



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA

O problema de Fermi em meios desordenados

Henrique Ribeiro de Mello

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Orientador: Felipe Siqueira de Souza da Rosa

Coorientador: Carlos Augusto Domingues Zarro

Rio de Janeiro

Agosto de 2018

Resumo

O problema de Fermi em meios desordenados

Henrique Ribeiro de Mello

Orientador: Felipe Siqueira de Souza da Rosa

Coorientador: Carlos Augusto Domingues Zarro

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Nesta dissertação, nós abordamos alguns aspectos da causalidade em um sistema formado por dois átomos, com dois níveis de energia cada um. Em particular, estudamos como a relação causal entre os átomos é estabelecida quando ambos estão inseridos em um meio com desordem.

Começamos nossa discussão fazendo uma pequena introdução sobre a história e a configuração do problema de Fermi. Em seguida, passaremos para o estudo da causalidade de um sistema de átomos de dois níveis na presença de um campo escalar livre.

Apresentamos o formalismo matemático necessário para se estudar campos quânticos em meios desordenados, onde dois tipos de desordem existentes são explorados, sendo apenas um deles considerado para o sistema estudado.

Por fim, estudamos o efeito da causalidade para um sistema de dois átomos em um meio desordenado. São descritas três situações distintas, onde a diferença entre elas se dá no nosso conhecimento sobre o estado final dos átomos e do campo escalar com o qual interagem. Mostramos que a causalidade é preservada na presença de desordem.

Palavras-chave: Problema de Fermi, causalidade, meios desordenados, sistema de dois átomos

Abstract

The Fermi problem in disordered systems

Henrique Ribeiro de Mello

Orientador: Felipe Siqueira de Souza da Rosa

Coorientador: Carlos Augusto Domingues Zarro

Abstract da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

In this dissertation, we investigate some aspects of causality in a system composed by two atoms, each with two energy levels. In particular, we are going to study how the causal relationship between the atoms works when they are in a disordered medium.

We begin this work by making a brief introduction about Fermi problem's history and setup. Then we proceed to explore causality of a two-atom system interacting with a free scalar field.

We present the necessary mathematical tools to study quantum fields in disordered media. Two different types of disorder are discussed, although only one of them is considered in this study.

At last, we study the causality in the interaction of two atoms in a disordered media. Three different situations are described, where the difference between them is the knowledge about the final state of either the atoms or the scalar field with which they interact. We have shown that causality is preserved in the presence of disorder.

Keywords: Fermi Problem, causality, disordered media, two-atom system

Sumário

Sumário	vi
Lista de Figuras	vii
1 Introdução	1
2 Detectores como sistema quânticos de dois níveis	4
2.1 Cálculo da amplitude de transição	5
3 Campos quânticos em meios desordenados	14
3.1 Teoria de perturbação em meios desordenados	16
3.2 Tipos de desordem	19
3.2.1 Desordem <i>annealed</i>	20
3.2.2 Desordem <i>quenched</i>	20
3.3 O efeito da desordem no sistema	20
4 O sistema de dois emissores quânticos em meios desordenados	24
4.1 Contribuições não-perturbadas	30
4.2 Flutuações de cone de luz e causalidade	32
5 Conclusões e discussões finais	41
Referências Bibliográficas	44

Lista de Figuras

2.1	Dois átomos, A e B , separados por uma distância r	4
2.2	Região de integração no espaço de coordenadas $\tau' \times \tau''$	11
2.3	Região de integração no novo espaço de coordenadas $\xi \times \eta$	11
2.4	Contorno escolhido para o cálculo de R_{II} depois de retirar os polos do eixo real.	12
3.1	Representação pictórica da expansão da função de Green $G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$	19
3.2	Correção de um laço para função causal de dois pontos devido à desordem no sistema.	23

Capítulo 1

Introdução

Até meados dos anos 1920, ainda não existia uma teoria da radiação que levasse em conta, satisfatoriamente, tanto os fenômenos de interferência quanto os de emissão e de absorção de luz pela matéria. O primeiro conjunto de fenômenos era descrito pela teoria de ondas, enquanto o segundo era descrito pela teoria dos *quanta* de luz.

Em 1927, Paul Dirac foi capaz de construir uma teoria [1] que explicava ambos os conjuntos de uma maneira unificada. Alguns anos depois, em 1932, Enrico Fermi desenvolveu um trabalho [2] no qual fazia uma breve revisão sobre a teoria criada por Dirac e a usava em exemplos clássicos, como, por exemplo, o espalhamento de radiação de elétrons livres, o efeito Doppler, a teoria de franjas de Lippman e a propagação de luz no vácuo. Nesta dissertação, olharemos com mais detalhes este último exemplo. Nele, Fermi considera dois átomos separados por uma distância r no espaço livre. No instante de tempo $t = 0$, o átomo A está em seu estado excitado e o átomo B , em seu estado fundamental. Após um certo tempo, A decai para seu estado fundamental, emitindo energia que, por sua vez, pode ser absorvida por B , levando-o ao seu estado excitado. Como a luz precisa de um tempo finito para percorrer a distância r de A até B , este último só poderá absorver a energia emitida pelo primeiro depois de, no mínimo, um intervalo de tempo $t = r/c$, sendo c a velocidade de propagação da luz.

O resultado obtido por Fermi foi que, após a evolução temporal do sistema, a probabi-

lidade de que o átomo A estivesse no seu estado fundamental e B no seu estado excitado é proporcional à $\theta(t - r/c)$, sendo θ é a função degrau de Heaviside

$$\theta(t - r/c) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq r/c, \\ 0, & \text{se } t < r/c. \end{cases} \quad (1.1)$$

Deste modo, esta probabilidade só é não-nula caso $t \geq r/c$. Este resultado está de acordo com o que era esperado para que não houvesse violação de causalidade.

