maior do tipo de resultados que esperamos de uma descrição holográfica desse sistema. A seguir construímos a configuração dual gravitacional correspondente ao movimento Browniano e passamos ao tratamento das soluções das equações de movimento que surgem nesse contexto.

3.1 Movimento Browniano e Equação de Langevin

Nessa seção faremos uma breve e introdutória revisão da teoria do movimento Browniano no contexto da mecânica estatística convencional. Vamos apresentar então alguns conceitos e cálculos que serão úteis no decorrer do trabalho quando estivermos lidando com a derivação holográfica desse fenômeno.

De início consideremos a equação de Langevin que descreve o movimento Browniano

de uma partícula não relativística, para o caso unidimensional

$$\dot{p}(t) = -\gamma_0 p(t) + R(t), \quad (3.1)$$

onde $p = m\dot{x}$ é o momento não relativístico da partícula. Os termos que aparecem do lado direito representam por sua vez, respectivamente, um termo de fricção e uma força aleatória. Nesse contexto γ_0 é conhecido como coeficiente de fricção, servindo como uma medida para essa componente da força.

O quadro que podemos ter a partir dessa equação é que a partícula perde energia para o meio devido ao termo de fricção, enquanto que, simultaneamente, recebe impulsos aleatórios do banho térmico. Os detalhes desses impulsos aleatórios sendo modelados por $R(t)$.

Aqui assumiremos que $R(t)$ se comporta como um ruído branco, de modo que

$$\langle R(t) \rangle = 0, \quad \langle R(t)R(t') \rangle = \kappa_0 \delta(t - t'), \quad (3.2)$$

onde κ_0 é uma constante e $\langle \dots \rangle$ é a média sobre ensembles costumeira dos livros-texto, veja, por exemplo, [31].

Vale comentar que ao separarmos a força em duas componentes uma friccional e uma aleatória estamos fazendo apenas uma simplificação fenomenológica. De um ponto de vista microscópico ambas as partes dessa força tem a mesma origem: colisões com os constituintes do fluido.

Gostaríamos agora de resolver a equação (3.1) para obtermos mais detalhes sobre o movimento da partícula. Para isso note que sempre podemos tomar

$$p(t) = \tilde{p}(t)e^{-\gamma_0 t}. \quad (3.3)$$

Assim

$$\dot{p}(t) = \dot{\tilde{p}}(t)e^{-\gamma_0 t} - \gamma_0 \tilde{p}(t)e^{-\gamma_0 t} = \dot{\tilde{p}}(t)e^{-\gamma_0 t} - \gamma_0 p(t). \quad (3.4)$$

Substituindo em (3.1) obtemos, após o cancelamento dos termos, que

$$\dot{\tilde{p}}(t)e^{-\gamma_0 t} = R(t) \implies \tilde{p}(t) = \tilde{p}(0) + \int_0^t e^{\gamma_0 t'} R(t') dt'. \quad (3.5)$$

Logo

$$p(t) = p(0) + e^{-\gamma_0 t} \int_0^t e^{\gamma_0 t'} R(t') dt'. \quad (3.6)$$

Assim temos uma solução formal para (3.1) mas que depende, ao menos em princípio, dos detalhes do ruído $R(t)$. Levando-se isso em conta é um pouco difícil se ter uma ideia geral da dinâmica do problema apenas a partir de (3.6).

Podemos também calcular para esse processo o deslocamento quadrático médio como função do tempo. Tal quantidade nos dá uma medida quantitativa do movimento da partícula e, como veremos, independe (sobre certas hipóteses) da forma exata do ruído.

Para começar esse cálculo vamos reescrever (3.1) como

$$m\ddot{x}(t) = -\gamma_0 m\dot{x}(t) + R(t). \quad (3.7)$$

Multiplicando os dois lados por x e tomando a média temos

$$m\langle x\ddot{x} \rangle = -\gamma_0 m\langle x\dot{x} \rangle + \langle xR \rangle. \quad (3.8)$$

Repare agora que o ruído e a posição x são descorrelacionados de modo que o segundo termo do lado direito é nulo. Por outro lado também podemos escrever que

$$\frac{d(x\dot{x})}{dt} = x\ddot{x} + \dot{x}^2 \implies x\ddot{x} = \frac{d(x\dot{x})}{dt} - \dot{x}^2 \quad (3.9)$$

Substituindo e notando que a média comuta com a derivação, obtemos

$$\frac{d\langle x\dot{x} \rangle}{dt} = -\gamma_0 \langle x\dot{x} \rangle + \langle \dot{x}^2 \rangle. \quad (3.10)$$

Pelo teorema de equipartição da energia, temos

$$\frac{m}{2} \langle \dot{x}^2 \rangle = \frac{1}{2} T, \quad (3.11)$$

onde T é a temperatura e estamos tomando a constante de Boltzmann k_B igual a unidade.

Isso leva a reescrevermos (3.10) como

$$\frac{d\langle x\dot{x} \rangle}{dt} = -\gamma_0 \langle x\dot{x} \rangle + \frac{T}{m}. \quad (3.12)$$

A solução dessa equação diferencial é

$$\langle x\dot{x} \rangle = C e^{-\gamma_0 t} + \frac{T}{\gamma_0 m}, \quad (3.13)$$

com C uma constante.

Se tomarmos, sem perda de generalidade, $x(0) = 0$ então $\langle x(0)\dot{x}(0) \rangle = 0$. Isso leva a

$$C = -\frac{T}{\gamma_0 m}. \quad (3.14)$$

Mas também

$$\langle x\dot{x} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt}. \quad (3.15)$$

Logo, integrando os dois lados de (3.13), temos

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2T}{m\gamma_0} \left(\frac{e^{-\gamma_0 t}}{\gamma_0} + t + C' \right). \quad (3.16)$$

Podemos usar novamente que $x(0) = 0 \implies x^2(0) = 0$ para determinar que $C' = -\frac{2T}{m\gamma_0^2}$. Por fim podemos escrever então que o deslocamento quadrático médio é

$$\langle s^2(t) \rangle = \langle x^2 \rangle = \frac{2T}{m\gamma_0^2} \left(e^{-\gamma_0 t} + t\gamma_0 - 1 \right). \quad (3.17)$$

Esse resultado pode ser separado em dois regimes

$$\langle s^2(t) \rangle \approx \frac{T}{m} t^2, \quad t \ll \frac{1}{\gamma_0} \quad (3.18)$$

$$\langle s^2(t) \rangle \approx 2Dt, \quad t \gg \frac{1}{\gamma_0} \quad (3.19)$$

onde

$$D = \frac{T}{\gamma_0 m}, \quad (3.20)$$

é o coeficiente de difusão.

Se $t \ll \frac{1}{\gamma_0}$ estamos no chamado regime balístico. Nesse regime o deslocamento da partícula cresce com t e sua velocidade é aproximadamente $\sqrt{\frac{T}{m}}$, que é a velocidade dada pelo teorema da equipartição da energia. Como a velocidade é essencialmente constante nesse caso, o movimento pode ser considerado como inercial. Em outros termos, nesse intervalo de tempo inicial a partícula ainda não sofreu colisões o suficiente para que sua velocidade mude substancialmente.

No segundo caso, $t \gg \frac{1}{\gamma_0}$, já se passou tempo suficiente para a partícula sentir o efeito dos impulsos aleatórios recebidos do fluido. Nesse regime o deslocamento se comporta como $s \sim \sqrt{t}$, tendo assim uma assinatura característica de um passeio aleatório. Em certo sentido já houve uma “perda da memória” em relação ao movimento inicial.

A existência de dois regimes distintos para o movimento da partícula nos permite definir uma escala de tempo característica

$$t_{relax} \sim \frac{1}{\gamma_0}, \quad (3.21)$$

esse é denominado tempo de relaxação do sistema.

Tal escala nos permite quantificar o tempo para uma partícula no movimento Browniano termalizar e “esquecer” sua velocidade inicial.

Vamos agora passar ao caso mais geral da equação de Langevin, (3.1). Naquela equação consideramos que a função que quantifica a dissipação é constante e que o termo relacionado tem efeito instantâneo sobre o movimento da partícula, o momento no tempo t depende somente da fricção que ocorre nesse tempo. Em uma modelagem mais realista deveríamos levar em conta o histórico de colisões da partícula para descrever o efeito da fricção. Para tanto escrevamos a equação de movimento como

$$\dot{p} = - \int_{-\infty}^t dt' \gamma(t-t') p(t') + R(t) + K(t). \quad (3.22)$$

Veja que agora o termo de fricção depende do histórico da trajetória da partícula via uma função de memória $\gamma(t)$. Isso resolve esse problema. A expressão (3.22) é conhecida como equação de Langevin generalizada.

Outra hipótese idealizada embutida em (3.1), não suficientemente geral e que também leva a problemas, é a de que o ruído em tempos diferentes não está correlacionado como estabelece (3.2). Para solucionar isso faremos com que a força aleatória, por sua vez, satisfaça

$$\langle R(t) \rangle = 0, \quad \langle R(t)R(t') \rangle = \kappa(t-t'), \quad (3.23)$$

sendo $\kappa(t)$ alguma função arbitrária. Tal definição faz então com que essa função esteja diretamente relacionada às propriedades de flutuação do movimento Browniano em questão.

Tais mudanças resolvem também um problema ainda mais grave mostrado por Kubo em [4], que é o de que as hipóteses sobre a fricção e o ruído, presentes em (3.1) e em (3.2), levam a contradições na descrição do movimento.

Note ainda por fim que introduzimos também um termo $K(t)$ representando uma possível força externa agindo no sistema.

Para continuar a análise vamos fazer a transformada de Fourier de (3.22). Aqui iremos

usar a convenção de que tal transformada para uma função $f(t)$ é dada por

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t}. \quad (3.24)$$

Em particular devemos realizar a transformada do segundo termo de (3.22)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^t \gamma(t-t') p(t') e^{i\omega t} dt' dt. \quad (3.25)$$

A região de integração aqui é semi-plano $t \geq t'$. Se mudarmos as coordenadas para

$$y = t - t' \qquad t' = t', \quad (3.26)$$

a região de integração passa a ser o semi-plano $y \geq 0$ e poderemos escrever a transformada como

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^t \gamma(t-t') p(t') e^{i\omega t} dt' dt &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(y) p(t') e^{i\omega(y+t')} dt' dy \\ &= \int_0^{\infty} \gamma(y) e^{i\omega y} dy \int_{-\infty}^{\infty} p(t') e^{i\omega t'} dt'. \end{aligned} \quad (3.27)$$

A segunda integral do lado direito é apenas a transformada de Fourier de $p(t)$, enquanto que a primeira é algumas vezes chamada de transformada de Fourier-Laplace para $\gamma(t)$. Aqui denotaremos essa primeira integral por $\gamma[\omega]$.

Fazendo isso e as demais transformadas obtemos, por fim, de (3.22)

$$p(\omega) = \frac{R(\omega) + K(\omega)}{\gamma[\omega] - i\omega}, \quad (3.28)$$

onde foram usadas as propriedades da transformada de Fourier da derivada.

Tomando a média sobre ensembles de (3.22), o fato da média de $R(t)$ ser nula por (3.23) leva a

$$\frac{d\langle p(t) \rangle}{dt} = - \int_{-\infty}^t dt' \gamma(t-t') \langle p(t') \rangle + K(t), \quad (3.29)$$

isso já considerando que nem a força externa nem a função de memória possuem componentes aleatórios.

Agora suponha que a força externa seja dada por

$$K(t) = K_0 e^{-i\omega_0 t}. \quad (3.30)$$

Nesse caso sua transformada de Fourier será dada por

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_0 e^{i(\omega - \omega_0)t} dt = 2\pi K_0 \delta(\omega - \omega_0). \quad (3.31)$$

Se tomarmos a transformada de Fourier de (3.29) então, teremos

$$\langle p(\omega) \rangle = \frac{2\pi K_0 \delta(\omega - \omega_0)}{\gamma[\omega] - i\omega}. \quad (3.32)$$

Tomando a transformada inversa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) e^{-i\omega t}, \quad (3.33)$$

da equação (3.32), teremos já usando que a média comuta com a transformada, que

$$\langle p(t) \rangle = \frac{K_0 e^{-i\omega_0 t}}{\gamma[\omega_0] - i\omega_0}. \quad (3.34)$$

Com isso chegamos a uma relação entre o momento médio da partícula e a força externa agindo sobre essa.

A função

$$\mu(\omega) \equiv \frac{1}{\gamma[\omega] - i\omega}, \quad (3.35)$$

é conhecida como admitância¹. A admitância mede, de certa forma, com que facilidade o meio permite o movimento da partícula, dando o quanto da força externa aplicada é transferida para o movimento dessa. Aqui essa função tem um sentido análogo ao da admitância definida para circuitos elétricos. Se, por exemplo, tomarmos sua parte real, em nosso contexto isso estará relacionado à fricção a qual é semelhante à resistência no contexto dos sistemas elétricos.

¹Em várias referências como, por exemplo, [2], essa função (ou uma proporcional a ela) é conhecida também por mobilidade.

Assim, com essa nova definição, podemos escrever

$$\langle p(t) \rangle = \mu(\omega) K_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.36)$$

Pode-se definir para uma determinada quantidade $\mathcal{O}(t)$, seu espectro de frequências (power spectrum) por

$$I_{\mathcal{O}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \mathcal{O}(t_0) \mathcal{O}(t_0 + t) \rangle e^{i\omega t}. \quad (3.37)$$

Para o caso de um sistema estacionário o valor esperado no integrando acima é independente de t_0 , pois em tais casos as probabilidades (ou densidades de probabilidade) que definem os cálculos de expressões como $\langle \mathcal{O}(t_0) \mathcal{O}(t_0 + t) \rangle$ são independentes de translações no tempo [2].

O espectro de frequências definido acima provê a mesma informação que a função de dois pontos. Isso é formalizado pelo teorema de Wiener-Khintchine que estabelece que [2]

$$\langle \mathcal{O}(\omega) \mathcal{O}(\omega') \rangle = 2\pi \delta(\omega + \omega') I_{\mathcal{O}}(\omega). \quad (3.38)$$

Se considerarmos o caso em que não há força externa agindo sobre o sistema a equação (3.28) se reduz a

$$p(\omega) = \frac{R(\omega)}{\gamma[\omega] - i\omega} \iff p(\omega)(\gamma[\omega] - i\omega) = R(\omega). \quad (3.39)$$

Isso leva a escrevermos

$$\langle p(\omega) p(\omega') \rangle (\gamma[\omega] - i\omega)(\gamma[\omega'] - i\omega') = \langle R(\omega) R(\omega') \rangle, \quad (3.40)$$

onde já foi usado que o termo, $\gamma[\omega] - i\omega$, não contém componentes aleatórios e portanto sai da média. Sendo assim obtemos por (3.38) que

$$\begin{aligned} I_p(\omega)(|\gamma[\omega] - i\omega|^2) &= I_R(\omega) \\ \implies I_p(\omega) &= \frac{I_R(\omega)}{|\gamma[\omega] - i\omega|^2} = \frac{\kappa(\omega)}{|\gamma[\omega] - i\omega|^2}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Temos agora relações ligando quantidades relativas ao movimento da partícula com as funções $\gamma(t)$ e $\kappa(t)$ que aparecem na equação de Langevin generalizada, (3.22), e na equação (3.23). Veremos, mais a frente, na sessão 4.3.2, que essas quantidades são relacionadas por um teorema de flutuação-dissipação. Aqui faremos o caso mais simples a título de ilustração. Considere a equação de Langevin não generalizada, (3.1), para esse caso podemos escrever (3.41) como

$$I_p(\omega) = \frac{I_R(\omega)}{|\gamma_0 - i\omega|^2} = \frac{\kappa(\omega)}{|\gamma_0 - i\omega|^2}. \quad (3.42)$$

A partir disso temos, lembrando (3.2), que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle p(t_0)p(t_0+t) \rangle e^{i\omega t} &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dt \langle R(t_0)R(t_0+t) \rangle e^{i\omega t}}{\gamma_0^2 + \omega^2} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dt \kappa_0 \delta(t) e^{i\omega t}}{\gamma_0^2 + \omega^2} \\ &= \frac{\kappa_0}{\gamma_0^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Tomando a transformada inversa dos dois lados da equação obtemos

$$\begin{aligned} \langle p(t_0)p(t_0+t) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\kappa_0 e^{-i\omega t}}{\gamma_0^2 + \omega^2} \\ &= -i \left(\frac{\kappa_0 e^{-i\omega t}}{\omega - i\gamma_0} \right) \Big|_{\omega=-i\gamma_0} \\ &= \frac{\kappa_0 e^{-\gamma_0 t}}{2\gamma_0}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde foi utilizada a formula integral de Cauchy para o cálculo.