Muitos autores voltaram a estudar esse problema detalhadamente [3–6], uma vez que existiam dúvidas sobre a veracidade do resultado obtido por Fermi. De fato, além de considerar apenas estados intermediários do sistema que conservassem energia, Fermi substituiu uma integral sobre frequências positivas por outra numa faixa de $-\infty$ até ∞ . Sem estas aproximações, aparentemente, seu cálculo não teria dado o resultado esperado, i.e. uma probabilidade não nula se $t \geq r/c$. Foram apontados, ainda, outros problemas na abordagem em si [7], por ser necessária a medição dos estados de ambos os átomos e do campo escalar simultaneamente. Contudo, foi confirmado que não existem problemas relacionados à violação de causalidade dentro da configuração de Fermi, contanto que uma análise cuidadosa seja feita [8–11].

O conceito de causalidade está intimamente ligado à existência de cones de luz na relatividade especial. No entanto, ainda não está claro como discutir causalidade em processos físicos nos quais a própria estrutura dos cones de luz é alterada. Esta alteração acontece sempre que há flutuações quânticas no espaço-tempo e são efeitos esperados em qualquer teoria de gravitação quântica. Sendo assim, um estudo mais aprofundado de tais flutuações só poderá ser feito com uma teoria de gravitação quântica completa. Apesar de tal teoria ainda parecer distante, é possível estudar as flutuações usando uma abordagem de teoria de campos efetiva, considerando efeitos de baixa energia [12–14]. Também é possível usar modelos simplificados que, em teoria, reproduziriam as flutuações quânticas dos cones de luz.

Nosso objetivo principal é investigar se o conceito de causalidade é modificado na

presença de flutuações dos cones de luz. Para isso, usaremos a configuração de Fermi e estudaremos o comportamento de campos quânticos em meios desordenados. Sendo assim, esta dissertação está organizada como se segue: no capítulo 2, calculamos a probabilidade de excitação para o sistema de Fermi de dois emissores quânticos (representando dois átomos) e mostraremos que não há violação da causalidade na zona de radiação. No capítulo 3, estudamos como campos quânticos escalares se comportam em meios desordenados. Mais especificamente, nós consideramos um campo quântico escalar descrito por uma equação do tipo Klein-Gordon, nos quais os parâmetros da equação — a massa e o coeficiente da derivada temporal de segunda ordem — são funções aleatórias das coordenadas espaciais. Discutimos, ainda, o método perturbativo em uma teoria de campo escalar livre na presença da desordem, que será necessário no capítulo seguinte. No capítulo 4, aplicamos os conceitos vistos nos dois capítulos anteriores no estudo da causalidade quando temos flutuações nos cones de luz. Estas flutuações podem ser tratadas classicamente e os efeitos da propagação de campos quânticos podem ser descritos no contexto das equações diferenciais aleatórias abordadas no capítulo 3.

Capítulo 2

Detectores como sistema quânticos de dois níveis

O problema de Fermi trata, em essência, do estudo da causalidade em um determinado sistema físico, a partir de cálculos de probabilidade de excitação e decaimento de átomos desse sistema. A configuração analisada por Fermi era formada por dois átomos, A e B , localizados no espaço livre e separados por uma distância r , como indicado na figura 2.1. Por simplicidade, estes átomos serão tratados como tendo apenas dois níveis de energia. No instante inicial, A encontra-se excitado e B , no estado fundamental. Como o átomo A decai inexoravelmente, há uma probabilidade não-nula que a excitação emitida por ele seja absorvida por B , excitando-o. Neste contexto, uma questão fundamental a ser respondida é a partir de que instante de tempo t o átomo B poderá absorver o *quantum* de energia emitido. Para que não haja violação de causalidade, o intervalo de tempo mínimo para que isso aconteça precisa ser $t = r/c$. Podemos dizer que, de certa maneira, o átomo B age como um detector de fótons.

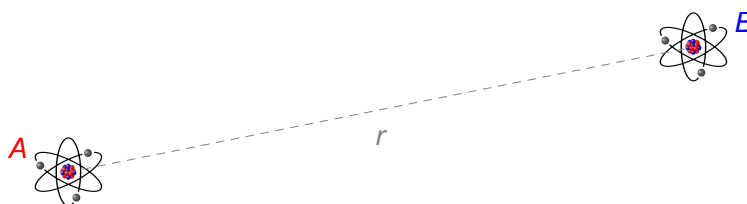


Figura 2.1: Dois átomos, A e B , separados por uma distância r .

Neste capítulo, apresentaremos dois tipos de detectores: um proposto separadamente por Glauber [15], Loudon [16] e Nussenzveig [17] e outro proposto por Unruh [18] e DeWitt [19]. Este segundo detector será estudado de forma mais aprofundada e, por fim, será usado para determinar a probabilidade de excitação do átomo B no modelo de Fermi. Além disso, este método servirá como base para os capítulos seguintes.

2.1 Cálculo da amplitude de transição

Considere dois objetos pontuais A e B com uma estrutura interna de dois níveis de energia com frequências $\omega_g < \omega_e$ e seus respectivos autoestados $|g_i\rangle$ e $|e_i\rangle$. Nesta notação, g_i e e_i corresponde, nesta ordem, aos estados fundamental e excitado do objeto i .

Ambos os átomos interagem entre si e também com um campo escalar $\phi(x(\tau))$, cujos estados inicial e final são caracterizados por ψ_i e ψ_f . A interação entre o campo e os átomos é linear e pode ser descrita pelo hamiltoniano

$$H_{int} = \sum_{i=1,2} \beta m_i(\tau) \phi_i(x(\tau)), \quad (2.1)$$

onde $m_i(\tau)$ é o operador de monopolo do átomo i e β é uma constante arbitrária. O hamiltoniano H do sistema é

$$H = H_0 + H_{int}, \quad (2.2)$$

onde H_0 contém a contribuição do campo livre e do detector — H_D —, enquanto H_{int} é o hamiltoniano de interação, que, no quadro de interação, evolui da forma [20]

$$H_{int} = e^{\frac{iH_0\tau}{\hbar}} H_{int}(0) e^{-\frac{iH_0\tau}{\hbar}}, \quad (2.3)$$

sendo que $H_{int}(0)$ coincide com o hamiltoniano de interação na representação de Schrödinger $H_{int,S}$.

De forma semelhante, o operador de monopolo magnético evolui temporalmente da seguinte maneira [21]:

$$m_i(\tau) = e^{iH_D\tau} m_i(0) e^{-iH_D\tau} \quad (2.4)$$

de tal forma que o hamiltoniano do detector H_D satisfaz a equação

$$H_D|g\rangle = \hbar\omega_g|g\rangle, \quad (2.5)$$

$$H_D|e\rangle = \hbar\omega_e|e\rangle. \quad (2.6)$$

Podemos definir o estado inicial do sistema como sendo um produto tensorial entre os estados iniciais dos átomos e do campo, ou seja,

$$|\tau_0\rangle = |e_1\rangle \otimes |g_2\rangle \otimes |\psi_i\rangle \equiv |e_1g_2\psi_i\rangle. \quad (2.7)$$

Na Eq. (2.7), um átomo está excitado, o segundo está no estado fundamental e o campo, em um estado arbitrário.

No instante de tempo τ_0 , a interação entre campo e o detector é ligada, de forma que o estado τ evolui como

$$|\tau\rangle = U(\tau, \tau_0)|\tau_0\rangle \quad (2.8)$$

Sabendo então que, no quadro de interação, temos

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau}|\tau\rangle = H_{int}|\tau\rangle, \quad (2.9)$$

É possível concluir que o operador de evolução $U(\tau, \tau_0)$ satisfaz

$$U(\tau, \tau_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{\tau_0}^{\tau} H_{int}(\tau')U(\tau', \tau_0)d\tau', \quad (2.10)$$

de onde obtemos, perturbativamente, a chamada série de Dyson [22]

$$U(\tau, \tau_0) = 1 - i \int_{\tau_0}^{\tau} H_{int}(\tau') \left(1 - i \int_{\tau_0}^{\tau'} H_{int}(\tau'')(1 - \dots)d\tau'' \right) d\tau', \quad (2.11)$$

Na expressão acima, já foram omitidos os termos de ordem $\mathcal{O}(\hbar^{-3})$.

Consequentemente, mantendo até a segunda ordem em τ e, sem perda de generalidade, tomando $\tau_0 = 0$, podemos escrever

$$U(\tau, 0) = 1 - i \int_0^{\tau} d\tau' H_{int}(\tau') - \int_0^{\tau} d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' H_{int}(\tau')H_{int}(\tau''). \quad (2.12)$$

De posse do operador de evolução temporal, é possível calcular a amplitude de transição entre os estados $|e_1g_2\psi_i\rangle$ e $|g_1e_2\psi_f\rangle$ pela expressão

$$\begin{aligned}
A_{i \rightarrow f} &= \langle e_2g_1\psi_f | U(\tau, 0) | e_1g_2\psi_i \rangle \\
&= \langle \psi_f e_2g_1 | e_1g_2\psi_i \rangle - i \int_0^\tau d\tau' \langle e_2g_1\psi_f | H_{int}(\tau') | e_1g_2\psi_i \rangle \\
&\quad - \int_0^\tau d\tau' \int_0^\tau d\tau'' \langle e_2g_1\psi_f | H_{int}(\tau') H_{int}(\tau'') | e_1g_2\psi_i \rangle
\end{aligned} \tag{2.13}$$

A contribuição do primeiro termo é nula, já que

$$\langle \psi_f e_2g_1 | e_1g_2\psi_i \rangle = \langle e_2 | g_2 \rangle \langle g_1 | e_1 \rangle = 0. \tag{2.14}$$

De forma semelhante, o segundo termo não contribui para a amplitude de transição entre os estados inicial e final, pois

$$\begin{aligned}
-i \left\langle \psi_f e_2g_1 \left| \int_{\tau_0}^\tau d\tau' H_I(\tau') \right| e_1g_2\psi_i \right\rangle &= -i\lambda \int_{\tau_0}^\tau d\tau' \langle \psi_f e_2g_1 | (m_1(\tau')\varphi_1(\tau') + m_2(\tau')\varphi_2(\tau')) | e_1g_2\psi_i \rangle \\
&= -i\lambda \int_{\tau_0}^\tau d\tau' \langle g_1 | m_1(\tau') | e_1 \rangle \overbrace{\langle e_2 | g_2 \rangle}^{=0} \langle \psi_f | \varphi_1(\tau') | \psi_i \rangle + \\
&\quad - i\lambda \int_{\tau_0}^\tau d\tau' \underbrace{\langle g_1 | e_1 \rangle}_{=0} \langle e_2 | m_2(\tau') | g_2 \rangle \langle \psi_f | \varphi_2(\tau') | \psi_i \rangle \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