Esse resultado vale para qualquer valor de t_0 e para todo $t \geq 0$. Em particular se $t = 0$ vale

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\kappa_0}{2\gamma_0}. \quad (3.45)$$

Mas pelo teorema da equipartição da energia temos que

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{T}{2}. \quad (3.46)$$

Logo

$$\gamma_0 = \frac{\kappa_0}{2mT}. \quad (3.47)$$

Este é o exemplo mais simples de um teorema de flutuação-dissipação, já que relaciona uma quantidade ligada à dissipação, γ_0 , com uma ligada à flutuação, o coeficiente κ_0 .

Continuando as generalizações, para o caso da equação de Langevin generalizada podemos definir o tempo de relaxação como

$$t_{\text{relax}} = \left[\int_0^\infty dt \gamma(t) \right]^{-1} = \frac{1}{\gamma[\omega = 0]} = \mu(\omega = 0). \quad (3.48)$$

Para o caso particular que a função de memória tem um pico pronunciado próximo à origem o efeito retardado para o termo de fricção pode ser ignorado. Nessa aproximação podemos considerar que na integral presente no primeiro termo do lado direito de (3.22)

$$\int_0^\infty dt' \gamma(t - t') p(t'), \quad (3.49)$$

$t \sim t'$, de modo que podemos fazer

$$\int_0^\infty dt' \gamma(t - t') p(t') \approx \int_0^\infty dt' \gamma(t') p(t) = \frac{1}{t_{\text{relax}}} p(t). \quad (3.50)$$

Sendo dessa forma, nesse caso recuperamos o que tínhamos inicialmente para a equação de Langevin no caso mais simples, (3.1), de modo que essa definição para o tempo de relaxação para o caso generalizado parece ser bastante razoável.

3.2 Movimento Browniano a Partir do Bulk

A correspondência *AdS/CFT* estabelece que uma teoria de cordas em AdS_d é equivalente a uma CFT com uma dimensão a menos. Pela equivalência também temos que o caso de temperatura finita é dual a um buraco negro em AdS, sendo assim devemos introduzir esse elemento em nossa descrição. Em particular, usaremos a geometria do buraco negro tipo Schwarzschild em AdS_d com métrica

$$ds^2 = \frac{r^2}{\ell^2} [-h(r) dt^2 + d\vec{X}_{d-2}^2] + \frac{\ell^2}{r^2 h(r)} dr^2, \quad h(r) = 1 - \left(\frac{r_H}{r} \right)^{d-1}. \quad (3.51)$$

Ele é dual a uma CFT com temperatura igual à sua temperatura de Hawking. Esse é o mesmo buraco negro da equação (2.21) com a mudança de coordenadas

$$\frac{\ell}{z} \rightarrow \frac{r}{\ell} \quad (3.52)$$

Como vimos na seção 2.2, pela equação (2.26) a temperatura desse buraco negro é então, já usando $z_0 = \frac{\ell^2}{r_H}$, igual a

$$T = \frac{1}{\beta} = \frac{(d-1)r_H}{4\pi\ell^2} \quad (3.53)$$

sendo que, nas expressões acima, ℓ é o raio do espaço AdS e d sua dimensão, enquanto que r é a coordenada holográfica.

Nessa Geometria (3.51), vamos considerar uma corda fundamental suspensa da fronteira, $r = \infty$, até o horizonte do buraco negro em $r = r_h$. O objetivo é obter uma teoria dual à de uma partícula pesada carregada. Esse dicionário é inspirado em [7] onde Maldacena o usou para modelar quarks pesados para o cálculo do loop de Wilson. Uma descrição de como a ponta de uma corda aberta terminando em uma brana nesse contexto pode ser vista como um quark é encontrada na seção 14.3 de [32].

Agora, nesse contexto, as coordenadas \vec{X} em $r = \infty$ representam a posição da partícula na teoria da fronteira. Desse ponto de vista “externo”, se estamos em um ambiente a uma temperatura T não nula, tal partícula deve descrever um movimento Browniano. Por outro lado para a teoria dual o que ocorre é que o buraco negro ao emitir radiação excita a corda, como resultado sua posição em $r = \infty$ passa a flutuar, fazendo com que efetivamente sua ponta descreva o movimento observado. Partamos então para a descrição de bulk dessas excitações. Mas, antes de começarmos, devemos dizer que aqui vamos estudar essa corda numa aproximação de prova, ou seja, vamos ignorar a reação (*backreaction*) da geometria a ela.

Sendo assim, consideremos, por um momento então, a métrica com formato geral dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + G_{IJ}dX^I dX^J \quad (3.54)$$

onde x^μ varre a coordenada temporal e a coordenada holográfica, enquanto que $I, J = 1, 2, \dots, d - 2$ são os índices das coordenadas espaciais não holográficas. No nosso caso consideraremos ainda que os coeficientes da métrica independem das coordenadas X^I .

Aqui, como já dito, teremos uma corda que se estende ao longo da direção holográfica e estudaremos o regime de pequenas perturbações para o seu movimento nas direções X^I , já que na fronteira essas serão as coordenadas que representarão a posição da partícula de interesse. Para fazer isso primeiro devemos escrever a ação de Nambu-Goto para a corda no chamado calibre estático.

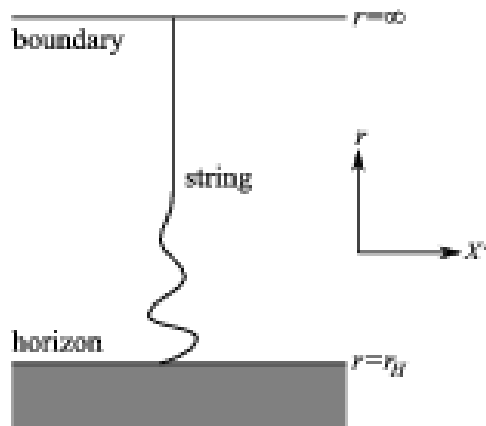


Figura 3.1: A descrição dual para uma partícula executando movimento Browniano: uma corda que se estende da fronteira $r = \infty$ até o horizonte $r = r_h$. O buraco negro presente excita os modos da corda fazendo com que o ponto final dessa no infinito se mova, resultando no movimento Browniano como visto da fronteira. Figura retirada de [17]

Como a ação de Nambu-Goto é dada por

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int dx^2 \sqrt{-\det \gamma_{\mu\nu}} \quad (3.55)$$

onde $\gamma_{\alpha\beta} = G_{mn} \partial_\alpha X^m \partial_\beta X^n$ é a métrica induzida na folha de mundo e G_{mn} a métrica (3.54).

No calibre estático, fazemos as identificações

$$\tau = t, \quad \sigma = r, \quad X^I = X^I(t, r). \quad (3.56)$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned}
\gamma_{tt} &= G_{mn}\partial_t X^m \partial_t X^n \\
&= g_{tt} + G_{IJ}\partial_t X^I \partial_t X^J \\
\gamma_{rr} &= G_{mn}\partial_r X^m \partial_r X^n \\
&= g_{rr} + G_{IJ}\partial X^I \partial X^J \\
\gamma_{tr} &= G_{mn}\partial_t X^m \partial_r X^n \\
&= G_{IJ}\partial_t X^I \partial_r X^J.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

E assim

$$\begin{aligned}
\det \gamma_{\alpha\beta} &= \gamma_{tt}\gamma_{rr} - (\gamma_{tr})^2 \\
&= (g_{tt} + G_{IJ}\partial_t X^I \partial_t X^J)(g_{rr} + G_{IJ}\partial X^I \partial X^J) - (G_{IJ}\partial_t X^I \partial_r X^J)^2 \\
&= g_{tt}g_{rr} + g_{tt}G_{IJ}\partial X^I \partial X^J + g_{rr}G_{IJ}\partial_r X^I \partial_r X^J \\
&\quad + G_{IJ}G_{KL}\partial_t X^I \partial_t X^I \partial_r X^K \partial_r X^L - (G_{IJ}\partial_t X^I \partial_r X^J)^2 \\
&= g_{tt}g_{rr}[1 + g^{tt}G_{IJ}\partial_t X^I \partial_t X^J + g^{rr}G_{IJ}\partial_r X^I \partial_r X^J + \mathcal{O}((\partial_\mu X^I \partial_\nu X^J)^2)] \tag{3.58}
\end{aligned}$$

Logo

$$\sqrt{-\det \gamma_{\alpha\beta}} = \sqrt{-g_{tt}g_{rr}} \sqrt{1 + g^{tt}G_{IJ}\partial_t X^I \partial_t X^J + g^{rr}G_{IJ}\partial_r X^I \partial_r X^J + \mathcal{O}((\partial_\mu X^I \partial_\nu X^J)^2)} \tag{3.59}$$

onde $\mathcal{O}((\partial_\mu X^I \partial_\nu X^J)^2)$ representa termos de ordem quadrática no produto de duas derivadas.

Como estamos interessados no regime de pequenas perturbações para X^I , vamos expandir o integrando somente até primeira ordem nos produtos $\partial_\mu X^I \partial_\nu X^J$. Isso é análogo em certo sentido a um limite não relativístico². Esperamos que essa aproximação se reflita numa dinâmica também não relativística para a teoria dual na fronteira e que obtenhamos assim para tal teoria resultados semelhantes aos da sessão 3.1.

²No caso em que o espaçotempo background é Minkowski em 4 dimensões ao invés de AdS_5 essa expansão leva a algo análogo à ação não relativística de uma partícula livre tendo um termo tipo massa e um termo tipo energia cinética não relativística.

Fazendo essa expansão e descartando um termo que não influencia nas equações de movimento podemos escrever

$$S_{NG} \approx -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int dx^2 \sqrt{-g(x)} g^{\mu\nu}(x) G_{IJ}(x) \frac{\partial X^I}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^J}{\partial x^\nu} \equiv S_{NG}^{(L)}. \quad (3.60)$$

essa será a ação que usaremos a partir de agora para estudar as flutuações da corda.

Pelas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\delta S}{\delta X^K} = 0 \iff \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha X^K)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^K}, \quad (3.61)$$

a equação de movimento obtida a partir de (3.60) é

$$\nabla^\mu (G_{IJ} \partial_\mu X^I) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} G_{IJ} \partial_\nu X^J) = 0, \quad (3.62)$$

onde ∇^μ é a derivada covariante com respeito a $g_{\mu\nu}$.

Voltando à métrica (3.51) vamos especificar mais nosso problema tomando o caso de uma métrica para um buraco negro em AdS_3 , nesse caso aquela métrica se torna

$$ds^2 = -\frac{r^2 - r_H^2}{\ell^2} dt^2 + \frac{r^2}{\ell^2} dX^2 + \frac{\ell^2}{r^2 - r_H^2} dr^2, \quad (3.63)$$

essa é a métrica do buraco negro não-rotacional conhecido como BTZ em homenagem a seus descobridores (Bañados, Teitelboim e Zanelli) [33].

A partir dessa métrica podemos calcular

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-g_{tt}g_{rr}} = 1, \quad G_{IJ} = G_{XX} = \frac{r^2}{\ell^2} \quad (3.64)$$

Nessas coordenadas temos então que a equação de movimento pode então ser escrita como

$$\begin{aligned} & \frac{r^2}{r^2 - r_H^2} \partial_t^2 X + \partial_r \left(\frac{r^2 - r_H^2}{\ell^2} \frac{r^2}{\ell^2} \partial_r X \right) = 0 \\ \implies & \frac{\rho^2}{\rho^2 - 1} \partial_t^2 X + \frac{r_H^2}{\ell^4} \partial_\rho ((\rho^2 - 1) \rho^2 \partial_\rho X) = 0 \\ \implies & \frac{\ell^4}{r_H^2} \partial_t^2 X + \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2} \partial_\rho ((\rho^2 - 1) \rho^2 \partial_\rho X) = 0, \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde definimos

$$\rho \equiv \frac{r}{r_c}. \quad (3.66)$$

Se expandirmos X em modos, ou seja, se fizermos

$$X(\rho, t) = e^{-i\omega t} f_\omega(\rho) \quad (3.67)$$

A equação (3.65) pode ser escrita como

$$\left[\nu^2 + \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2} \partial_\rho (\rho^2 (\rho^2 - 1) \partial_\rho) \right] f_\omega = 0, \quad (3.68)$$

onde redefinimos as constantes de modo que

$$\nu \equiv \frac{\ell^2 \omega}{r_H} = \frac{\beta \omega}{2\pi} \quad (3.69)$$

Duas soluções para tal equação são dadas pelas funções

$$f_\omega^{(\pm)} = \frac{1}{1 \pm i\nu} \frac{\rho \pm i\nu}{\rho} \left(\frac{\rho - 1}{\rho + 1} \right)^{\pm i\nu/2} = \frac{1}{1 \pm i\nu} \frac{\rho \pm i\nu}{\rho} e^{\pm \frac{i\nu}{2} \log\left(\frac{\rho-1}{\rho+1}\right)} = \frac{1}{1 \pm i\nu} \frac{\rho \pm i\nu}{\rho} e^{\pm i\nu r_*}, \quad (3.70)$$

onde

$$r_* \equiv \frac{\ell^2}{2r_H} \log\left(\frac{r - r_H}{r + r_H}\right) = \frac{\ell^2}{2r_H} \log\left(\frac{\rho - 1}{\rho + 1}\right), \quad (3.71)$$

é a chamada coordenada tortoise (tartaruga).

O Wroskiano, $\mathcal{W}(\rho)$, dessas soluções é

$$\mathcal{W}(\rho) = \frac{2i\nu}{\rho^2(\rho^2 - 1)}, \quad (3.72)$$

ou seja, elas são linearmente independentes se $\nu \neq 0$. De fato se $\nu = 0$ nossas duas soluções se tornam somente uma ($f_\omega = 1$), tornando o Wroskiano trivialmente nulo.

É interessante notar ainda que próximo ao horizonte essas soluções se comportam como

$$f_\omega^{(\pm)} \sim e^{\pm i\nu r_*} \quad (\rho \sim 1). \quad (3.73)$$

Representando, dessa forma, modos que entram e saem do buraco negro.

3.3 Condições de Fronteira e Cut-off's

Devemos agora nos voltar para as condições de fronteira que iremos impor sobre as soluções da equação de movimento. De início notemos que caso nossa corda se estenda do buraco negro até a fronteira sua energia seria infinita. Para ver isso precisamos de um modo de calcular a energia de uma determinada configuração da corda. Para tanto, vamos explorar o fato de que a ação tem unidades de energia \times tempo. Escolhendo o calibre estático, ou seja, $\sigma = r, \tau = t$, se uma determinada solução for independente do tempo, o fato de as componentes da métrica serem funções somente de r nos permite escrever

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int dx^2 \sqrt{-(g_{tt} + g_{rr}\dot{X}^2)(g_{rr} + G_{XX}X'^2) + G_{XX}\dot{X}X'} \\ &= -\frac{T}{2\pi\alpha'} \int dr \sqrt{-g_{tt}(g_{rr} + G_{XX}X'^2)}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

onde $T = \int dt$. De outro modo: podemos integrar a parte temporal da ação e separá-la do restante nesse caso.

Sendo assim podemos escrever que a energia é

$$E = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int dr \sqrt{-g_{tt}(g_{rr} + G_{XX}X'^2)}. \quad (3.75)$$

Exigindo ainda que $X' = 0$, ou seja, uma solução constante, que de fato existe para o nosso caso, tal expressão se simplifica para

$$E = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int dr \sqrt{-g_{tt}g_{rr}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{r_h}^{\infty} dr \sqrt{-g_{tt}g_{rr}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{r_h}^{\infty} dr = \infty \quad (3.76)$$

Ou seja, obtemos uma energia infinita para a corda! Precisamos investigar de onde vem essa contribuição infinita para a massa da partícula.

Essa configuração, por ter $\dot{X} = 0$, implica que a a corda não se move com o passar do tempo, em particular a ponta da corda, que representa a partícula, também não se move nesse caso. Sendo assim, essa energia infinita que encontramos não vem de uma contribuição cinética estando relacionada à massa da partícula. Dessa forma, isso

significaria que tal partícula possui uma massa infinita. Mas, se isso ocorre, a partícula não pode executar movimento algum e não há movimento Browniano propriamente dito. Somos levados assim a introduzir um corte no UV de modo que tal energia seja finita e ocorra movimento. Um modo de obtermos esse cut-off é utilizar uma brana posicionada próximo à fronteira, ou seja, em uma posição em $r = r_c$ tal que

$$\rho_c = \frac{r_c}{r_H} \gg 1 \quad (3.77)$$

Branas são objetos não perturbativos em teoria das cordas que diferentemente das cordas comuns se estendem em mais dimensões e que possuem propriedades gravitacionais. Tais objetos definem uma área de pesquisa própria, algumas revisões são dadas na seção 2.1. Nesse momento utilizaremos uma brana apenas como um regulador para o UV da teoria. Em nosso contexto a trataremos, ainda, em uma aproximação de prova, sem levar em conta perturbações que a presença desta poderia causar à configuração do espaçotempo que estamos estudando.³

Após implementarmos isso, nessa nova geometria a energia será dada por

$$E = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{r_h}^{r_c} dr \sqrt{-g_{tt}g_{rr}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{r_h}^{r_c} dr = \frac{r_c - r_H}{2\pi\alpha'} = \frac{l^2(\rho_c - 1)}{\alpha'\beta} \quad (3.78)$$

Essa brana passa então a conter o ponto final da corda que estamos estudando, dessa forma, devemos impor condições de fronteira sobre nossas soluções em tal posição. Como queremos estudar o movimento Browniano e a posição da corda na brana (anteriormente na fronteira) determina o movimento da partícula na CFT, vamos impor condições tipo Neumann nessa superfície, de modo que sua extremidade esteja livre para se movimentar, ou, de outro modo, faremos $\partial_r X = 0$ para $r = r_c$.