O último termo na Eq.(2.13) contribuirá para a amplitude da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \psi_f e_2 g_1 \left| \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' H_I(\tau') \int_{\tau_0}^{\tau'} d\tau'' H_I(\tau'') \right| e_1 g_2 \psi_i \right\rangle = \lambda^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} d\tau'' \\
& \langle \psi_f e_2 g_1 | (m_1(\tau')\varphi_1(\tau') + m_2(\tau')\varphi_2(\tau')) \\
& \times (m_1(\tau'')\varphi_1(\tau'') + m_2(\tau'')\varphi_2(\tau'')) | e_1 g_2 \psi_i \rangle \\
& = \lambda^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} d\tau'' \langle g_1 | m_1(\tau') m_1(\tau'') | e_1 \rangle \overbrace{\langle e_2 | g_2 \rangle}^{=0} \langle \psi_f | \varphi_1(\tau') \varphi_1(\tau'') | \psi_i \rangle + \\
& + \lambda^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} d\tau'' \langle g_1 | m_1(\tau') | e_1 \rangle \langle e_2 | m_2(\tau'') | g_2 \rangle \langle \psi_f | \varphi_1(\tau') \varphi_2(\tau'') | \psi_i \rangle + \\
& + \lambda^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} d\tau'' \langle e_2 | m_2(\tau') | g_2 \rangle \langle g_1 | m_1(\tau'') | e_1 \rangle \langle \psi_f | \varphi_2(\tau') \varphi_1(\tau'') | \psi_i \rangle + \\
& + \lambda^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} d\tau'' \underbrace{\langle g_1 | e_1 \rangle}_{=0} \underbrace{\langle e_2 | m_2(\tau') m_2(\tau'') | g_2 \rangle}_{=0} \langle \psi_f | \varphi_2(\tau') \varphi_2(\tau'') | \psi_i \rangle \\
& = \lambda^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} d\tau'' \langle g_1 | m_1(\tau') | e_1 \rangle \langle e_2 | m_2(\tau'') | g_2 \rangle \langle \psi_f | \varphi_1(\tau') \varphi_2(\tau'') | \psi_i \rangle + \\
& + \lambda^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} d\tau'' \langle e_2 | m_2(\tau') | g_2 \rangle \langle g_1 | m_1(\tau'') | e_1 \rangle \langle \psi_f | \varphi_2(\tau') \varphi_1(\tau'') | \psi_i \rangle \\
& = \lambda^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} d\tau'' \left(\frac{i}{2} e^{-i\omega_0(\tau'-\tau_0)} \right) \left(-\frac{i}{2} e^{i\omega_0(\tau''-\tau_0)} \right) \langle \psi_f | \varphi_1(\tau') \varphi_2(\tau'') | \psi_i \rangle + \\
& + \lambda^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} d\tau'' \left(-\frac{i}{2} e^{i\omega_0(\tau'-\tau_0)} \right) \left(\frac{i}{2} e^{-i\omega_0(\tau''-\tau_0)} \right) \langle \psi_f | \varphi_2(\tau') \varphi_1(\tau'') | \psi_i \rangle \\
& = \frac{\lambda^2}{4} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} d\tau'' \left(e^{-i\omega_0(\tau'-\tau'')} \langle \psi_f | \varphi_1(\tau') \varphi_2(\tau'') | \psi_i \rangle + e^{i\omega_0(\tau'-\tau'')} \langle \psi_f | \varphi_2(\tau') \varphi_1(\tau'') | \psi_i \rangle \right).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

onde, da antepenúltima para a penúltima igualdade, foi usada a evolução temporal do operador $m_i(\tau)$ dada pela Eq. (2.4).

Até aqui os estados inicial e final do campo não foram especificados. Nosso interesse, neste momento, é calcular a relação de causalidade entre os dois átomos com o campo em seu estado fundamental (vácuo de Minkowski). Faremos, então, $|\psi_f\rangle = |\psi_i\rangle = |0\rangle$.

O segundo termo do lado direito da Eq. (2.16) é reescrito como

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^2}{4} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} d\tau'' e^{i\omega_0(\tau'-\tau'')} \langle 0_\mu | \varphi_2(\tau') \varphi_1(\tau'') | 0_\mu \rangle &= \\
&= \frac{\lambda^2}{4} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'' \int_{\tau''}^{\tau} d\tau' e^{i\omega_0(\tau'-\tau'')} \langle 0_\mu | \varphi_2(\tau') \varphi_1(\tau'') | 0_\mu \rangle \\
&= \frac{\lambda^2}{4} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau'}^{\tau} d\tau'' e^{-i\omega_0(\tau'-\tau'')} \langle 0_\mu | \varphi_2(\tau'') \varphi_1(\tau') | 0_\mu \rangle \\
&= \frac{\lambda^2}{8} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'' e^{-i\omega_0(\tau'-\tau'')} \langle 0_\mu | \mathcal{T}(\varphi_1(\tau') \varphi_2(\tau'')) | 0_\mu \rangle. \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Nos passos acima, fez-se o uso de uma mudança tanto na ordem de integração e também uma troca de variáveis mudas. É importante ressaltar que a penúltima linha da Eq.(2.17) é temporalmente ordenada para $\tau' < \tau''$.

O primeiro termo da Eq.(2.17) pode ser diretamente escrito da forma

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^2}{4} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} d\tau'' e^{-i\omega_0(\tau'-\tau'')} \langle 0_\mu | \varphi_1(\tau') \varphi_2(\tau'') | 0_\mu \rangle &= \frac{\lambda^2}{8} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'' e^{-i\omega_0(\tau'-\tau'')} \\
&\times \langle 0_\mu | \mathcal{T}(\varphi_1(\tau') \varphi_2(\tau'')) | 0_\mu \rangle. \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Somando os dois termos da equação Eq.(2.16), a amplitude de probabilidade Eq.(2.13) fica

$$\begin{aligned}
A_{i \rightarrow f} &= - \left\langle 0_\mu e_2 g_1 \left| \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' H_I(\tau') \int_{\tau_0}^{\tau'} d\tau'' H_I(\tau'') \right| e_1 g_2 0_\mu \right\rangle \\
&= - \frac{\lambda^2}{4} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'' e^{-i\omega_0(\tau'-\tau'')} \langle 0_\mu | \mathcal{T}(\varphi_1(\tau') \varphi_2(\tau'')) | 0_\mu \rangle. \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Para o caso de dois átomos de dois níveis cada um e usando $\hbar = 1$, a função resposta F é similar e dada por

$$F(E, \tau) = \int_0^{\tau} d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' e^{-iE(\tau'-\tau'')} \langle 0 | \phi(x_1(\tau')) \phi(x_2(\tau'')) | 0 \rangle, \quad (2.20)$$

sendo $x_i(\tau)$ a posição do átomo i no espaço-tempo. Para facilitar o cálculo, é conveniente resolver a integral sobre uma região de integração onde os limites são iguais. Isso implica

que os campos em x_1 e x_2 estão ordenados temporalmente e que $F(E, \tau)$ pode ser reescrita na forma

$$F(E, \tau) = \int_0^\tau d\tau' \int_0^\tau d\tau'' e^{-iE(\tau' - \tau'')} \langle 0 | T \phi(x_1(\tau')) \phi(x_2(\tau'')) | 0 \rangle, \quad (2.21)$$

onde

$$T \phi(x_1(\tau')) \phi(x_2(\tau'')) = \begin{cases} \phi(x_1(\tau')) \phi(x_2(\tau'')), & \text{se } \tau' \geq \tau'', \\ \phi(x_1(\tau'')) \phi(x_2(\tau')), & \text{se } \tau' < \tau''. \end{cases} \quad (2.22)$$