Vamos então por em prática tal *setup*. De início notemos que podemos escrever a solução geral da equação de movimento como

$$f_\omega(\rho) = A[f^+(\rho) + Bf^-(\rho)] \quad (3.79)$$

³Um argumento de porque essa aproximação é boa pode ser encontrado na seção 3.6 de [34], esse trabalho provê também uma boa introdução para a correspondência em geral.

onde

$$f^\pm(\rho) = \frac{1}{1 \pm i\nu} \frac{\rho \pm i\nu}{\rho} \left(\frac{\rho - 1}{\rho + 1} \right)^{\pm \frac{i\nu}{2}}$$

de onde vem

$$\begin{aligned} \partial_\rho f_\omega^\pm(\rho) &= \frac{1}{1 \pm i\nu} \left[\left(-\frac{\rho \pm i\nu}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{\rho - 1}{\rho + 1} \right)^{\pm \frac{i\nu}{2}} \pm \frac{i\nu}{2} \left(\frac{\rho \pm i\nu}{\rho} \right) \left(\frac{\rho - 1}{\rho + 1} \right)^{\pm \frac{i\nu}{2} - 1} \left(\frac{1}{\rho + 1} - \frac{\rho - 1}{(\rho + 1)^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{1 \pm i\nu} \left(\frac{\rho - 1}{\rho + 1} \right)^{\pm \frac{i\nu}{2} - 1} \left[\left(-\frac{\rho \pm i\nu}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{\rho - 1}{\rho + 1} \right) \pm \frac{i\nu}{2} \left(\frac{\rho \pm i\nu}{\rho} \right) \left(\frac{2}{(\rho + 1)^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{1 \pm i\nu} \left(\frac{\rho - 1}{\rho + 1} \right)^{\pm \frac{i\nu}{2} - 1} \frac{1}{(\rho + 1)^2} \left[\left(\frac{\mp i\nu}{\rho^2} \right) (\rho^2 - 1) \pm i\nu \left(\frac{\rho \pm i\nu}{\rho} \right) \right] \\ &= \frac{1}{1 \pm i\nu} \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\rho - 1}{\rho + 1} \right)^{\pm \frac{i\nu}{2} - 1} \frac{1}{(\rho + 1)^2} [\mp i\nu \rho^2 \pm i\nu \pm i\nu \rho^2 - i\nu^2 \rho] \\ &= \frac{\pm i\nu (1 \pm i\nu \rho)}{1 \pm i\nu} \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\rho - 1}{\rho + 1} \right)^{\pm \frac{i\nu}{2} - 1} \frac{1}{(\rho + 1)^2} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Impondo condições de Neumann em $\rho = \rho_c$ temos

$$\partial_\rho f_\omega|_{\rho=\rho_c} = 0 \implies B = -\frac{\partial_\rho f^+(\rho)|_{\rho=\rho_c}}{\partial_\rho f^-(\rho)|_{\rho=\rho_c}} = \frac{1 - i\nu}{1 + i\nu} \frac{1 + i\rho_c \nu}{1 - i\rho_c \nu} \left(\frac{\rho_c - 1}{\rho_c + 1} \right)^{i\nu} \equiv e^{i\theta_\omega} \quad (3.81)$$

Dessa forma, B é uma fase pura. Próximo ao horizonte do buraco negro isso implica que os modos $X(t, r)$ se comportam como

$$X(t, r) = f_\omega e^{-i\omega t} \sim e^{-i\omega(t-r_*)} + e^{i\theta_\omega} e^{-i\omega(t+r_*)} \quad (3.82)$$

Ou seja, nesse regime as soluções consistem de um modo que sai do horizonte (primeiro termo) e de um modo que entra nesse horizonte após ser refletido em $\rho = \rho_c$ (segundo termo). O fato de as amplitudes serem iguais para os modos que entram e para os que saem do buraco negro indica este está em equilíbrio térmico à temperatura T .

Note porém que ainda temos uma indefinição em nossas soluções para $\rho = 1$. Essas se comportam de modo indeterminado no horizonte do buraco negro. Para resolver isso e

permitir uma normalização de nossas soluções, provendo uma nova regularização para a teoria, agora no IR, vamos impor uma segunda condição de fronteira próximo ao horizonte em

$$\rho = 1 + 2\epsilon, \quad \epsilon \ll 1 \quad (3.83)$$

Vamos escolher aqui condições tipo Neumann mas no limite em que $\epsilon \rightarrow 0$ condições tipo Dirichlet produziriam o mesmo resultado.

Já usando então que $\epsilon \ll 1$, tal condição de fronteira implica

$$B = \frac{1 - i\nu}{1 + i\nu} \frac{1 + i(1 + 2\epsilon)\nu}{1 - i(1 + 2\epsilon)\nu} \left(\frac{2\epsilon}{2 + 2\epsilon} \right)^{i\nu} \approx \frac{1 - i\nu}{1 + i\nu} \frac{1 + i\nu}{1 - i\nu} \epsilon^{i\nu} = \epsilon^{i\nu} = e^{-i\nu \log(\frac{1}{\epsilon})} \quad (3.84)$$

Nessa altura ϵ é um parâmetro muito pequeno mas livre, o que podemos usar para fazer o casamento das duas expressões que obtivemos para B . De fato, podemos sempre escolher um ϵ “pequeno” de modo que (3.81) e (3.84) sejam iguais.

Podemos notar então que se levarmos $\nu \rightarrow \nu + \Delta\nu = \nu + \frac{2\pi}{\log(\frac{1}{\epsilon})}$ então B (na equação (3.84)) não se altera. Por outro lado como $\frac{2\pi}{\log(\frac{1}{\epsilon})} \ll 1$ nossa outra expressão para B , equação(3.81), essencialmente também não muda. Tal propriedade implica que ν é discreto, sendo que este varia como

$$\Delta\nu = \frac{2\pi}{\log(\frac{1}{\epsilon})} \quad (3.85)$$

Em termos da frequência, temos, alternativamente

$$\Delta\omega = \frac{4\pi^2}{\beta \log(\frac{1}{\epsilon})} \quad (3.86)$$

Tendo determinado B nos resta agora encontrar o valor da constante A . Isso pode ser realizado normalizando-se nossa solução. Um modo padrão para implementar isso consiste em usar o chamado produto escalar de Klein-Gordon. Os detalhes de tal conta são um pouco extensos e estão descritos no apêndice A.

Após esses passos podemos escrever que

$$X(t, \rho) = \sum_{\omega > 0} [a_\omega u_\omega(t, \rho) + a_\omega^\dagger u_\omega^*(t, \rho)] \quad (3.87)$$

onde a soma é sobre ω discretizado de acordo com a equação (3.86). Já a base u_ω , normalizada, é dada por

$$u_\omega(t, \rho) = \sqrt{\frac{\alpha' \beta}{2\ell^2 \omega \log(\frac{1}{\epsilon})}} [f_\omega^{(+)}(\rho) + B f_\omega^{(-)}(\rho)] e^{-i\omega t} \quad (3.88)$$

com B dado por (3.81).

Os coeficientes da expansão, a_ω , por sua vez satisfazem

$$[a_\omega, a_{\omega'}] = [a_\omega^\dagger, a_{\omega'}^\dagger] = 0, \quad [a_\omega, a_{\omega'}^\dagger] = \delta_{\omega\omega'}, \quad (3.89)$$

e são interpretados como operadores usuais de criação e aniquilação.

Nessa altura temos que nossas soluções estão quantizadas, de modo que podemos prosseguir para a interpretação dessas no nosso contexto de interesse e para o estudo do comportamento térmico que elas apresentam sobre a ação da radiação do buraco negro.

3.4 O Dicionário

Agora que sabemos as expressões quânticas para os modos da corda no interior do espaçotempo, podemos trabalhar a descrição da dinâmica da extremidade da corda próxima à fronteira. Isso nos proporcionará uma caracterização do movimento da partícula externa.

Para clarificar melhor as relações do interior com a fronteira vamos observar como os modos se comportam em duas regiões: (i) se aproximando do horizonte do buraco negro e (ii) próximo à fronteira.

A partir de (3.82), temos que na vizinhança do horizonte ($\rho \sim 1$), a expansão (3.87) se comporta como

$$X(t, \rho \sim 1) = \sum_{\omega > 0} \sqrt{\frac{\alpha' \beta}{2\ell^2 \omega \log(\frac{1}{\epsilon})}} [(e^{-i\omega(t-r_*)} + e^{i\theta_\omega} e^{-i\omega(t+r_*)}) a_\omega + c.h.] \quad (3.90)$$

onde *c.h.* é uma abreviação para conjugado hermitiano.

Desse modo os coeficientes (operadores) a_ω estão relacionados à amplitude dos modos que entram e saem do buraco negro.

Por outro lado no limite UV, ou seja, próximo à brana em $\rho = \rho_c$, temos

$$\begin{aligned} Bf_{\omega}^{-}(\rho_c) &= \frac{1 - i\nu}{1 + i\nu} \frac{1 + i\rho_c\nu}{1 - i\rho_c\nu} \left(\frac{\rho_c - 1}{\rho_c + 1}\right)^{i\nu} \frac{1}{1 - i\nu} \frac{\rho_c - i\nu}{\rho_c} \left(\frac{\rho_c - 1}{\rho_c + 1}\right)^{-\frac{i\nu}{2}} \\ &= \frac{1 + i\rho_c\nu}{1 - i\rho_c\nu} \frac{\rho_c - i\nu}{(1 + i\nu)\rho_c} \left(\frac{\rho_c - 1}{\rho_c + 1}\right)^{\frac{i\nu}{2}}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Sendo assim teremos

$$X(t, \rho_c) = \sum_{\omega > 0} \sqrt{\frac{\alpha'\beta}{2\ell^2\omega \log(\frac{1}{\epsilon})}} \left[[f_{\omega}^{(+)}(\rho_c) + Bf_{\omega}^{(-)}(\rho_c)] e^{-i\omega t} + c.h. \right] \quad (3.92)$$

$$\implies x(t) = X(t, \rho_c) = \sum_{\omega > 0} \sqrt{\frac{\alpha'\beta}{2\ell^2\omega \log(\frac{1}{\epsilon})}} \left[\frac{1 - i\nu}{1 - i\rho_c\nu} \left(\frac{\rho_c - 1}{\rho_c + 1}\right)^{i\nu/2} e^{-i\omega t} a_{\omega} + c.h. \right] \quad (3.93)$$

Vamos interpretar essa expressão como a posição da partícula na teoria de fronteira. Ou seja, quantidades obtidas a partir de (3.93) dizem respeito diretamente ao movimento Browniano da partícula externa.

Nesse caso os operadores a_{ω} estão ligados aos coeficientes de Fourier da expansão em modos de $x(t)$.

Com essas constatações podemos notar que as relações entre esses dois regimes, (3.90) e (3.93), nos permite fazer previsões sobre a física da fronteira a partir do bulk e vice-versa. Podemos, por exemplo, calcular funções de correlação $\langle a_{\omega_1} a_{\omega_1}^{\dagger} \dots \rangle$ para os modos que saem do buraco negro a partir das funções de correlação $\langle x(t_1)x(t_2)\dots \rangle$ na teoria da fronteira. Sendo assim, se pudéssemos medir com precisão o movimento Browniano da partícula teríamos informação sobre a radiação emitida pelo buraco negro. O empecilho para isso seria a necessidade de se conhecer as funções de correlação para a posição da partícula em um meio fortemente acoplado (regime em que se aplica a correspondência), o que torna difícil essa abordagem.

Por outro lado o caminho inverso também pode ser feito, ou seja, a partir de cálculos realizados no nosso espaçotempo de bulk obter quantidades referentes ao movimento Browniano na fronteira. Essa será a abordagem que usaremos aqui. Para tanto estudaremos o limite semi-clássico onde os modos que saem do buraco negro são dados pela radiação de Hawking.

Aqui, efetivamente, estaremos lidando com campos escalares não massivos (flutuações da corda) próximos a um buraco negro em duas dimensões. Dentro da aproximação de gravidade clássica, a quantização de tais modos levará esses a serem excitados termicamente á temperatura de Hawking. Em particular os modos que saem do horizonte são determinados pela matriz de densidade térmica dada por

$$\rho_0 = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr}(e^{-\beta H})}, \quad H = \sum_{\omega>0} \omega a_{\omega}^{\dagger} a_{\omega} \quad (3.94)$$

Nessa altura estamos ignorando a interação da corda de interesse com o gás térmico de cordas fechadas, que estão entre o horizonte e a brana. Isso é razoável desde que o acoplamento da corda g_s seja pequeno, mas esse é o regime em que de fato o uso da correspondência é mais justificável.

Capítulo 4

Teorema de Flutuação-Dissipação a partir do Bulk

Esse capítulo é devotado à obtenção de várias grandezas relativas ao movimento Browniano da partícula a partir da descrição do fenômeno em AdS-BTZ.

4.1 Movimento Browniano do Ponto na Fronteira

Nesta seção estudaremos o movimento da extremidade da corda situado em $\rho = \rho_c$. Ao fazermos isso estaremos estudando o movimento da partícula na teoria da fronteira (CFT). Isso nos permitirá obter a partir de quantidades advindas do bulk o valor de grandezas relativas ao movimento da partícula suspensa.

Antes de desenvolvermos tais cálculos precisamos de alguns resultados. Primeiro devemos obter

$$\langle a_{\omega}^{\dagger} a_{\omega} \rangle = Tr(\rho_0 a_{\omega}^{\dagger} a_{\omega}), \quad (4.1)$$

com ρ_0 definida em (3.94). Isso representa o valor esperado do produto de operadores de criação e aniquilação dado o estado quântico representado por ρ_0 .

Para avaliar esse valor esperado podemos proceder utilizando uma base de autoestados $\{|n\rangle\} = \{|n_{\omega_1}, n_{\omega_2}, \dots, n_{\omega_i}, \dots\rangle\}$ do operador hamiltoniano H definido em (3.94). H age

nesses estados como

$$H|n\rangle = \sum_{\omega>0} \omega a_{\omega}^{\dagger} a_{\omega} |n_{\omega_1}, n_{\omega_2}, \dots, n_{\omega_i}, \dots\rangle = \sum_{\omega>0} \omega_i n_{\omega_i} \quad (4.2)$$

Sendo assim podemos escrever, nessa base, a (4.1) como

$$Tr(\rho_0 a_{\omega}^{\dagger} a_{\omega'}) = \frac{Tr(e^{-\beta H} a_{\omega}^{\dagger} a_{\omega'})}{Tr(e^{-\beta H})} = \frac{\sum_{\text{Sobre estados}} e^{-\beta \sum \bar{\omega} n_{\bar{\omega}}} n_{\omega} \delta_{\omega\omega'}}{\sum_{\text{Sobre estados}} e^{-\beta \sum \bar{\omega} n_{\bar{\omega}}}} \quad (4.3)$$

Então

$$\frac{\sum_{\text{Sobre estados}} \prod_{\omega} e^{-\beta \bar{\omega} n_{\bar{\omega}}} n_{\omega} \delta_{\omega\omega'}}{\sum_{\text{Sobre estados}} \prod_{\omega} e^{-\beta \bar{\omega} n_{\bar{\omega}}}} = \frac{\sum_{n_{\omega_1}} e^{-\beta \omega_1 n_{\omega_1}} \dots \sum_{n_{\omega}} e^{-\beta \omega n_{\omega}} n_{\omega} \dots}{\sum_{n_{\omega_1}} e^{-\beta \omega_1 n_{\omega_1}} \dots \sum_{n_{\omega}} e^{-\beta \omega n_{\omega}} \dots} \quad (4.4)$$

Repare que todas as somas no numerador se cancelam com as somas no denominador, restando então apenas

$$\frac{\sum_{n_{\omega}} e^{-\beta \omega n_{\omega}} n_{\omega} \delta_{\omega\omega'}}{\sum_{n_{\omega}} e^{-\beta \omega n_{\omega}}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n x^n \delta_{\omega\omega'}}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}, \quad x \equiv e^{-\beta \omega}, n \equiv n_{\omega} \quad (4.5)$$

Somando as séries obtemos

$$\langle a_{\omega}^{\dagger} a_{\omega'} \rangle = \frac{\delta_{\omega\omega'}}{e^{\beta \omega} - 1} \quad (4.6)$$

Além disso pela ortogonalidade dos estados podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle n | e^{-\beta H} a_{\omega} a_{\omega'} | n \rangle &= e^{-\beta \sum \bar{\omega} n_{\bar{\omega}}} \sqrt{n_{\omega} n_{\omega'}} \langle n_{\omega_1}, \dots, n_{\omega}, \dots, n_{\omega'} \dots | | n_{\omega_1}, \dots, n_{\omega} - 1, \dots, n_{\omega'} - 1 \dots \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Analogamente temos

$$\langle n | e^{-\beta H} a_{\omega}^{\dagger} a_{\omega'}^{\dagger} | n \rangle = 0 \quad (4.8)$$

Essas equações implicam que

$$\langle a_{\omega}^{\dagger} a_{\omega}^{\dagger} \rangle = Tr(\rho_0 a_{\omega}^{\dagger} a_{\omega}^{\dagger}) = 0, \quad \langle a_{\omega} a_{\omega} \rangle = Tr(\rho_0 a_{\omega} a_{\omega}) = 0 \quad (4.9)$$

Usando essas relações para os valores esperados podemos escrever, a partir de (3.93), que

$$\langle x(t)x(0) \rangle = \langle X(t, \rho_c)X(0, \rho_c) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\omega>0} \sum_{\omega'>0} \frac{2\alpha'\beta}{\ell^2 \log(\frac{1}{\epsilon})} \frac{1}{\sqrt{\omega\omega'}} \frac{1+\nu^2}{1+\rho_c^2\nu^2} (\langle e^{i\omega t} a_\omega^\dagger a_{\omega'} \rangle + \langle e^{-i\omega t} a_\omega a_{\omega'}^\dagger \rangle) \\
&= \sum_{\omega>0} \sum_{\omega'>0} \frac{2\alpha'\beta}{\ell^2 \log(\frac{1}{\epsilon})} \frac{1}{\sqrt{\omega\omega'}} \frac{1+\nu^2}{1+\rho_c^2\nu^2} (\langle e^{i\omega t} a_\omega^\dagger a_{\omega'} \rangle + \langle e^{-i\omega t} a_{\omega'}^\dagger a_\omega \rangle + \langle e^{-i\omega t} \delta_{\omega\omega'} \rangle) \\
&= \sum_{\omega>0} \sum_{\omega'>0} \frac{2\alpha'\beta}{\ell^2 \log(\frac{1}{\epsilon})} \frac{1}{\sqrt{\omega\omega'}} \frac{1+\nu^2}{1+\rho_c^2\nu^2} \left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{e^{\beta\omega} - 1} + e^{-i\omega t} \right) \delta_{\omega\omega'} \\
&= \frac{2\alpha'\beta}{\ell^2 \log(\frac{1}{\epsilon})} \sum_{\omega>0} \frac{1}{\omega} \frac{1+\nu^2}{1+\rho_c^2\nu^2} \left(\frac{2 \cos(\omega t)}{e^{\beta\omega} - 1} + e^{-i\omega t} \right) \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Note que nas passagens acima além das relações em (4.9) também foi usado, a partir de (3.89), que

$$a_\omega a_{\omega'}^\dagger = a_{\omega'}^\dagger a_\omega + \delta_{\omega\omega'} \tag{4.11}$$

Seguindo, podemos, usando (3.86), aproximar a soma nas frequências por uma integral

$$\langle x(t)x(0) \rangle = \frac{\alpha'\beta^2}{2\pi^2\ell^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{1+\nu^2}{1+\rho_c^2\nu^2} \left(\frac{2 \cos(\omega t)}{e^{\beta\omega} - 1} + e^{-i\omega t} \right) \tag{4.12}$$

Usando esse resultado podemos calcular uma das expressões de maior relevância no estudo do movimento Browniano, o deslocamento quadrático médio. Para tanto repare que esse é dado por¹

$$\begin{aligned}
s^2(t) \equiv \langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle &= \langle (x(t) - x(0))(x^*(t) - x^*(0)) \rangle \\
&= \langle |x(t)|^2 \rangle + \langle |x(0)|^2 \rangle - 2\text{Re}(\langle x(t)x(0) \rangle), \tag{4.13}
\end{aligned}$$

é necessário que se tome o módulo quadrado na expressão acima para se garantir que essa seja real.

Devemos agora então calcular os termos presentes em (4.13) de modo a obter o deslocamento quadrático.

Primeiro calculemos o valor esperado do quadrado da posição para um tempo t . Para tanto vamos escrever $x(t)$ como

$$x(t) = \sum_{\omega>0} [g(\omega, t)a_\omega + g^*(\omega, t)a_\omega^\dagger], \tag{4.14}$$

¹Repare que a expressão possui um certo abuso de linguagem ao usarmos $*$, já que x é, nesse contexto, um operador.

com

$$g(\omega, t) = \sqrt{\frac{\alpha' \beta}{2\ell^2 \omega \log(\frac{1}{\epsilon})}} \frac{1 - i\nu}{1 - i\rho_c \nu} \left(\frac{\rho_c - 1}{\rho_c + 1}\right)^{i\nu/2} e^{-i\omega t}. \quad (4.15)$$

Com isso teremos, já levando em conta os valores esperados nulos dados por (4.9), que

$$\begin{aligned} \langle |x(t)|^2 \rangle &= \langle x(t)x^*(t) \rangle \\ &= \sum_{\omega>0} \sum_{\omega'>0} \langle (g(\omega, t)a_\omega + g^*(\omega, t)a_\omega^\dagger)(g(\omega', t)a_{\omega'} + g^*(\omega', t)a_{\omega'}^\dagger) \rangle \\ &= \sum_{\omega>0} \sum_{\omega'>0} g(\omega, t)g^*(\omega', t)\langle a_\omega a_{\omega'}^\dagger \rangle + g(\omega', t)g^*(\omega, t)\langle a_{\omega'}^\dagger a_\omega \rangle \\ &= \sum_{\omega>0} \sum_{\omega'>0} g(\omega, t)g^*(\omega', t)\langle a_{\omega'}^\dagger a_\omega \rangle + g(\omega, t)g^*(\omega', t)\langle \delta_{\omega\omega'} \rangle + g(\omega', t)g^*(\omega, t)\langle a_\omega^\dagger a_{\omega'} \rangle \\ &= \sum_{\omega>0} \sum_{\omega'>0} g(\omega, t)g^*(\omega', t)\delta_{\omega\omega'} \left(1 + \frac{2}{e^{\beta\omega} - 1}\right) \\ &= \sum_{\omega>0} |g(\omega, t)|^2 \left(1 + \frac{2}{e^{\beta\omega} - 1}\right) \\ &= \sum_{\omega>0} \frac{\alpha' \beta}{2\ell^2 \omega \log(\frac{1}{\epsilon})} \frac{1 + \nu^2}{1 + \rho_c^2 \nu^2} \left(1 + \frac{2}{e^{\beta\omega} - 1}\right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Aproximando-se a soma por uma integral teremos

$$\langle |x(t)|^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{\alpha' \beta^2}{2\pi^2 \ell^2} \frac{1 + \nu^2}{1 + \rho_c^2 \nu^2} \left(1 + \frac{2}{e^{\beta\omega} - 1}\right). \quad (4.17)$$

Repare que a expressão acima é independente do tempo, sendo assim, é direto que

$$\langle |x(0)|^2 \rangle = \langle |x(t)|^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{\alpha' \beta^2}{2\pi^2 \ell^2} \frac{1 + \nu^2}{1 + \rho_c^2 \nu^2} \left(1 + \frac{2}{e^{\beta\omega} - 1}\right) \quad (4.18)$$

Também temos que

$$2\text{Re}(\langle x(t)x(0) \rangle) = \frac{\alpha' \beta^2}{\pi^2 \ell^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{1 + \nu^2}{1 + \rho_c^2 \nu^2} \left(\frac{2 \cos(\omega t)}{e^{\beta\omega} - 1} + \cos(\omega t)\right) \quad (4.19)$$

Juntando esses resultados chegamos a

$$s^2(t) = \frac{\alpha' \beta^2}{\pi^2 \ell^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{1 + \nu^2}{1 + \rho_c^2 \nu^2} \left(1 + \frac{2}{e^{\beta\omega} - 1} - \frac{2 \cos(\omega t)}{e^{\beta\omega} - 1} - \cos(\omega t)\right) \quad (4.20)$$

Note agora que

$$\frac{2}{e^{\beta\omega} - 1} = \frac{e^{-\frac{\beta\omega}{2}}}{\sinh(\frac{\beta\omega}{2})} \quad (4.21)$$

Logo é direto que

$$\begin{aligned}
s^2(t) &= \frac{\alpha' \beta^2}{\pi^2 \ell^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{1 + \nu^2}{1 + \rho_c^2 \nu^2} \left(\frac{e^{-\frac{\beta\omega}{2}} + \sinh(\frac{\beta t}{2})}{\sinh(\frac{\beta t}{2})} - e^{-\frac{\beta\omega}{2}} \cos(\omega t) - \cos(\omega t) \sinh(\frac{\beta t}{2}) \right) \\
&= \frac{\alpha' \beta^2}{\pi^2 \ell^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{1 + \nu^2}{1 + \rho_c^2 \nu^2} \left(\frac{(1 - \cos(\omega t))(e^{-\frac{\beta\omega}{2}} + \sinh(\frac{\beta t}{2}))}{\sinh(\frac{\beta t}{2})} \right) \\
&= \frac{2\alpha' \beta^2}{\pi^2 \ell^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{1 + \nu^2}{1 + \rho_c^2 \nu^2} \left(\frac{\sin^2(\frac{\omega t}{2}) \cosh(\frac{\beta t}{2})}{\sinh(\frac{\beta t}{2})} \right) \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Dessa forma

$$s^2(t) \equiv \langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle = \frac{2\alpha' \beta^2}{\pi^2 \ell^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{1 + \nu^2}{1 + \rho_c^2 \nu^2} \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \tag{4.23}$$

Tal expressão possui uma divergência devido ao fato de somarmos nos calculos acima uma energia de ponto zero presente no termo proporcional a $\langle \delta_{\omega\omega'} \rangle$.

Para nos livramos desse problema vamos usar a conhecida operação de ordenamento normal, definida pela colocação de todos os operadores de criação à esquerda dos de aniquilação. Seguindo se os mesmos passos da equação (4.10), teremos, usando o ordenamento normal, que o termo advindo do valor esperado $\langle \delta_{\omega\omega'} \rangle$ desaparece e a correlação em questão se torna

$$\langle : x(t)x(0) : \rangle = \frac{\alpha' \beta^2}{2\pi^2 \ell^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{1 + \nu^2}{1 + \rho_c^2 \nu^2} \frac{2 \cos(\omega t)}{e^{\beta\omega} - 1}. \tag{4.24}$$

Analogamente se calcularmos $\langle : x^2(t) : \rangle$ o que mudará será somente que em (4.16) o termo proporcional a $\langle \delta_{\omega\omega'} \rangle$ desaparecerá. Sendo assim, esse valor esperado será agora

$$\langle : x^2(t) : \rangle = \langle : x^2(0) : \rangle = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{\alpha' \beta^2}{2\pi^2 \ell^2} \frac{1 + \nu^2}{1 + \rho_c^2 \nu^2} \frac{2}{e^{\beta\omega} - 1}. \tag{4.25}$$

Usando esses resultados o deslocamento quadrático médio normalmente ordenado será então

$$s_{reg}^2(t) \equiv \langle : [x(t) - x(0)]^2 : \rangle = \frac{4\alpha' \beta^2}{\pi^2 \ell^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{1 + \nu^2}{1 + \rho_c^2 \nu^2} \frac{\sin^2(\frac{\omega t}{2})}{e^{\beta\omega} - 1}, \tag{4.26}$$

tal integral é calculada em [17]. Seu resultado é dado por

$$s_{reg}^2(t) = \frac{\alpha' \beta^2}{\pi^2 \ell^2} \left(\frac{\rho_c^2 - 1}{\rho_c^2} I_1 + \frac{1}{\rho_c^2} I_2 \right). \tag{4.27}$$

Com

$$\begin{aligned}
I_1 = & \frac{1}{2} \left[e^{\frac{k}{a}} \text{Ei}\left(-\frac{k}{a}\right) + e^{-\frac{k}{a}} \text{Ei}\left(\frac{k}{a}\right) \right] + \frac{1}{2} \left[\Psi\left(1 - \frac{1}{2\pi a}\right) + \Psi\left(1 + \frac{1}{2\pi a}\right) \right] \\
& + \frac{e^{-2\pi|k|}}{2} \left[\frac{{}_2F_1\left(1, 1 + \frac{1}{2\pi a}; 2 + \frac{1}{2\pi a}, e^{-2\pi|k|}\right)}{1 + \frac{1}{2\pi a}} + \frac{{}_2F_1\left(1, 1 - \frac{1}{2\pi a}; 2 - \frac{1}{2\pi a}, e^{-2\pi|k|}\right)}{1 - \frac{1}{2\pi a}} \right] \\
& - \frac{\pi}{2} (1 - e^{-2\pi|k|}) \cot\left(\frac{1}{2a}\right) + \log\left(\frac{2a \sinh(\pi k)}{k}\right), \tag{4.28}
\end{aligned}$$

$$I_2 = \log\left(\frac{\sinh(\pi k)}{\pi k}\right), \tag{4.29}$$

sendo

$$x = 2\pi\nu \qquad a = \frac{\rho_c}{2\pi} \qquad k = \frac{t}{\beta}. \tag{4.30}$$

Para $\rho_c \gg 1$, que é o caso que estamos tratando aqui, o resultado se divide em dois regimes, como esperado, esses são dados por

$$s_{reg}^2 \approx \frac{\alpha'}{\ell^2 \rho_c} t^2 \approx \frac{T}{m} t^2, \qquad t \ll t_{relax} \tag{4.31}$$

$$s_{reg}^2 \approx \frac{\alpha'}{\pi \ell^2 T} t, \qquad t \ll t_{relax} \tag{4.32}$$

Sendo que esse tempo de relaxação é dado por

$$t_{relax} \sim \beta \rho_c \sim \frac{\alpha' m}{\ell^2 T^2}. \tag{4.33}$$

Tais resultados confirmam o esperado pelos calculos da seção 3.1. Há um regime balístico inicial e após o tempo de relaxação o movimento passa a se comportar como um passeio aleatório ($s \propto \sqrt{t}$).

4.2 Admitância, Espectro de Frequências e Tempo de Relaxação a partir do Bulk

Para esta seção o objetivo é estudar o movimento da extremidade da corda sobre a ação de um campo elétrico harmônico. Com isso queremos emular os cálculos da seção 3.1 no

contexto holográfico, relacionando o momento médio da partícula e esse campo externo. Com isso obteremos o valor da admitância para o modelo, um dos nossos objetivos.

O que faremos de início para obter tal efeito é introduzir um campo elétrico na brana no UV. Isso é realizado ao inserirmos um termo extra na ação contendo o potencial para tal campo. Podemos escrever esse termo como

$$\begin{aligned} S_{front} &= \int A(x, X) = \int_{\rho=\rho_c} A_{X^\alpha}(x, X) dX^\alpha = \int_{\rho=\rho_c} A_t(x, X) dt + A_I(x, X) dX^I \\ &\implies S_{front} = \int_{\rho=\rho_c} [A_t(x, X) + A_I(x, X) \dot{X}^I] dt. \end{aligned} \quad (4.34)$$

A nova ação após a adição desse termo é

$$S_{NG}^{(L)} + S_{front} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int dx^2 \sqrt{-g(x)} g^{\mu\nu}(x) G_{IJ}(x) \frac{\partial X^I}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^J}{\partial x^\nu} + \int_{\rho=\rho_c} [A_t(x, X) + A_I(x, X) \dot{X}^I] dt. \quad (4.35)$$

Queremos observar agora os efeitos sobre a dinâmica do problema trazidos pela inclusão desse novo termo à ação. Tais efeitos só ocorrerão na posição da brana que é onde “vive” o potencial $A(x, X)$. Sendo assim, iremos calcular a equação de movimento *na posição da brana*. Para tanto, repare primeiro, que podemos escrever a variação do termo de Nambu-Goto da ação como

$$\begin{aligned} \delta S_{NG}^{(L)} &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_S dx^2 \sqrt{-g(x)} g^{\mu\nu}(x) G_{IJ}(x) \left(\frac{\partial \delta X^I}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^J}{\partial x^\nu} + \frac{\partial X^I}{\partial x^\mu} \frac{\partial \delta X^J}{\partial x^\nu} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_S dx^2 \sqrt{-g(x)} g^{\mu\nu}(x) G_{IJ}(x) [\nabla_\mu(\delta X^I) \nabla_\nu(X^J) + \nabla_\mu(X^I) \nabla_\nu(\delta X^J)], \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde usamos o fato que os X^I são escalares do ponto de vista da folha de mundo, logo $\partial_\mu X^I = \nabla_\mu X^I$. Seguindo podemos fazer, integrando por partes,

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_S dx^2 \sqrt{-g(x)} \nabla_\mu [g^{\mu\nu}(x) G_{IJ}(x) (\delta X^I) \nabla_\nu(X^J)] \\ &+ \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_S dx^2 \sqrt{-g(x)} \nabla_\mu [g^{\mu\nu}(x) G_{IJ}(x) \nabla_\nu X^J] \delta X^I + (\mu, I \iff \nu, J) \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\partial S} dx \sqrt{-\tilde{g}(x)} g^{\mu\nu}(x) G_{IJ}(x) (\delta X^I) \frac{\partial X^J}{\partial x^\nu} n_\mu \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_S dx^2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g(x)} g^{\mu\nu}(x) G_{IJ}(x) \frac{\partial X^J}{\partial x^\nu} \right) \delta X^I + (\mu, I \iff \nu, J), \quad (4.37)$$

onde usamos o teorema de Stokes [35] na segunda passagem para escrever a integral de uma derivada total em um certo “bulk”, S , como uma integral de fluxo na superfície de fronteira, aqui denotada como ∂S , tal superfície tendo normal dada por n_μ . Repare que após essa aplicação o determinante da métrica da folha de mundo, g , é substituído pelo da métrica induzida na superfície, \tilde{g} , como consequência do teorema.