O termo multiplicando a exponencial na Eq. (2.21) é o propagador de Feynman, que em ordem zero é dado por

$$\langle 0 | T \phi(x_1(\tau')) \phi(x_2(\tau'')) | 0 \rangle = \Delta_0 = \frac{i}{8\pi^2 \sigma} - \frac{1}{8\pi} \delta(\sigma), \quad (2.23)$$

com

$$\sigma = \frac{1}{2} [(\tau' - \tau'')^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2]. \quad (2.24)$$

Consequentemente, a integral (2.21) pode ser reescrita como a soma de duas integrais distintas

$$F(E, \tau) = F_I(E, \tau) + iF_{II}(E, \tau), \quad (2.25)$$

tal que

$$F_I(E, \tau) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\tau d\tau' \int_0^\tau d\tau'' e^{-iE(\tau' - \tau'')} \delta((\tau' - \tau'')^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2), \quad (2.26)$$

$$F_{II}(E, \tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\tau d\tau' \int_0^\tau d\tau'' \frac{e^{-iE(\tau' - \tau'')}}{(\tau' - \tau'')^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}. \quad (2.27)$$

Calcularemos, primeiramente, o termo F_I . Escolhendo convenientemente novas variáveis $\xi = \tau' - \tau''$ e $\eta = \tau' + \tau''$, como indicado nas figuras 2.2 e 2.3, F_I pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} F_I(E, \tau) &= -\frac{1}{8\pi} \int_{-\tau}^\tau d\xi \int_{-|\xi|}^{-|\xi| + \tau} d\eta e^{-iE\xi} \delta(\xi^2 - r^2) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\tau}^\tau d\xi (\tau - |\xi|) e^{-iE\xi} \delta(\xi^2 - r^2). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Na expressão anterior, usamos o fato de que a distância entre os dois átomos é constante, já que $x_1(\tau') - x_2(\tau'') = r$.

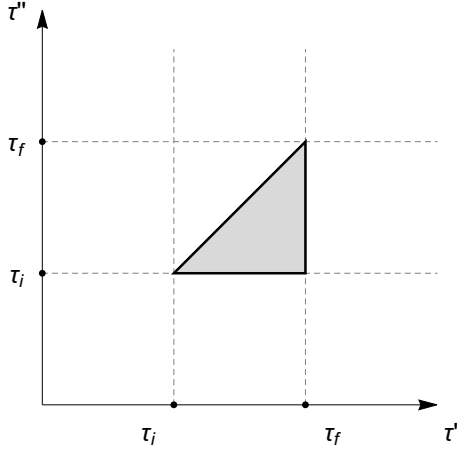


Figura 2.2: Região de integração no espaço de coordenadas $\tau' \times \tau''$.

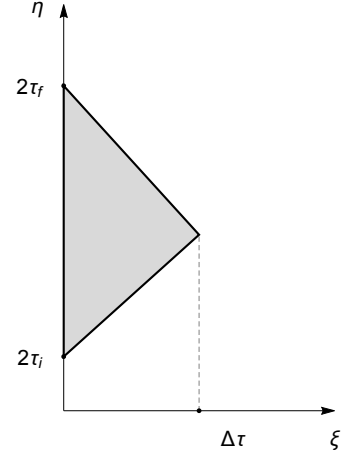


Figura 2.3: Região de integração no novo espaço de coordenadas $\xi \times \eta$.

Definindo a taxa de transição por unidade de tempo próprio $R_I(E, \tau) = \frac{\partial F_I(E, \tau)}{\partial \tau}$ como sendo

$$R_I(E, \tau) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\tau}^{\tau} d\xi e^{-iE\xi} \delta(\xi^2 - r^2) \quad (2.29)$$

e sabendo que a delta de Dirac possui a propriedade [23]

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2} (\delta(x + a) + \delta(x - a)), \quad (2.30)$$

esta taxa pode ser expressa como

$$R_I(E, \tau) = -\frac{1}{8\pi} \int_{-\tau}^{\tau} d\xi e^{-iE\xi} [\delta(\xi + r) + \delta(\xi - r)]. \quad (2.31)$$

Essa integral só é não-trivial se $\tau > r$, pois apenas assim a faixa de integração incluirá os valores r e $-r$ que fornecerão contribuições não-nulas para a integral. Portanto,

$$\begin{aligned} R_I(E, \tau) &= (e^{-iEr} + e^{iEr})\theta(\tau - r)\theta(\tau + r) \\ &= 2\cos(Er)\theta(\tau - r)\theta(\tau + r). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Note que a Eq. (2.32) nos diz que o segundo átomo, inicialmente no estado fundamental, só passará a sofrer a influência do primeiro após um tempo $\tau > r$, respeitando a causalidade.

O termo F_{II} pode ser calculado aplicando a mesma mudança de variáveis feita para o cálculo de F_I — $\xi = \tau' - \tau''$ e $\eta = \tau' + \tau''$. Com isso, obtemos

$$F_{II}(E, \tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\tau}^{\tau} d\xi (\tau - |\xi|) \frac{e^{-iE\xi}}{\xi^2 - r^2}. \quad (2.33)$$

Novamente, definindo a taxa de transição por unidade de tempo próprio como sendo $R_{II}(E, \tau) = \frac{\partial F_{II}(E, \tau)}{\partial \tau}$, temos

$$R_{II}(E, \tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\tau}^{\tau} d\xi \frac{e^{-iE\xi}}{\xi^2 - r^2}. \quad (2.34)$$

Esta integral possui dois polos no eixo real. Uma técnica comum nestas situações é utilizar uma prescrição que desloca os polos para cima, usando um semi-círculo de raio R como contorno no plano complexo, indicado na figura 2.4. Isto nos permite escrever

$$R_{II}(E, \tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\tau}^{\tau} d\xi \frac{e^{-iE\xi}}{(\xi - i\epsilon)^2 - r^2} \quad (2.35)$$

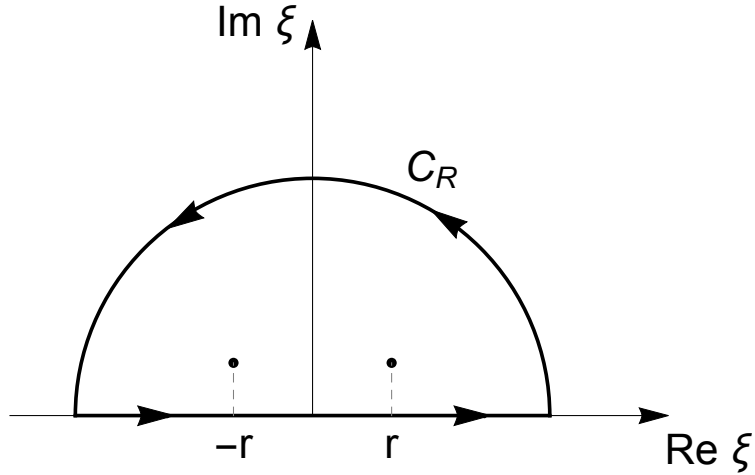


Figura 2.4: Contorno escolhido para o cálculo de R_{II} depois de retirar os polos do eixo real.