Para o nosso caso, em particular, a localização da fronteira ∂S será a superfície $r = r_c$, onde se encontra a brana.

Sendo assim, podemos escrever a variação da ação completa como

$$\begin{aligned} \delta S_{front}^{total} &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\partial S} dx \sqrt{-\tilde{g}(x)} g^{\mu\nu}(x) G_{IJ}(x) \frac{\partial X^J}{\partial x^\nu} n_\mu \delta X^I + (\mu, I \iff \nu, J) \\ &\quad + \delta \left(\oint [A_t(x, X) + A_I(x, X) \dot{X}^I] dt \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\partial S} dx \sqrt{-\tilde{g}(x)} G_{IJ}(x) \frac{\partial X^J}{\partial x^\nu} n^\nu \delta X^I + (\mu, I \iff \nu, J) \\ &\quad + \delta \left(\oint [A_t(x, X) + A_I(x, X) \dot{X}^I] dt \right), \end{aligned} \quad (4.38)$$

note agora que o termo $\frac{\partial X^J}{\partial x^\nu} n^\nu$ é uma derivada normal a ∂S .

A partir dos dois primeiros termos obtemos a equação de movimento

$$\frac{\delta S}{\delta X^K} = 0 \implies -\frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{-\tilde{g}(x)} G_{KJ}(x) \frac{\partial X^J}{\partial x^\nu} n^\nu = 0, \quad (4.39)$$

Devemos variar agora o termo da ação contendo o campo $A(x, X)$. Aqui como o parâmetro é o tempo t vamos usar as equações de Euler-Lagrange sob a forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{X}^K)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^K}. \quad (4.40)$$

Sendo assim

$$\frac{dA_K(t, X)}{dt} = \frac{\partial A_t(t, X)}{\partial X^K} + \frac{\partial A_I(t, X)}{\partial X^K} \frac{dX^I}{dt}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_K(t, X)}{\partial t} + \frac{\partial A_K(t, X)}{\partial X^L} \frac{dX^L}{dt} &= \frac{\partial A_t(t, X)}{\partial X^K} + \frac{\partial A_I(t, X)}{\partial X^K} \frac{dX^I}{dt} \\
\left(\frac{\partial A_K(t, X)}{\partial t} - \frac{\partial A_t(t, X)}{\partial X^K} \right) + \left(\frac{\partial A_K(t, X)}{\partial X^L} - \frac{\partial A_I(t, X)}{\partial X^K} \delta_L^I \right) \frac{dX^L}{dt} &= 0 \\
\left(\frac{\partial A_K(t, X)}{\partial t} - \frac{\partial A_t(t, X)}{\partial X^K} \right) + \left(\frac{\partial A_K(t, X)}{\partial X^L} - \frac{\partial A_L(t, X)}{\partial X^K} \right) \frac{dX^L}{dt} &= 0. \quad (4.41)
\end{aligned}$$

Se somarmos essas expressões obtemos a equação de movimento total na posição da brana

$$\sqrt{-\tilde{g}(x)} G_{IJ}(x) \partial_\nu X^J n^\nu - 2\pi\alpha' (F_{It} + F_{IJ} \partial_t X^J) = 0, \quad (4.42)$$

onde foram definidos $F_{It} = \partial_I A_t - \partial_t A_I$ e $F_{IJ} = \partial_I A_J - \partial_J A_I$. Tais quantidades representam campos na folha de mundo vivendo na posição da brana, definindo um tipo de tensor eletromagnético.

Para o caso particular aqui estudado, o buraco negro BTZ, (3.63), essa equação pode ser escrita como

$$\rho_c^2 (\rho_c^2 - 1) \partial_\rho X|_{\rho=\rho_c} = \frac{2\pi\alpha' \ell^4}{r_H^3} F_{Xt} \quad (4.43)$$

Vamos escolher o campo F_{Xt} como um sendo um campo elétrico oscilante com frequência ω

$$F_{Xt} \equiv E = E_0 e^{-i\omega t}, \quad (4.44)$$

isso tendo em vista a equação (3.30).

Desse modo ao calcularmos o movimento da corda sobre a influência do campo em (4.44) poderemos obter a admitância $\mu(\omega)$ como em (3.34).

Como antes a solução geral da equação de movimento é dada por

$$X(t, \rho) = [A' f_\omega^{(+)}(\rho) + B' f_\omega^{(-)}(\rho)] e^{-i\omega t} \quad (4.45)$$

Mas, note agora, que ao se introduzir o campo (4.44) o que ocorreu efetivamente foi uma modificação na condição de fronteira em $\rho = \rho_c$, de forma dada por (4.43).

Desse modo os coeficientes da solução geral agora são outros, refletindo essa modificação. Devemos assim, ao prosseguirmos, impor, além dessa nova condição no UV, dada por (4.43), uma nova condição de fronteira no IR também, a fim de que possamos obter os coeficientes A' e B' da solução (4.45).

Sob as condições que estamos estudando os modos que saem do buraco negro são sempre termicamente excitados. Por outro lado, os modos que entram no buraco negro são, a princípio, arbitrários. Como vimos nas seções 3.2 e 3.3, por exemplo, na equação (3.73), cada termo da solução geral corresponde a um desses modos distintos. Sendo assim o termo contendo A' corresponde aos modos que saem do buraco negro. Logo, tal termo é excitado termicamente. Como essa radiação é aleatória, A' também deve ser e além disso, tal quantidade terá média nula, ou seja, $\langle A' \rangle = 0$, refletindo essa aleatoriedade.

Tendo em vista isso tomaremos como condições de fronteira a equação (4.43), induzida pela presença do campo elétrico, e também faremos

$$\langle A' \rangle = 0, \quad (4.46)$$

sendo essa última condição proveniente da excitação dos modos “outgoing” pela radiação térmica emitida pelo buraco negro.

Aqui estamos interessados em quantidades médias, a admitância, por exemplo, está ligada ao momento médio da partícula externa (veja equação (3.34)), ou seja não será problema impormos (4.46).

Sendo assim, partir dessa última equação, tomando a média da solução geral, (4.45), chegamos a

$$\langle X(t, \rho) \rangle = [\langle B' \rangle f_{\omega}^{(-)}(\rho)] e^{-i\omega t}. \quad (4.47)$$

Mas então, derivando essa equação, temos pela condição de fronteira (4.43), já assumindo a forma do campo em (4.44), que

$$\langle B' \rangle \rho_c^2 (\rho_c^2 - 1) \partial_{\rho} f_{\omega}^{(-)}|_{\rho=\rho_c} = \frac{2\pi\alpha'\ell^4}{r_H^3} E_0, \quad (4.48)$$

$$\implies \langle B' \rangle = \frac{2\pi\alpha'\ell^4}{r_H^3\rho_c^2(\rho_c^2 - 1)\partial_\rho f_\omega^{(-)}|_{\rho=\rho_c}} E_0. \quad (4.49)$$

Usando a forma da derivada em (3.80), chegamos que

$$\langle B' \rangle = \frac{2\pi i\alpha'\ell^4}{r_H^3} \frac{1 - i\nu}{(1 - i\nu\rho_c)\nu} \left(\frac{\rho_c - 1}{\rho_c + 1}\right)^{\frac{i\nu}{2}} E_0. \quad (4.50)$$

Sendo assim de (4.47), o valor médio de X na posição do cut-off, $\rho = \rho_c$, é dado por

$$\begin{aligned} \langle x \rangle = \langle X(t, \rho_c) \rangle &= \frac{2\pi i\alpha'\ell^4}{r_H^3} \frac{1 - i\nu}{(1 - i\nu\rho_c)\nu} \left(\frac{\rho_c - 1}{\rho_c + 1}\right)^{\frac{i\nu}{2}} E_0 \frac{1}{1 - i\nu} \frac{\rho_c - i\nu}{\rho_c} \left(\frac{\rho_c - 1}{\rho_c + 1}\right)^{-\frac{i\nu}{2}} e^{-i\omega t} \\ &= \frac{2\pi i\alpha'\ell^4}{r_H^3} \frac{\rho_c - i\nu}{(1 - i\nu\rho_c)\nu\rho_c} E_0 e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Isso implica que a média do momento será dada por

$$\langle p(t) \rangle = \frac{2\pi\alpha'\ell^4 m\omega}{r_H^3} \frac{\rho_c - i\nu}{(1 - i\nu\rho_c)\nu\rho_c} E_0 e^{i\omega t} = \frac{\alpha'\beta^2 m}{2\pi\ell^2} \frac{\rho_c - i\nu}{(1 - i\nu\rho_c)\rho_c} E_0 e^{i\omega t}, \quad (4.52)$$

onde foi usada relação entre a frequência ω e ν , (3.69).

Dessa expressão usando a relação entre o momento médio e a admitância, equação (3.36), podemos inferir que

$$\mu(\omega) = \frac{1}{\gamma[\omega] - i\omega} = \frac{\alpha'\beta^2 m}{2\pi\ell^2} \frac{\rho_c - i\nu}{(1 - i\nu\rho_c)\rho_c}, \quad (4.53)$$

sendo que aqui estamos tomando uma carga unitária, de modo que o campo e a força são iguais.

Essa é mais uma previsão do modelo para uma grandeza que caracteriza o fenômeno. Além disso tal resultado nos fornece a primeira quantidade que estará ligada ao teorema de flutuação-dissipação que derivaremos na seção 4.3.2.

A partir da definição do tempo de relaxação, equação (3.48), e de (4.53), podemos obter ainda o tempo de relaxação para esse sistema

$$t_{\text{relax}} = \mu(\omega = 0) = \frac{\alpha'\beta^2 m}{\ell^2}. \quad (4.54)$$

Como dito na seção (3.1) esse é o tempo que separa os dois regimes característicos do movimento da partícula externa. Ele quantifica o tempo que a partícula leva para esquecer seu movimento inicial e termalizar com o meio.

A seguir desejamos calcular outra quantidade importante para a caracterização do movimento Browniano, o espectro de frequências do ruído $I_R(\omega) = \kappa(\omega)$. Tal quantidade quantifica a correlação do termo de ruído para diferentes tempos no espaço das frequências.

De início consideremos a quantidade normalmente ordenada

$$\langle : p(\bar{t})p(t') : \rangle = m^2 \langle : \partial_{\bar{t}}x(\bar{t})\partial_{t'}x(t') : \rangle. \quad (4.55)$$

Mudando as variáveis para

$$t = \bar{t} - t' \qquad \tau = \bar{t}. \quad (4.56)$$

$$\implies t' = \bar{t} - t = \tau - t. \quad (4.57)$$

Logo

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{\partial x}{\partial \bar{t}}. \quad (4.58)$$

Temos que para x como função de t'

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial t'} dt' \\ &= \frac{\partial x}{\partial t'} \left(\frac{\partial t'}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial t'}{\partial t} dt \right) \\ &= \frac{\partial x}{\partial t'} (d\tau - dt). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Assim por definição

$$\frac{\partial x}{\partial t'} = -\frac{\partial x}{\partial t}. \quad (4.60)$$

Podemos escrever então

$$\begin{aligned} \langle : p(\bar{t})p(t') : \rangle &= m^2 \langle : \partial_{\bar{t}}x(\bar{t})\partial_{t'}x(t') : \rangle \\ &= m^2 \partial_{\bar{t}}\partial_{t'} \langle : x(\bar{t})x(t') : \rangle \\ &= -m^2 \partial_{\bar{t}}\partial_{\tau} \langle : x(\bar{t})x(t') : \rangle \end{aligned} \quad (4.61)$$

No limite em que $t' \rightarrow 0$ teremos $t = \bar{t} = \tau$ e a expressão se converterá em

$$\langle : p(t)p(0) : \rangle = -m^2 \partial_t \partial_t \langle : x(t)x(0) : \rangle \quad (4.62)$$

Pela equação (4.24), podemos escrever então

$$\begin{aligned}
\langle : p(t)p(0) : \rangle = -m^2 \partial_t^2 \langle : x(t)x(0) : \rangle &= \frac{\alpha' \beta^2 m^2}{\pi^2 \ell^2} \int_0^\infty d\omega \frac{1 + \nu^2}{1 + \rho_c^2 \nu^2} \frac{\omega \cos(\omega t)}{e^{\beta\omega} - 1} \\
&= \frac{\alpha' \beta m^2}{\pi \ell^2} \int_0^\infty d\omega \frac{1 + \nu^2}{2\pi (1 + \rho_c^2 \nu^2)} \frac{\beta\omega (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})}{e^{\beta\omega} - 1} \\
&= \frac{\alpha' \beta m^2}{\pi \ell^2} \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{1 + \nu^2}{2\pi (1 + \rho_c^2 \nu^2)} \frac{\beta|\omega| e^{-i\omega t}}{e^{\beta|\omega|} - 1}, \quad (4.63)
\end{aligned}$$

onde usamos a decomposição de $\cos(\omega t)$ em exponenciais imaginárias.

Para obter o espectro de frequências definido em (3.37) devemos fazer a transformada de Fourier de (4.63), de modo que é direto que

$$I_p^N(\omega) = \frac{\alpha' \beta m^2}{\pi \ell^2} \frac{1 + \nu^2}{1 + \rho_c^2 \nu^2} \frac{\beta|\omega|}{e^{\beta|\omega|} - 1} \quad (4.64)$$

sendo o sobrescrito N uma notação para lembrar que esse espectro foi obtido usando o ordenamento normal.

Se usarmos o fato de que o espectro de frequências do momento em (4.64) está relacionado com o espectro de frequências do ruído, ou seja, com o correlacionador da força aleatória $\kappa^N(\omega)$, via expressão análoga a (3.42) pelo teorema de Wiener-Khintchine e também o valor que descobrimos para a admitância, dado em (4.53), poderemos escrever que

$$\kappa^N(\omega) = I_R^N(\omega) = \frac{I_p^N(\omega)}{|\mu(\omega)|^2} = \frac{4\pi \ell^2}{\alpha' \beta^3} \frac{1 + \nu^2}{1 + \rho_c^2 \nu^2} \frac{\beta|\omega|}{e^{\beta|\omega|} - 1}. \quad (4.65)$$

Isso nos dá uma grandeza de interesse novamente a partir de quantidades vindas exclusivamente da descrição de bulk do fenômeno. Em particular esse espectro de frequência $\kappa(\omega)$ mede a flutuação presente no sistema.

Agora temos à mão o valor de várias grandezas envolvidas na descrição do movimento Browniano. Algumas dessas relacionadas aos aspectos dissipativos e outros aos aspectos relativos à flutuação. No próximo capítulo daremos um passo adiante e descreveremos como essas grandezas na verdade estão intimamente relacionadas por meio de um teorema de flutuação-dissipação.

4.3 O Teorema de Flutuação-Dissipação

Queremos nesta seção obter uma versão do famoso resultado conhecido como teorema de flutuação-dissipação a partir da descrição holográfica que desenvolvemos. Para tanto estabelecemos inicialmente o enunciado do teorema, revendo de forma introdutória a teoria de resposta linear. Mais a frente usando as grandezas de interesse obtidas no capítulo anterior o teorema de flutuação-dissipação é reobtido a partir de quantidades advindas da descrição de bulk.

4.3.1 Teoria de Resposta Linear

Nesta seção faremos uma breve revisão e estabeleceremos o “maquinário” para alguns resultados conhecidos como teoremas de flutuação-dissipação. Como o nome indica, tais teoremas relacionam quantidades ligadas aos aspectos dissipativos a quantidades relativas a efeitos da flutuação nesses sistemas. No caso particular do movimento Browniano teremos uma ligação da admitância ou da função de memória com o espectro de frequências do momento.

A referência principal dessa sessão é o livro de Kubo [2], além dele é utilizado também o artigo do mesmo autor [4], pode ser útil ainda consultar algum livro de mecânica quântica que discuta os quadro de interação, já que esse será utilizado aqui. Uma referência é por exemplo o capítulo três de [36] ou o capítulo cinco do livro de Sakurai e Napolitano [37].

De início, imagine que tenhamos um sistema o qual, quando isolado, possui um Hamiltoniano não perturbado H_0 . Assuma também que em um passado distante, $t \rightarrow -\infty$ tal sistema estava em um estado de equilíbrio com operador densidade dada por

$$\rho_e = \frac{e^{-\beta H_0}}{\text{Tr}(e^{-\beta H_0})}. \quad (4.66)$$

Se o Hamiltoniano total desse sistema (parte não perturbada mais possíveis outros termos) depende de um certo parâmetro externo x , além de, possivelmente outras quan-

tidades q e p de modo que

$$H = H(q, p, x), \quad H(q, p, x_0) = H_0, \quad (4.67)$$

e se tivermos

$$A = -\frac{\partial H(q, p, x)}{\partial x}, \quad (4.68)$$

então, ocorrerá sob uma pequena perturbação δx nesse parâmetro, uma mudança no Hamiltoniano, de modo que esse será dado por

$$H_{\text{total}} = H_0 + H_{\text{ext}}(t) = H_0 - A\delta x. \quad (4.69)$$

Tal perturbação pode ser, por exemplo, uma força externa dependente do tempo $K(t)$, desde que essa seja pequena o suficiente para que a aproximação linear funcione. Sendo válida essa hipótese, teremos

$$H_{\text{total}} = H_0 - AK(t). \quad (4.70)$$

Uma descrição desse sistema poderá ser feita obtendo-se o operador densidade correspondente a esse novo Hamiltoniano.

A equação de movimento que governa a evolução de tal operador densidade, $\rho(t)$, é dada no nosso caso por

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = i[\mathbf{L}_{\text{total}}(t)]\rho(t) = i[\mathbf{L} + \mathbf{L}_{\text{ext}}(t)]\rho(t), \quad (4.71)$$

onde usamos os chamados operadores de Liouville, definidos como

$$i\mathbf{L} \equiv \frac{[H_0, \rho(t)]}{i\hbar}, \quad i\mathbf{L}_{\text{ext}} \equiv \frac{[H_{\text{ext}}, \rho(t)]}{i\hbar}. \quad (4.72)$$

sendo que foi deixado evidente o fator \hbar a fim de clareza. No seguinte voltaremos a considerar unidades naturais e $\hbar = 1$.

A equação (4.71) é conhecida como equação de Liouville-Von Neumann. Ela pode ser obtida a partir da equação de Schrodinger e da definição da matriz densidade em termos dos estados na representação de Schrodinger.

Seguindo, temos que a partir da definição dos operadores de Liouville em (4.72) para um operador qualquer \mathcal{O}

$$e^{i(t-t_0)\mathbf{L}}\mathcal{O}(t_0) = e^{-i(t-t_0)H_0}\mathcal{O}(t_0)e^{i(t-t_0)H_0}, \quad (4.73)$$

essa relação é obtida ao se coletar ordem a ordem os termos do lado direito e se comparar aos do lado esquerdo.

Gostaríamos agora, de utilizar o fato que H_{ext} é pequeno para estudar o regime de resposta linear desse sistema, ou seja, vamos considerar em nossos cálculos apenas a primeira ordem nas perturbações envolvidas. Para isso vamos escrever uma equação equivalente a (4.71) em uma forma mais propensa a essa abordagem. Para tanto, primeiro tomemos

$$\rho(t) = e^{i(t-t_0)\mathbf{L}}\tilde{\rho}(t), \quad (4.74)$$

vamos então substituir isso em (4.71). Os passos seguintes são muito semelhantes à dedução entre as equações (3.3) e (3.5) e após os realizarmos chegamos que o resultado dessa substituição é

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(t_0) + \int_{t_0}^t dt' e^{-i(t'-t_0)\mathbf{L}} i\mathbf{L}_{\text{ext}}(t')\rho(t'), \quad (4.75)$$

note que por (4.74), $\tilde{\rho}(t_0) = \rho(t_0)$.

Se multiplicarmos os dois lados dessa equação por $e^{i(t-t_0)\mathbf{L}}$ obteremos então

$$\rho(t) = e^{i(t-t_0)\mathbf{L}}\rho(t_0) + \int_{t_0}^t dt' e^{i(t-t')\mathbf{L}} i\mathbf{L}_{\text{ext}}(t')\rho(t'). \quad (4.76)$$

Aqui, como já dito estamos interessados no regime de resposta linear, ou de pequenas perturbações. Dessa forma tomaremos

$$\rho(t) = \rho_e + \Delta\rho, \quad (4.77)$$

sendo $\Delta\rho$ uma perturbação no estado de equilíbrio.

Consideraremos também que $\rho(t_0) = \rho(-\infty) = \rho_e$, seguindo o explicado no início dessa seção. Esse estado de equilíbrio, ρ_e , é invariante pela evolução dada por (4.73), já que por sua definição, equação (4.66), tal operador comuta com H_0 .

Usando essas informações se substituirmos (4.77) no lado direito de (4.76) obteremos

$$\rho(t) = \rho_e - i \int_{t_0}^t dt' e^{-i(t-t')H_0} [H_{\text{ext}}(t'), \rho_e(t')] e^{i(t-t')H_0}, \quad (4.78)$$

note que desprezamos um termo contendo $[H_{\text{ext}}(t'), \Delta\rho(t')]$ pois esse seria de segunda ordem na perturbação, já que envolve o produto de perturbações, H_{ext} e $\Delta\rho$.

Gostaríamos de saber agora como uma determinada quantidade física $B(t)$ muda sob a ação dessa perturbação. Qual a diferença, após a ação dessa força externa, em relação ao valor de equilíbrio para tal grandeza, ou, de forma mais específica, queremos calcular

$$\Delta B(t) = Tr\{\rho(t)B(t)\} - Tr\{\rho_e(t)B(t)\} \quad (4.79)$$

Segue que isso vale

$$\begin{aligned} \Delta B(t) &= Tr\{(\rho(t) - \rho_e(t))B(t)\} \\ &= -i \int_{-\infty}^t dt' Tr\{e^{(t-t')\frac{H_0}{i\hbar}} [H_{\text{ext}}(t'), \rho_e(t')] e^{-(t-t')\frac{H_0}{i\hbar}} B(t)\} \\ &= -i \int_{-\infty}^t dt' Tr\{[H_{\text{ext}}(t'), \rho_e(t')] e^{-(t-t')\frac{H_0}{i\hbar}} B(t) e^{(t-t')\frac{H_0}{i\hbar}}\} \\ &= -i \int_{-\infty}^t dt' Tr\{[H_{\text{ext}}(t'), \rho_e(t')] B(t-t')\}, \end{aligned} \quad (4.80)$$

sendo

$$B(t-t') \equiv e^{i(t-t')H_0} B(t) e^{-i(t-t')H_0}, \quad (4.81)$$

tal operador está no quadro de interação e assim obedece

$$\frac{dB(t)}{dt} = -i[B(t), H_0]. \quad (4.82)$$

Nas passagens acima usamos também a ciclicidade do traço para reorganizar os produtos de modo a obter a última expressão.

Mas em vista de (4.70), ou seja, da definição do Hamiltoniano externo e do fato da força externa não ser um operador, podemos escrever

$$\Delta B(t) = \int_{-\infty}^t dt' K(t') \phi_{BA}(t-t'), \quad (4.83)$$

com

$$\phi_{BA}(t-t') \equiv -i\langle [A(t'), B(t)] \rangle_e \quad (4.84)$$

onde

$$\langle \mathcal{O} \rangle_e \equiv Tr\{\rho_e \mathcal{O}\}, \quad (4.85)$$

é o valor esperado do operador \mathcal{O} no estado de equilíbrio.

Podemos especializar esse resultado se considerarmos uma força harmônica

$$K(t) = K_0 e^{-i\omega t}, \quad (4.86)$$

feito isso a equação (4.83) se torna

$$\Delta B(t) = \int_{-\infty}^t dt' K_0 e^{-i\omega t'} \phi_{BA}(t-t'). \quad (4.87)$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$t' \rightarrow s = t - t', \quad (4.88)$$

a integral passará a ser

$$\Delta B(t) = \int_0^{\infty} ds K_0 e^{-i\omega t} \phi_{BA}(s) e^{i\omega s} = \left(\int_0^{\infty} ds \phi_{BA}(s) e^{i\omega s} \right) K_0 e^{-i\omega t}. \quad (4.89)$$

O termo entre parênteses pode então ser visto como o fator de proporcionalidade entre a força aplicada e a variação na quantidade de interesse. Tal termo pode então ser considerada um tipo de admitância. Dessa forma é justo escrevermos esse resultado como

$$\Delta B(t) = \mu_{AB} K_0 e^{-i\omega t}. \quad (4.90)$$

sendo $\mu_{AB}(\omega)$ uma notação para a admitância que envolve as quantidades $A(t)$ e $B(t)$.

Podemos desenvolver melhor a expressão para a admitância e a escreve-la em uma forma mais útil aos nossos propósitos. Para tanto podemos fazer²

$$\mu_{AB}(\omega) = -i \int_0^{\infty} dt Tr\{\rho_e [A(0), B(t)]\} e^{i\omega t}$$

²Aqui voltamos a usar t como variável de integração pela maior familiaridade dessa com a representação de uma grandeza temporal.

$$\begin{aligned}
&= -i \int_0^\infty dt \text{Tr} \left\{ \frac{e^{-\beta H_0} A(0) B(t) - e^{-\beta H_0} B(t) A(0)}{\text{Tr} \{ e^{-\beta H_0} \}} \right\} e^{i\omega t} \\
&= -i \int_0^\infty dt \text{Tr} \left\{ \frac{e^{-\beta H_0} A(0) B(t) - A(0) e^{-\beta H_0} B(t)}{\text{Tr} \{ e^{-\beta H_0} \}} \right\} e^{i\omega t} \\
&= -i \int_0^\infty dt \text{Tr} \left\{ \frac{[e^{-\beta H_0}, A(0)] B(t)}{\text{Tr} \{ e^{-\beta H_0} \}} \right\} e^{i\omega t}. \tag{4.91}
\end{aligned}$$

Agora vamos usar a identidade [4]

$$[e^{-\beta H_0}, \mathcal{O}] = e^{-\beta H_0} \int_0^\beta d\lambda \dot{\mathcal{O}}(-i\lambda) = e^{-\beta H_0} \int_0^\beta d\lambda e^{\lambda H_0} [\mathcal{O}, H_0] e^{-\lambda H_0}, \tag{4.92}$$

para reescrever isso como

$$\begin{aligned}
\mu_{AB}(\omega) &= -i \int_0^\infty dt \text{Tr} \left\{ \frac{e^{-\beta H_0} \int_0^\beta d\lambda \dot{A}(-i\lambda) B(t)}{\text{Tr} \{ e^{-\beta H_0} \}} \right\} e^{i\omega t} \\
&= -i \int_0^\infty dt \text{Tr} \left\{ \frac{e^{-\beta H_0} \int_0^\beta d\lambda e^{\lambda H_0} [A(0), H_0] e^{-\lambda H_0} B(t)}{\text{Tr} \{ e^{-\beta H_0} \}} \right\} e^{i\omega t} \\
&= \int_0^\infty dt \text{Tr} \left\{ \frac{e^{-\beta H_0} \int_0^\beta d\lambda e^{\lambda H_0} \dot{A}(0) e^{-\lambda H_0} B(t)}{\text{Tr} \{ e^{-\beta H_0} \}} \right\} e^{i\omega t} \\
&= \int_0^\infty dt \int_0^\beta d\lambda \text{Tr} \{ \rho_e e^{\lambda H_0} \dot{A}(0) e^{-\lambda H_0} B(t) \} e^{i\omega t} \\
&= \int_0^\infty dt \int_0^\beta d\lambda \langle e^{\lambda H_0} \dot{A}(0) e^{-\lambda H_0} B(t) \rangle_e e^{i\omega t}, \tag{4.93}
\end{aligned}$$

onde em um dos passos usamos a equação de movimento no quadro de interação

$$\frac{dA(0)}{dt} = -i[A(0), H_0] \tag{4.94}$$

já usando que $A(0)$ não tem dependência temporal explícita.

Se, a partir disso, introduzirmos o correlacionador canônico dado por

$$\langle X; Y \rangle = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\lambda \langle e^{\lambda H_0} X e^{-\lambda H_0} Y \rangle = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\lambda \langle X(-i\lambda) Y \rangle \tag{4.95}$$

onde no último termo reescrevemos a evolução temporal em termos de um tempo imaginário $-i\lambda$, poderemos ainda, reescrever a admitância como

$$\mu_{AB}(\omega) = \int_0^\infty dt \phi_{BA}(t) e^{i\omega t} = -i \int_0^\infty dt \langle [A(0), B(t)] \rangle_e e^{i\omega t} = \beta \int_0^\infty dt \langle \dot{A}(0); B(t) \rangle_e e^{i\omega t} \tag{4.96}$$

Essa expressão nos dá o valor da admitância de um determinado sistema, no regime de resposta linear, em termos do correlacionador canônico, que por sua vez é uma medida da resposta a partir do equilíbrio de uma quantidade (nesse caso $B(t)$) a uma pequena perturbação sobre o sistema.

É interessante notar ainda que o correlacionador canônico, pela ciclicidade do traço que define o valor esperado, possui as propriedades

$$\langle X(0); Y(t) \rangle = \langle Y(t); X(0) \rangle = \langle Y(0); X(-t) \rangle \quad (4.97)$$

Para analisar o caso do movimento Browniano tomaremos $A = x$ e $H_{\text{ext}} = -xK(t)$ sendo que identificamos a força $K(t)$ com a força externa presente na equação de Langevin generalizada (3.22). Podemos ainda tomar $B(t) = p(t)$ e usar tais identificações para escrever

$$\mu(\omega) = \frac{\beta}{m} \int_0^\infty dt \langle p(0); p(t) \rangle e^{i\omega t}, \quad (4.98)$$

sendo que foram omitidos os índices referentes as grandezas envolvidas (antes escritos como A e B), usamos a variável t ao invés de s para deixar claro que a dependência é temporal.

Seguindo adiante, temos que tomando a parte real dessa última equação obtemos

$$\begin{aligned} \text{Re}(\mu(\omega)) &= \frac{\beta}{m} \int_0^\infty dt \langle p(0); p(t) \rangle \cos(\omega t) \\ &= \frac{\beta}{m} \int_0^\infty dt \langle p(0); p(t) \rangle \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, \end{aligned} \quad (4.99)$$

se reescrevermos as duas integrais advindas da soma como somente uma teremos

$$2\text{Re}(\mu(\omega)) = \frac{\beta}{m} \int_{-\infty}^\infty dt \langle p(0); p(t) \rangle e^{i\omega t} = \frac{\beta}{m} I_p^c(\omega), \quad (4.100)$$

onde já usamos as propriedades do correlacionador canônico para escrever a integral dessa forma. Também definimos nessa passagem o espectro de frequências para $p(t)$ que usa o correlacionador canônico como $I_p^c(\omega)$.

Tal resultado é conhecido como teorema de flutuação-dissipação. Esse nome é devido ao fato de essa expressão ligar uma grandeza relacionada à dissipação, a admitância, com o correlacionador canônico que pode ser visto como conectado à flutuação. Tal relação ficará clara ao derivarmos uma forma para essa expressão que explicita mais suas componentes. É o que faremos agora.

Primeiro veja que a partir da relação entre os espectros de frequência em (3.41) e da definição do correlacionador canônico em (4.95), é direto notar que vale também para o correlacionador canônico a mesma expressão que tínhamos para o correlacionador usual

$$I_p^c(\omega) = \frac{I_R^c(\omega)}{|\gamma[\omega] - i\omega|^2}. \quad (4.101)$$

Disso podemos escrever que

$$\begin{aligned} 2\text{Re}(\mu(\omega)) &= \frac{\beta}{m} \frac{I_R^c(\omega)}{|\gamma[\omega] - i\omega|^2} \\ \frac{2\text{Re}(\gamma(\omega))}{|\gamma[\omega] - i\omega|^2} &= \frac{\beta}{m} \frac{I_R^c(\omega)}{|\gamma[\omega] - i\omega|^2}. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Simplificando

$$2\text{Re}(\gamma(\omega)) = \frac{\beta}{m} I_R^c(\omega) = \frac{\beta}{m} \kappa^c(\omega). \quad (4.103)$$

Tal equação provê um relacionamento direto entre a componente de fricção e a de flutuação. Aqui é visível que a função de memória, que quantifica a dissipação no sistema, está “amarrada” à função κ que mede a correlação do ruído, ou seja, da flutuação presente no movimento. De certa forma esse resultado faz sentido pois apesar de escrevermos como termos separados da equação de movimento essas componentes, como dito na seção sobre o movimento Browniano, 3.1, têm a mesma origem, a saber a colisão da partícula de interesse com as que formam o fluido em que essa está suspensa.