Ao final dos cálculos, devemos tomar o limite em que ϵ tende a zero. A integral no plano complexo pode ser desenvolvida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \oint d\xi \frac{e^{-iE\xi}}{(\xi - i\epsilon)^2 - r^2} &= \int_{-R}^{-\tau} d\xi \frac{e^{-iE\xi}}{(\xi - i\epsilon)^2 - r^2} + \int_{-\tau}^{\tau} d\xi \frac{e^{-iE\xi}}{(\xi - i\epsilon)^2 - r^2} \\ &+ \int_{\tau}^R d\xi \frac{e^{-iE\xi}}{(\xi - i\epsilon)^2 - r^2} + \int_{C_R} d\xi \frac{e^{-iE\xi}}{(\xi - i\epsilon)^2 - r^2}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

No limite $R \rightarrow \infty$, a integral no semicírculo se anula, segundo o lema de Jordan. Além disso, é possível reescrever o primeiro e terceiro termos do lado direito da equação anterior em uma única integral fazendo $\xi \rightarrow -\xi$ no primeiro termo. No limite em que ϵ tende a zero, temos

$$\oint d\xi \frac{e^{-iE\xi}}{(\xi - i\epsilon)^2 - r^2} = \int_{-\tau}^{\tau} d\xi \frac{e^{-iE\xi}}{\xi^2 - r^2} + 2 \int_{\tau}^{\infty} d\xi \frac{\cos(E\xi)}{\xi^2 - r^2}. \quad (2.37)$$

Pelo teorema de resíduos [23], o lado esquerdo da equação anterior é

$$\oint d\xi \frac{e^{-iE\xi}}{(\xi - i\epsilon)^2 - r^2} = 2\pi i \sum_k \text{Res} \left(\frac{e^{-iE\xi}}{(\xi - i\epsilon)^2 - r^2}, b_k \right) = \pi \frac{\sin(Ed)}{r} \Theta(-E), \quad (2.38)$$

Denotando por b_k os polos da função, temos $b_1 = i\epsilon + d$ e $b_2 = i\epsilon - d$. A função Θ tem origem na escolha do contorno no eixo superior. Dessa forma, a integral que buscávamos tem a solução

$$R_{II}(E, \tau) = \theta(-E) \frac{\sin(Er)}{2\pi r} - 2 \int_{\tau}^{\infty} d\xi \frac{\cos(E\xi)}{\xi^2 - r^2}. \quad (2.39)$$

O termo R_{II} está relacionado com a emissão de um fóton pelo átomo inicialmente excitado e é uma combinação da integral trigonométrica $\text{Ci}(\omega_0 r)$ com a função $\text{sen}(\omega_0 r)$. Apenas faz sentido, porém, discutir causalidade para distâncias muito maiores que o comprimento de onda do fóton, na chamada zona de radiação, isto é, no regime em que $\omega_0 r \gg 1$ [21,24,25]. Neste limite, os termos de R_{II} tendem a zero, restando apenas R_I , que dá origem a uma contribuição causal. Concluimos, então, que, de acordo com este modelo teórico para a interação entre os átomos A e B , submetidos a um campo escalar livre, a causalidade como definida por Pauli é preservada.

Capítulo 3

Campos quânticos em meios desordenados

Neste capítulo, investigaremos o comportamento de campos quânticos em um meio desordenado. Mais especificamente, consideraremos um campo quântico escalar descrito por uma equação do tipo Klein-Gordon, onde os parâmetros da equação — a massa e o coeficiente da derivada temporal de segunda ordem — são funções aleatórias das coordenadas espaciais. A aleatoriedade dos parâmetros se deve às fontes de ruído branco, *i.e.*, variáveis aleatórias descorrelacionadas com variância finita e média zero, que se acoplam ao campo de escalar. Aqui, não será explicitada a fonte de ruído utilizada, mas é importante esclarecer que tais fontes podem ser induzidas através de vários fenômenos. Estes incluem, entre outros, flutuações da métrica devido à criação de grávitons em um estado comprimido coerente na presença de um buraco negro e também interações com defeitos topológicos de fundo [26].

Assim como no caso de campos quânticos na presença de um banho térmico externo, as fontes de ruído quebram a simetria de Lorentz, já que definem um sistema de coordenadas privilegiado [27, 28]. Um campo quântico escalar associado a ondas acústicas em um meio desordenado pode definir uma situação na qual os cones de som flutuam aleatoriamente [29]. Nestas análises, é válido notar que sistemas com desordem podem ser divididos em

dois grandes grupos: sistemas com desordem *quenched* e outros com desordem *annealed* [30]. Nos sistemas *annealed*, o campo aleatório se encontra em equilíbrio térmico com outros graus de liberdade, enquanto em sistemas *quenched*, isso não acontece. A diferença entre estes dois grupos passa a ser relevante quando analisamos a influência de impurezas em fenômenos de transição de fase. Voltaremos nesta questão mais à frente nesse capítulo, quando calcularmos funções de correlação.

Ao longo desse capítulo serão considerados campos fracos de ruído, de maneira que seja possível implementar uma expansão perturbativa controlada por parâmetros pequenos que caracterizem a intensidade das funções de correlação do ruído. A partir daí, obteremos as funções de Green de dois pontos do campo escalar. Tomando a média sobre a desordem destas funções, poderemos obter funções de dois pontos qualitativamente parecidas com uma teoria autointeragente $\lambda\phi^4$, com um acoplamento dependente de uma frequência.