Sob essa forma, (4.103), esse resultado é conhecido como segundo teorema de flutuação-dissipação em contraste com (4.100), que é conhecido como primeiro teorema de flutuação-dissipação. Essa última forma é bastante interessante por deixar explícita a relação de duas quantidades diretamente presentes na modelagem da equação de movimento, cada uma envolvida em um termo.

4.3.2 Checagem Explícita do Teorema de Flutuação-Dissipação

Os resultados que obtivemos na última sessão estabelecem teoremas de flutuação dissipação do ponto de vista, do que para nós, é a teoria de fronteira. Agora gostaríamos de a partir da teoria no bulk ter resultados semelhantes. Para tanto vamos utilizar os resultados das seções anteriores desse capítulo de modo a reobter as relações de interesse.

De início, gostaríamos de calcular o correlacionador canônico $\langle x(0); x(t) \rangle$ de modo a obter, a partir dele, $\langle p(0); p(t) \rangle$. Assim note que

$$\langle x(0); x(t) \rangle = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\lambda \langle x(-i\lambda)x(t) \rangle \quad (4.104)$$

Seguindo os passos da seção 4.1, na equação (4.10), temos que

$$\langle x(-i\lambda)x(t) \rangle = \frac{\alpha' \beta^2}{2\pi^2 \ell^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{1 + \nu^2}{1 + \rho_c^2 \nu^2} \left(\frac{e^{-i\omega t} e^{\omega \lambda} + e^{i\omega t} e^{-\omega \lambda}}{e^{\beta \omega} - 1} + e^{i\omega t} e^{-\omega \lambda} \right). \quad (4.105)$$

Integrando em λ o termo entre parênteses no integrando se torna

$$\frac{e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}}{\omega}. \quad (4.106)$$

E, dessa forma, podemos escrever, já usando as exponenciais pra escrever a soma das integrais de 0 a ∞ como apenas uma de $-\infty$ a ∞ , que

$$\langle x(0); x(t) \rangle = \frac{\alpha' \beta}{\pi \ell^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1 + \nu^2}{\omega^2 (1 + \rho_c^2 \nu^2)} e^{-i\omega t} \quad (4.107)$$

Usando as mesmas manipulações que levam a (4.63) adaptadas ao correlacionador canônico podemos escrever então, a partir (4.107), que

$$\langle p(0); p(t) \rangle = -m^2 \partial_t^2 \langle x(0); x(t) \rangle = \frac{\alpha' \beta m^2}{\pi \ell^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1 + \nu^2}{1 + \rho_c^2 \nu^2} e^{-i\omega t} \quad (4.108)$$

Disso vem que o espectro de frequências definido a partir desse correlacionador canônico é

$$I_p^c(\omega) = \frac{\alpha' \beta m^2}{\pi \ell^2} \frac{1 + \nu^2}{1 + \rho_c^2 \nu^2} \quad (4.109)$$

Mas por outro lado temos que por (4.53)

$$\begin{aligned}
2\text{Re}(\mu(\omega)) &= 2\text{Re}\left(\frac{\alpha'\beta^2 m}{2\pi\ell^2} \frac{\rho_c - i\nu}{(1 - i\nu\rho_c)\rho_c}\right) \\
&= 2\text{Re}\left(\frac{\alpha'\beta^2 m}{2\pi\ell^2} \frac{\rho_c + \nu^2\rho_c + i(\nu\rho_c^2 - \nu)}{(1 + \nu^2\rho_c^2)\rho_c}\right) \\
&= \frac{\alpha'\beta^2 m}{\pi\ell^2} \frac{1 + \nu^2}{1 + \nu^2\rho_c^2} \\
&= \frac{\beta}{m} I_p^c.
\end{aligned} \tag{4.110}$$

Com isso recuperamos (4.103) mas agora fizemos isso inteiramente a partir de resultados obtidos na teoria do bulk. Esse resultado demonstra a consistência da abordagem aqui utilizada. Estabelecemos com isso uma versão do teorema de flutuação-dissipação totalmente a partir da descrição holográfica da correspondência AdS/CFT. De fato é explicitamente evidente assim uma consistência dos resultados obtidos ao longo do trabalho, sendo corroborada a descrição desse fenômeno aqui desenvolvida.

Capítulo 5

Conclusão

Nesse trabalho estudamos a construção de um modelo, via correspondência AdS/CFT, para a descrição do movimento Browniano. Aqui focamos no caso em $1 + 1$ dimensões. De início foi introduzida a teoria convencional desse fenômeno, com a apresentação e definição de quantidades relevantes para a sua descrição. Seguindo, foi detalhada a configuração gravitacional equivalente que utilizamos para a modelagem. As soluções clássicas para o movimento da corda fundamental que se estende do buraco negro até a fronteira (brana) foram então quantizadas e normalizadas. A seguir, detalhamos uma parte dos cálculos para a obtenção do deslocamento quadrático médio a partir do modelo. Para tanto nos atemos ao movimento a ponta da corda na brana no UV, interpretando esse como descrevendo o deslocamento da partícula de interesse na teoria não gravitacional. Calculamos também, a partir do bulk, usando um campo elétrico na brana e o movimento deste sobre a corda, a admitância como função da frequência, temperatura e alguns outros parâmetros do modelo. Tendo esse resultado foi obtido o tempo de relaxação, sendo esse em concordância com o obtido a partir dos cálculos do deslocamento quadrático médio. Foi derivado, ainda, a forma para o espectro de frequências do ruído, que caracteriza o termo de flutuação na equação de Langevin que governa o movimento da partícula. Tendo essas quantidades à mão, após serem apresentados a teoria de resposta linear e o enunciado do teorema de flutuação-dissipação, esse famoso resultado, que liga as duas partes fundamentais da descrição do movimento da partícula, foi então rederivado. Vale

destacar que a obtenção de tal teorema foi feito somente com as quantidades vindas do nosso modelo holográfico.

De forma geral, foi possível demonstrar a possibilidade de um modelo para o movimento Browniano por meio da correspondência AdS/CFT. Os vários resultados obtidos, em especial, o fato de haver um teorema de flutuação-dissipação inteiramente a partir das quantidades vindas do bulk corrobora isso. Essa conjectura mostrou-se, assim, mais uma vez flexível o suficiente para a descrição de mais um fenômeno, mantendo seu poder preditivo e consistência.

Um próximo passo a ser feito com o *setup* aqui desenvolvido seria o estudo de deformações do espaço AdS com teorias duais de interesse conhecidas, isso é feito, por exemplo, por Wong e Tong em [38] por Giataganas *et al* em [39] e por Edalati *et al* em [40] mas sem se esgotarem as possibilidades. Tal abordagem é bastante promissora pois existem várias deformações, com variados aspectos e aplicações, ainda não estudadas dentro desse paradigma, cada uma representando sistemas diferentes.

Uma ideia de abordagem futura é estudar, dentro do modelo aqui descrito, uma deformação da métrica de AdS inspirada por [41] e [42]. Ela consiste em tomar a métrica básica ao invés de AdS como sendo

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} e^{kz^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2) \quad (5.1)$$

Essa deformação tem, entre outras características, o fato de prover um potencial tipo Cornell [43], que é um modelo fenomenológico para a QCD com boa concordância com os cálculos feitos na rede. Dessa forma, um modelo que a utilizasse possivelmente herdaria essa semelhança com essa teoria. Isso poderia indicar que essa métrica forneceria um bom meio de estudo para o plasma de quarks e glúons, o modelo descrito aqui adaptado daria então um modo de se calcular várias quantidades envolvidas na descrição desse sistema a temperatura não nula.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Brown, “*A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies,*” Philos. Mag. 4, 161 (1828); reimpresso em Edinburgh New Philos. J. 5, 358 (1928). 1
- [2] R. Kubo, M. Toda and N Hashitsume, “*Statistical Physics II, Nonequilibrium Statistical Mechanics*” ISBN 978-3-642-58244-8. 1, 21, 22, 50
- [3] A. Einstein, “*On the Motion of Small Particles Suspended in liquids on rest Required by the Molecular-Kinetic Theory of Heat,*”, em “Einstein’s Miraculous year, Five Papers that Changed the face of Physics”, editado por John Stachel, Princeton University Press, (1998). 2
- [4] R. Kubo, “*The fluctuation-dissipation theorem,*” Rep. Prog. Phys. 29, 255-284 (1966). 2, 19, 50, 55
- [5] R.Kubo, “*Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes I,*” J. Phys. Soc. Jpn. 12,570 (1957). 2
- [6] J. M. Maldacena, “*The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,*” Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999) [Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998)] doi:10.1023/A:1026654312961, 10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a1 [[hep-th/9711200](#)]. 2, 4, 6, 7, 8

- [7] J. M. Maldacena, “*Wilson loops in large N field theories*,” Phys. Rev. Lett. **80**, 4859 (1998) doi:10.1103/PhysRevLett.80.4859 [[hep-th/9803002](#)]. 2, 25
- [8] J. Polchinski and M. J. Strassler, “*Hard scattering and gauge / string duality*,” Phys. Rev. Lett. **88**, 031601 (2002) doi:10.1103/PhysRevLett.88.031601 [[hep-th/0109174](#)]. 3
- [9] H. Boschi-Filho and N. R. F. Braga, “*Gauge / string duality and scalar glueball mass ratios*,” JHEP **0305**, 009 (2003) doi:10.1088/1126-6708/2003/05/009 [[hep-th/0212207](#)]. 3
- [10] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog and G. T. Horowitz, “*Building a Holographic Superconductor*,” Phys. Rev. Lett. **101**, 031601 (2008) doi:10.1103/PhysRevLett.101.031601 [[arXiv:0803.3295 \[hep-th\]](#)]. 3
- [11] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog and G. T. Horowitz, “*Holographic Superconductors*,” JHEP **0812**, 015 (2008) doi:10.1088/1126-6708/2008/12/015 [[arXiv:0810.1563 \[hep-th\]](#)]. 3
- [12] S. Sachdev, “*A model of a Fermi liquid using gauge-gravity duality*,” Phys. Rev. D **84**, 066009 (2011) doi:10.1103/PhysRevD.84.066009 [[arXiv:1107.5321 \[hep-th\]](#)]. 3
- [13] S. Bhattacharyya, V. E. Hubeny, S. Minwalla and M. Rangamani, “*Nonlinear Fluid Dynamics from Gravity*,” JHEP **0802**, 045 (2008) doi:10.1088/1126-6708/2008/02/045 [[arXiv:0712.2456 \[hep-th\]](#)]. 3
- [14] P. Kovtun, D. T. Son and A. O. Starinets, “*Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics*,” Phys. Rev. Lett. **94**, 111601 (2005) doi:10.1103/PhysRevLett.94.111601 [[hep-th/0405231](#)]. 3

- [15] D. T. Son and A. O. Starinets, “*Viscosity, Black Holes, and Quantum Field Theory*,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **57**, 95 (2007) doi:10.1146/annurev.nucl.57.090506.123120 [[arXiv:0704.0240 \[hep-th\]](#)]. 3
- [16] S. Ryu and T. Takayanagi, “*Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT*,” *Phys. Rev. Lett.* **96**, 181602 (2006) doi:10.1103/PhysRevLett.96.181602 [[hep-th/0603001](#)]. 3
- [17] J. de Boer, V. E. Hubeny, M. Rangamani and M. Shigemori, “*Brownian motion in AdS/CFT*,” *JHEP* **0907**, 094 (2009) doi:10.1088/1126-6708/2009/07/094 [[arXiv:0812.5112 \[hep-th\]](#)]. vii, 3, 4, 26, 41
- [18] C. P. Herzog, A. Karch, P. Kovtun, C. Kozcaz and L. G. Yaffe, “*Energy loss of a heavy quark moving through $N=4$ supersymmetric Yang-Mills plasma*,” *JHEP* **0607**, 013 (2006) doi:10.1088/1126-6708/2006/07/013 [[hep-th/0605158](#)]. 3
- [19] S. S. Gubser, “*Drag force in AdS/CFT*,” *Phys. Rev. D* **74**, 126005 (2006) doi:10.1103/PhysRevD.74.126005 [[hep-th/0605182](#)]. 4
- [20] J. Casalderrey-Solana and D. Teaney, “*Heavy quark diffusion in strongly coupled $N=4$ Yang-Mills*,” *Phys. Rev. D* **74**, 085012 (2006) doi:10.1103/PhysRevD.74.085012 [[hep-ph/0605199](#)]. 4
- [21] E. Witten, “*Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories*,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 505 (1998) doi:10.4310/ATMP.1998.v2.n3.a3 [[hep-th/9803131](#)]. 4, 8
- [22] A. V. Ramallo, “*Introduction to the AdS/CFT correspondence*,” *Springer Proc. Phys.* **161**, 411 (2015) doi:10.1007/978-3-319-12238-0_10 [[arXiv:1310.4319 \[hep-th\]](#)]. 6, 9

- [23] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, “*Large N field theories, string theory and gravity*,” Phys. Rept. **323**, 183 (2000) doi:10.1016/S0370-1573(99)00083-6 [[hep-th/9905111](#)]. 6, 7, 8
- [24] J. Polchinski, S. Chaudhuri and C. V. Johnson, “*Notes on D-branes*,” [hep-th/9602052](#). 7
- [25] C. V. Johnson, “*D-brane primer*,” doi:10.1142/9789812799630_0002 [[hep-th/0007170](#)]. 7
- [26] E. Kiritsis, “*String theory in a nutshell*,” Princeton University Press, (2007) 7
- [27] M. Ammon and J. Erdmenger, “*Gauge/gravity duality : Foundations and applications*,” 7, 8
- [28] P. Banerjee, “*Holography and Brownian motion*,” tese PhD apresentada ao Institute of Mathematical Sciences, Chennai (2017) [[imsc.res.in](#)] 7
- [29] J. Polchinski and M. J. Strassler, “*Deep inelastic scattering and gauge / string duality*,” JHEP **0305**, 012 (2003) doi:10.1088/1126-6708/2003/05/012 [[hep-th/0209211](#)]. 9
- [30] J. I. Kapusta and C. Gale, “*Finite-temperature field theory: Principles and applications*,” doi:10.1017/CBO9780511535130 (2006). 10
- [31] R. K. Pathria, P. D. Beale, “*Statistical Mechanics*,” terceira edição, Elsevier, ISBN 978-0-12-382188-1, (2011). 15
- [32] H. Nastase, “*Introduction to the ADS/CFT Correspondence*,” ISBN-10: 1107085853 Cambridge University Press, (2015) 25

- [33] M. Bañados, C. Teitelboim and J. Zanelli, “*The Black hole in three-dimensional space-time,*” *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1849 (1992) doi:10.1103/PhysRevLett.69.1849 [[hep-th/9204099](#)]. 28
- [34] P. C. Argyres “*Introduction to the AdS/CFT Correspondence,*” em E. Papantonopoulos, “*From gravity to thermal gauge theories: The AdS/CFT correspondence,*” *Lect. Notes Phys.* **828**, 1 (2011). doi:10.1007/978-3-642-04864-7 31
- [35] E. Poisson, “A Relativist’s Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics,” doi:10.1017/CBO9780511606601 44
- [36] H. Breuer, F. Petruccione, “*The Theory of Open Quantum Systems,*” OUP Oxford, ISBN-10: 0199213909 (2007) 50
- [37] J. Sakurai, J. Napolitano, “*Modern Quantum Mechanics,*” Cambridge University Press, (2017) ISBN: 1108422411,9781108422413 50
- [38] D. Tong and K. Wong, “Fluctuation and Dissipation at a Quantum Critical Point,” *Phys. Rev. Lett.* **110**, no. 6, 061602 (2013) doi:10.1103/PhysRevLett.110.061602 [[arXiv:1210.1580](#) [[hep-th](#)]]. 61
- [39] D. Giataganas, D. S. Lee and C. P. Yeh, “*Quantum Fluctuation and Dissipation in Holographic Theories: A Unifying Study Scheme,*” *JHEP* **1808**, 110 (2018) doi:10.1007/JHEP08(2018)110 [[arXiv:1802.04983](#) [[hep-th](#)]]. 61
- [40] M. Edalati, J. F. Pedraza and W. Tangarife Garcia, “*Quantum Fluctuations in Holographic Theories with Holographic Violation,*” *Phys. Rev. D* **87** (2013) no.4, 046001 doi:10.1103/PhysRevD.87.046001 [[arXiv:1210.6993](#) [[hep-th](#)]]. 61
- [41] O. Andreev and V. I. Zakharov, “*Heavy-quark potentials and AdS/QCD,*” *Phys. Rev. D* **74**, 025023 (2006) doi:10.1103/PhysRevD.74.025023 [[hep-ph/0604204](#)]. 61

- [42] R. C. L. Bruni, E. Folco Capossoli and H. Boschi-Filho, “*Quark-antiquark potential from a deformed AdS/QCD,*” *Adv. High Energy Phys.* **2019**, 1901659 (2019) doi:10.1155/2019/1901659 [[arXiv:1806.05720 \[hep-th\]](#)]. 61
- [43] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane and T. M. Yan, “*Charmonium: The Model,*” *Phys. Rev. D* **17**, 3090 (1978) Erratum: [*Phys. Rev. D* **21**, 313 (1980)]. doi:10.1103/PhysRevD.17.3090, 10.1103/physrevd.21.313.2 61
- [44] R. M. Wald, “*Quantum Field Theory in Curved Space-Time and Black Hole Thermodynamics,*” University of Chicago Press, (1994) 68, 69
- [45] R. M. Wald, “*General Relativity,*” University of Chicago Press, (1994) doi:10.7208/chicago/9780226870373.001.0001. 68
- [46] N. D. Birrell e P. C. W. Davies, “*Quantum Fields in Curved Space,*” Cambridge University Press, (1994) doi:10.1017/CBO9780511622632 69
- [47] S. Takagi, “*Vacuum Noise and Stress Induced by Uniform Acceleration: Hawking-Unruh effect in Rindler manifold of arbitrary dimensions*” *Progress of Theoretical Physics Supplement No. 88*, (1986). 69

Apêndice A

Normalização das Soluções

Nossa ação é dada por

$$S_{NG}^{(2)} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int dx^2 \sqrt{-g(x)} g^{\mu\nu}(x) G_{IJ}(x) \frac{\partial X^I}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^J}{\partial x^\nu} \quad (\text{A.1})$$

onde $x^\mu = t, r$.