Desde o artigo original de Unruh [18], a possibilidade de simular aspectos da relatividade geral e de campos quânticos em espaços-tempo curvos através de modelos análogos tem sido amplamente discutida na literatura [29, 31–34]. Uma proposta interessante é a geração de métricas acústicas em condensados de Bose-Einstein e superfluidos [35]. Neste contexto, fluidos ideais de Fermi em uma dimensão mostram um modelo análogo à radiação Hawking. Por outro lado, modelos análogos com buracos negros sônicos podem ter um certo tipo de generalização dentro do contexto de fluidos aleatórios. Uma possibilidade muito interessante é ir além da aproximação semi-clássica, na qual parte do sistema é descrita através da mecânica quântica e outra parte é descrita através da mecânica clássica, e investigar a influência da desordem nesses modelos. Os cálculos apresentados nesse capítulo são os primeiros passos na implementação de tal investigação.

3.1 Teoria de perturbação em meios desordenados

Considere, primeiramente, um campo escalar $\phi(t, \mathbf{r})$ definido em um espaço-tempo com $(d + 1)$ dimensões que satisfaz à equação de Klein-Gordon aleatória

$$\left[(1 + \mu) \frac{1}{u_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + (1 + \xi) m_0^2 \right] \phi(t, \mathbf{r}) = 0, \quad (3.1)$$

onde u_0 é a velocidade de propagação do campo no meio, no caso em que não há desordem e as grandezas $\mu = \mu(\mathbf{r})$ e $\xi = \xi(\mathbf{r})$ são variáveis que descrevem a desordem, cujas propriedades serão definidas posteriormente.

É um fato conhecido que a parte principal de uma equação diferencial, isto é, os termos com derivadas de ordem mais alta, determina completamente a localização de pontos no espaço-tempo onde uma solução pode ter descontinuidades não-nulas [36]. Esta propriedade está na raiz de todos os modelos análogos de gravitação clássica, de modo que uma causalidade efetiva pode ser obtida a partir das propriedades cinemáticas de um sistema físico. A região de influência das excitações são dadas por um pacote que caracteriza a velocidade máxima de propagação, ou seja, o cone de luz da teoria. Do ponto de vista físico, a região de influência de uma teoria pode ser obtida por uma aproximação eikonal [37], a partir da negligência do termo de massa.

Como a Eq. (3.1) é linear em $\phi(t, \mathbf{r})$, é conveniente utilizar transformações de Fourier para buscar sua solução. Sendo assim, definimos a transformada de Fourier de $\phi(t, \mathbf{r})$ na variável temporal t como sendo

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \phi(\omega, \mathbf{r}) \quad (3.2)$$

e, na variável espacial \mathbf{r} , temos

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \phi(t, \mathbf{k}). \quad (3.3)$$

Definimos, ainda, transformadas de Fourier para as funções de desordem estacionárias:

$$\mu(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mu(\mathbf{k}), \quad (3.4)$$

e

$$\xi(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \xi(\mathbf{k}). \quad (3.5)$$

A nomenclatura “estacionárias” advém do fato de que estas desordens são constantes no tempo.

Usando estas transformadas de Fourier na Eq. (3.1), obtemos a equação algébrica satisfeita pelas componentes do campo $\phi(\omega, \mathbf{k})$, dada por

$$\int d\mathbf{k}' \left[L_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + L_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \right] \phi(\omega, \mathbf{k}') = 0, \quad (3.6)$$

onde L_0 é uma matriz não-aleatória com elementos

$$L_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \left(\frac{\omega^2}{u_0^2} - \mathbf{k}^2 - m_0^2 \right) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (3.7)$$

e $L_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ é uma matriz de desordem com elementos

$$L_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^d} \left(\mu(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{\omega^2}{u_0^2} - \xi(\mathbf{k} - \mathbf{k}') m_0^2 \right). \quad (3.8)$$

No espaço \mathbf{r} , L_0 e L_1 são escritos na forma

$$L_0(\mathbf{r}) = \frac{\omega^2}{u_0^2} + \nabla^2 - m_0^2, \quad (3.9)$$

$$L_1(\mathbf{r}) = \mu(\mathbf{r}) \frac{\omega^2}{u_0^2} - \xi(\mathbf{r}) m_0^2. \quad (3.10)$$

Assim como no espaço \mathbf{k} , elas atuam como operadores de convolução integral. Note que, enquanto L_1 é diagonal, L_0 é não-diagonal no espaço \mathbf{r} . Já no espaço \mathbf{k} , a situação se inverte. Em termos desses operadores, a equação de Klein-Gordon aleatória pode ser escrita em sua forma matricial:

$$(L_0 + L_1)\phi(\omega, \cdot) = 0. \quad (3.11)$$

A partir daí, podemos a função de green G como sendo

$$G = (L_0 + L_1)^{-1}. \quad (3.12)$$

Supondo que a desordem é fraca, é possível expandir G como uma série de Dyson [22]:

$$\begin{aligned} G &= G^{(0)} - G^{(0)}L_1G^{(0)} + G^{(0)}L_1G^{(0)}L_1G^{(0)} + \dots \\ &= G^{(0)} - G^{(0)}\Sigma G^{(0)}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

com a autoenergia Σ dada por

$$\Sigma = L_1 - L_1G^{(0)}L_1 + \dots, \quad (3.14)$$

onde $G^{(0)} = L_0^{-1}$ é a função de Green não-perturbada que pode ser escrita como

$$G^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega^2 - (\mathbf{k}^2 + m_0^2) + i\epsilon}, \quad (3.15)$$

sendo ϵ uma quantidade infinitesimal e positiva, inserida convenientemente por razões de convergência.