Sendo assim o momento conjugado associado ao campo $X^K, \Pi_K(x)$, é

$$\begin{aligned} \Pi_K(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 X^K)} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \sqrt{-g(x)} g^{\mu\nu}(x) G_{IJ}(x) [\delta_I^K \delta_\mu^0 \frac{\partial X^J}{\partial x^\nu} + \delta_J^K \delta_\nu^0 \frac{\partial X^I}{\partial x^\mu}] \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \sqrt{-g(x)} [g^{0\nu}(x) G_{KJ}(x) \frac{\partial X^J}{\partial x^\nu} + g^{\mu 0}(x) G_{IK}(x) \frac{\partial X^I}{\partial x^\mu}] \\ \Pi_K(x) &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{-g(x)} g^{0\nu}(x) G_{KJ}(x) \frac{\partial X^J}{\partial x^\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Desejamos agora normalizar nossas soluções e estabelecer o palco para a quantização dessas. Em essência estaremos realizando, nesse segundo passo, um exercício de teoria quântica de campos em espaço curvo. Para tanto devemos estabelecer relações de comutação a tempo constante. O equivalente em um espaçotempo curvo de uma “fatia” de tempo constante é uma superfície de Cauchy. Para um espaço tempo que permite a existência de superfícies de Cauchy¹ (globalmente hiperbólico [44]), como é o nosso caso, isso pode ser feito tomando-se as relações de comutação sob essas superfícies de modo a

¹Para uma definição precisa do que é uma superfície de Cauchy veja, por exemplo, o livro de Wald [45].

emular o que temos para o espaço de Minkowski na quantização canônica. Para tanto vamos escrever a densidade de momento sob uma dessas superfícies. Esse será dado por

$$\Pi_K(x) = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\sqrt{|h|}n^\mu G_{KJ}(x)\frac{\partial X^J}{\partial x^\mu}, \quad (\text{A.3})$$

onde h é o determinante da métrica induzida na superfície e n^μ é o vetor unitário que aponta em direção ao futuro e que é normal à superfície de Cauchy em questão.

Com isso feito vamos escrever o equivalente às condições para a quantização canônica mas sobre uma superfície de Cauchy Σ

$$\begin{aligned} [X^I(x), X^J(x')]_\Sigma &= 0, \\ [X^I(x), n^\mu\partial_\mu X^J(x')]_\Sigma &= i\frac{2\pi}{\sqrt{h}}G^{IJ}\delta(r-r'), \\ [n^\nu\partial_\nu X^I(x), n^\mu\partial_\mu X^J(x')]_\Sigma &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Temos assim relações que devem ser respeitadas pelos campos de interesse e seus momentos conjugados quando esses forem alçados a operadores.

Por outro lado, para funções $f^I(x), g^J(x)$ satisfazendo a equação de movimento (3.68), podemos definir o produto escalar de Klein Gordon(PIKG)[44][46]

$$(f, g) = -i \int_\Sigma dx (\Pi_f g - \Pi_g f). \quad (\text{A.5})$$

Ou, mais especificamente, em nosso caso

$$(f, g) = -\frac{i}{2\pi\alpha'} \int_\Sigma dx \sqrt{h} n^\mu G_{IJ} (f^I \partial_\mu g^{J*} - \partial_\mu f^I g^{J*}). \quad (\text{A.6})$$

Pode se mostrar que tal produto escalar é independente da escolha da superfície Σ (uma prova segue, por exemplo, os moldes de [47]), tal produto escalar satisfaz ainda

$$(f, g)^* = -(f^*, g^*) = (g, f) \quad (\text{A.7})$$

$$(af_1 + bf_2, g)^* = a^*(f_1, g)^* + b^*(f_2, g)^*, \quad (f, ag_1 + bg_2)^* = a(f, g_1)^* + b(f, g_2)^* \quad (\text{A.8})$$

Usando as relações de comutação (A.4) e que os campos X^I são reais temos que

$$\begin{aligned} [(f, X)_\Sigma, (g, X)_\Sigma]_\Sigma &= \frac{(-i)^2}{(2\pi\alpha')^2} \int_\Sigma \int_\Sigma dx dx' \sqrt{h} \sqrt{h'} n^\mu n^{\mu'} G_{IJ}(x) G_{KL}(x') \\ & [f^I(x) \partial_\mu X^J(x) - \partial_\mu f^I(x) X^J(x), g^K(x') \partial_\mu X^L(x') - \partial'_\mu g^K(x') X^L(x')]_\Sigma \end{aligned}$$

Usando que f e g são escalares e a linearidade do comutador, o comutador do lado direito se quebra em quatro, dois destes são nulos

$$f^I(x) g^K(x') [\partial_\mu X^J(x), \partial_\mu X^L(x')] = 0, \quad \partial_\mu f^I(x) \partial'_\mu g^K(x') [X^J(x), X^L(x')] = 0$$

Os outros dois podem ser escritos como

$$\begin{aligned} -f^I(x) \partial'_\mu g^K(x') [n^\mu \partial_\mu X^J(x), X^L(x')] &= i \frac{2\pi\alpha'}{\sqrt{h}} G^{JL} \delta(r - r') f^I(x) \partial'_\mu g^K(x') \\ -\partial_\mu f^I(x) g^K(x') [X^J(x), n^{\mu'} \partial'_\mu X^L(x')] &= -i \frac{2\pi\alpha'}{\sqrt{h}} G^{JL} \delta(r - r') \partial_\mu f^I(x) g^K(x') \end{aligned}$$

Substituindo e integrando em x' obtemos

$$\begin{aligned} [(f, X)_\Sigma, (g, X)_\Sigma]_\Sigma &= \frac{(-i)^2}{(2\pi\alpha')^2} i 2\pi\alpha' \int_\Sigma dx \sqrt{h} \sqrt{h} n^\mu G_{IJ}(x) G_{KL}(x) \frac{G^{JL}(x)}{\sqrt{h}} \\ & (f^I(x) \partial_\mu g^K(x) - \partial_\mu f^I(x) g^K(x)) \\ [(f, X)_\Sigma, (g, X)_\Sigma]_\Sigma &= -\frac{i}{2\pi\alpha} \int_\Sigma dx \sqrt{h} n^\mu G_{IK}(x) (f^I(x) \partial_\mu g^K(x) - \partial_\mu f^I(x) g^K(x)) \\ \implies [(f, X)_\Sigma, (g, X)_\Sigma]_\Sigma &= (f, g^*)_\Sigma \end{aligned} \tag{A.9}$$

sendo o resultado acima válido $\forall f, g$ satisfazendo as equações de movimento.

Se tomamos então uma base de autofunções $\{u_\alpha^I(x)\}$ satisfazendo as equações de movimento (3.68) e tais que

$$(u_\alpha, u_\beta)_\Sigma = -(u_\alpha^*, u_\beta^*)_\Sigma = \delta_{\alpha\beta}, \quad (u_\alpha, u_\beta^*)_\Sigma = 0 \tag{A.10}$$

Expandindo X^I nessa base

$$X^I(x) = \sum_\alpha [a_\alpha u_\alpha^I(x) + a^\dagger u_\alpha^{I*}] \tag{A.11}$$

E usando a seguir (A.9) com $f, g \in \{u_\alpha^I(x)\}$, chegamos a

$$[a_\alpha, a_\beta] = [a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger] = 0, \quad [a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{A.12})$$

E poderemos reconhecer a_α^\dagger e a_α como os nossos operadores “criação” e “destruição” para este problema.

A.1 Normalização do Caso AdS_3 -BTZ

Para o caso que estamos estudando aqui, ou seja, o buraco negro BTZ não rotacional em AdS_3 a métrica, como já dito, é dada por

$$ds^2 = -\frac{r_H^2}{l^2}(\rho^2 - 1)dt^2 + \frac{r_H^2}{l^2}\rho^2 dX^2 + \frac{l^2}{\rho^2 - 1}d\rho^2 \quad (\text{A.13})$$

Sendo assim

$$\sqrt{-g(x)} = \sqrt{\frac{r_H^2}{l^2}(\rho^2 - 1)\frac{l^2}{\rho^2 - 1}} = r_H, \quad g^{0\mu} = g^{00} = -\frac{l^2}{r_H^2(\rho^2 - 1)}, \quad (\text{A.14})$$

$$G_{IJ} = G_{XX} = \frac{r_H^2}{l^2}\rho^2, \quad n^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}, 0\right) \quad (\text{A.15})$$

Usando uma superfície de Cauchy $t = \text{constante}$ podemos escrever o PIKG, equação (A.6), como

$$(f, g) = \frac{-ir_H}{2\pi\alpha'} \int_\Sigma d\rho \frac{\rho^2}{\rho^2 - 1} (f\partial_t g^* - \partial_t f g^*) \quad (\text{A.16})$$

Seja a nossa base de funções nesse caso dada por

$$u_\omega(t, \rho) = A[f_\omega^+(\rho) + Bf_\omega^-(\rho)]e^{-i\omega t} \quad (\text{A.17})$$

Então

$$\partial_t u_\omega = -i\omega u_\omega, \quad \partial_t u_\omega^* = i\omega u_\omega^* \quad (\text{A.18})$$

E o PIKG se torna

$$(u_\omega, u_{\omega'}) = \frac{|A|^2 r_H}{2\pi\alpha'} (\omega + \omega') e^{-i(\omega - \omega')t} \int_{1+2\epsilon}^{\rho_c} d\rho \frac{\rho^2}{\rho^2 - 1} [f_\omega^+(\rho) + B_\omega f_\omega^-(\rho)][f_{\omega'}^{+*}(\rho) + B_{\omega'}^* f_{\omega'}^{-*}(\rho)] \quad (\text{A.19})$$

Para o caso $\omega = \omega'$

$$= \frac{\omega |A|^2 r_H}{\pi \alpha'} \int_{1+2\epsilon}^{\rho_c} d\rho \frac{\rho^2}{\rho^2 - 1} [|f^+(\rho)|^2 + |B|^2 |f^-(\rho)|^2 + 2\text{Re}(f^+(\rho)B^* f^{-*}(\rho))] \quad (\text{A.20})$$

Sendo que $\text{Re}(z)$ denota a parte real de um número complexo.

Como B é uma fase e

$$f_\omega^{+*}(\rho) = f_\omega^-(\rho) \implies |f_\omega^+(\rho)|^2 = |f_\omega^-(\rho)|^2 \quad (\text{A.21})$$

A expressão se reduz a

$$\begin{aligned} &= \frac{\omega |A|^2 r_H}{\pi \alpha'} \int_{1+2\epsilon}^{\rho_c} d\rho \frac{\rho^2}{\rho^2 - 1} [(1 + |B|^2) |f^+(\rho)|^2 + 2\text{Re}(f^+(\rho)B^* f^{-*}(\rho))] \\ &= \frac{\omega |A|^2 r_H}{\pi \alpha'} \int_{1+2\epsilon}^{\rho_c} d\rho \frac{\rho^2}{\rho^2 - 1} [2|f^+(\rho)|^2 + 2\text{Re}(f^+(\rho)B^* f^{-*}(\rho))] \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Sendo

$$|f^+(\rho)|^2 = \frac{1}{1 + \nu^2} \frac{\rho^2 + \nu^2}{\rho^2} \quad (\text{A.23})$$

A primeira integral é dada por

$$\int_{1+2\epsilon}^{\rho_c} d\rho \frac{2}{1 + \nu^2} \frac{\rho^2 + \nu^2}{\rho^2 - 1} = \left[\frac{2\rho}{1 + \nu^2} + \log\left(\frac{\rho - 1}{1 + \rho}\right) \right]_{1+2\epsilon}^{\rho_c} \quad (\text{A.24})$$

Já usando o limite de $\epsilon \ll 1$ isto equivale a

$$\frac{2\rho_c - 1 - 2\epsilon}{1 + \nu^2} + \log\left(\frac{\rho_c - 1}{\rho_c + 1}\right) + \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \quad (\text{A.25})$$

Agora se considerarmos que

$$\frac{1}{\epsilon} \gg \rho_c \quad (\text{A.26})$$

Podemos descartar os dois primeiros termos como subleading em relação ao terceiro.

Podemos justificar (A.26) se levarmos em conta que ρ_c está associado à escala de energia da massa da partícula que estamos estudando, enquanto que ϵ se relaciona com um cut-off infravermelho geral para a teoria de fronteira.

Já o segundo termo é

$$\begin{aligned}
2\text{Re}\left(B^* \int_{1+2\epsilon}^{\rho_c} d\rho f^+(\rho) f^{*-}(\rho)\right) &= 2\text{Re}\left(B^* \int_{1+2\epsilon}^{\rho_c} d\rho \frac{(\rho + i\nu)^2 \left(\frac{\rho-1}{\rho+1}\right)^{i\nu}}{(1 + i\nu)^2(\rho^2 - 1)}\right) \\
&= 2\text{Re}\left(-\frac{1}{(-1 - i\nu)\nu(\nu - i)^2} \left[2^{-2-i\nu} \left(\frac{\rho-1}{\rho+1}\right)^{i\nu} (\rho+1)^{i\nu} (-2(\nu - i)^3 {}_2F_1\left(i\nu, i\nu; i\nu + 1; \frac{1-\rho}{2}\right) \right. \right. \\
&+ 4\nu(\rho - 1) {}_2F_1\left(i\nu + 1, i\nu; i\nu + 2; \frac{1-\rho}{2}\right) + \nu(\nu + i)^2(\rho - 1) {}_2F_1\left(i\nu + 1, i\nu + 1; i\nu + 2; \frac{1-\rho}{2}\right)\left. \right]_{1+2\epsilon}^{\rho_c}\right) \quad (\text{A.27})
\end{aligned}$$

No limite superior de integração ($\rho = \rho_c$) esse resultado tem um valor finito. No limite inferior, se $\epsilon \rightarrow 0$ tal quantidade se comporta como

$$\frac{\epsilon^{i\nu}}{2} \left[\left(\frac{i(\nu - i)^2}{\nu} \right) + (\nu^2 - 2i\nu + 3) \epsilon \right] \quad (\text{A.28})$$

Sendo assim podemos considerar tal termo subleading em relação a $\log(\frac{1}{\epsilon})$. No fim do dia somos levados a escrever então

$$(u_\omega, u_\omega) = \frac{|A|^2 r_H \omega \log(\frac{1}{\epsilon})}{2\pi\alpha'} = \frac{|A|^2 l^2 \omega \log(\frac{1}{\epsilon})}{\beta\alpha'} \quad (\text{A.29})$$

Por (A.10) tal produto escalar deve ser igual à unidade, disso obtemos que

$$A = \sqrt{\frac{\beta\alpha'}{l^2 \omega \log(\frac{1}{\epsilon})}} \quad (\text{A.30})$$

E por fim

$$u_\omega(t, \rho) = \sqrt{\frac{\alpha'\beta}{2l^2 \omega \log(\frac{1}{\epsilon})}} [f_\omega^{(+)}(\rho) + B f_\omega^{(-)}(\rho)] e^{-i\omega t} \quad (\text{A.31})$$