A equação (3.13) pode ser reescrita como

$$G = G^{(0)} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}^{(n)} \right), \quad (3.16)$$

com \mathcal{G} dado por

$$\mathcal{G}^{(n)} = (-1)^n \prod_{j=1}^n (L_1 G^{(0)})^j. \quad (3.17)$$

Em termos de variáveis temporais e espaciais, $x = (t, \mathbf{x})$, isso corresponde a escrever

$$G(x, x') = \int dz_1 G^{(0)}(x - z_1) \left[\delta(z_1 - x') + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}^{(n)}(z_1, x') \right] \quad (3.18)$$

e

$$\mathcal{G}^{(n)} = (-1)^n \prod_{j=1}^n (L_1(z_j)) \int dz_{j+1} G^{(0)}(z_j, z_{j+1}), \quad (3.19)$$

onde $L_1(x)$ é expresso por

$$L_1(x) = L_1(t, \mathbf{x}) = -\mu(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \xi(\mathbf{x}) m_0^2. \quad (3.20)$$

Daqui pra frente suporemos $u_0 = 1$ por simplicidade, uma vez que as características que queremos explorar não serão influenciadas por este parâmetro.

Vale notar que $iG^{(0)} = \Delta_0$, sendo Δ_0 o propagador de Feynman livre [21]. Este propagador é o valor esperado, no vácuo, do produto ordenado temporalmente dos operadores de campo ϕ nos pontos $x = (t, \mathbf{x})$ e $x' = (t', \mathbf{x}')$, ou seja,

$$\Delta_0(x, x') = \langle 0|T[\phi(t, \mathbf{x})\phi(t', \mathbf{x}')] |0\rangle. \quad (3.21)$$

Em sua forma explícita e até a segunda ordem dos campos de ruído, a função de Green no espaço \mathbf{r} é escrita como

$$\begin{aligned} G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= G^{(0)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') - \int d\mathbf{r}_1 G^{(0)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) [\mu(\mathbf{r}_1)\omega^2 - \xi(\mathbf{r}_1)m_0^2] G^{(0)}(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \\ &+ \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 G^{(0)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}_2) [\mu(\mathbf{r}_2)\omega^2 - \xi(\mathbf{r}_2)m_0^2] \\ &\times G^{(0)}(\omega, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) [\mu(\mathbf{r}_1)\omega^2 - \xi(\mathbf{r}_1)m_0^2] G^{(0)}(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}') + \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

A Eq.(3.22) pode ser representada pictoricamente na figura 3.1. Nela, o número de linhas sinuosas representa a ordem de perturbação daquele termo específico. A primeira linha é a função de Green não-perturbada, enquanto que os termos seguintes são as correções de primeira e segunda ordem devido à desordem no sistema.

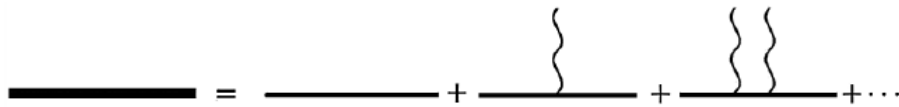


Figura 3.1: Representação pictórica da expansão da função de Green $G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$.

3.2 Tipos de desordem

Como já mencionado, em sistemas físicos é possível se deparar com dois tipos de desordem distintos: *quenched* e *annealed*. A diferença entre os dois é a forma como as impurezas que causam a desordem estão relacionadas termodinamicamente com o sistema puro (sem desordem).

3.2.1 Desordem *annealed*

Em uma desordem *annealed*, a escala de tempo das flutuações dos graus de liberdade relacionados à desordem é muito menor que o tempo de observação da evolução do sistema. Consequentemente, a desordem está em equilíbrio termodinâmico com os outros graus de liberdade do sistema e, portanto, todas as variáveis do sistema, pertencendo à desordem ou não, são tratadas igualmente [38]. Para calcular os observáveis desse sistema, como, por exemplo, a energia livre, é preciso somar sobre as distribuições de todas as possíveis configurações dos componentes originais, usados para descrever o sistema puro, e impurezas que originam a desordem.

3.2.2 Desordem *quenched*

No caso de uma desordem *quenched*, as flutuações ocorrem muito mais lentamente quando comparadas à escala temporal de observação. Ao observar tais flutuações, temos a impressão de que elas estão “congeladas” em relação aos outros graus de liberdade do sistema, caracterizando uma desordem estática. Cada realização da desordem corresponde a uma única realização das variáveis aleatórias sobre o sistema, enquanto sua distribuição descreve flutuações entre realizações diferentes [38]. Diferentemente da desordem *annealed*, os observáveis deste tipo de sistema são calculados para uma dada configuração de parâmetros de desordem μ e ξ e, em seguida, é tomada a média sobre a distribuição das configurações de desordem.

3.3 O efeito da desordem no sistema

Até aqui, a expressão perturbativa na Eq. (3.22) para a função de correlação entre dois pontos do campo escalar é completamente geral, já que a natureza da desordem ainda não foi especificada, o que é necessário para o cálculo da média sobre os campos de ruído. Agora, faremos tais especificações. Começamos definindo que as funções $\mu(\mathbf{r})$ e

$\xi(\mathbf{r})$ possuem média zero, tal que

$$\langle \mu(\mathbf{r}) \rangle_\mu = 0, \quad \langle \xi(\mathbf{r}) \rangle_\xi = 0, \quad (3.23)$$

e supomos correlações de ruído branco:

$$\langle \mu(\mathbf{r})\mu(\mathbf{r}') \rangle_\mu = \sigma_\mu^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.24)$$

$$\langle \xi(\mathbf{r})\xi(\mathbf{r}') \rangle_\xi = \sigma_\xi^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.25)$$

onde $\langle \dots \rangle_\mu$ e $\langle \dots \rangle_\xi$ denotam a média sobre a desordem, isto é, realizam-se todas as possibilidades de desordem e calcula-se a média delas. As grandezas σ_μ e σ_ξ representam a intensidade das flutuações aleatórias. Supomos, ainda, que os ruídos μ e ξ são estatisticamente independentes e com distribuição Gaussiana, de forma que possamos escrever

$$\langle \mu_{i_1} \dots \mu_{i_{2n}} \rangle_\mu = \langle \mu_{i_1} \mu_{i_2} \rangle_\mu \langle \mu_{i_3} \mu_{i_4} \rangle_\mu \dots \langle \mu_{i_{2n-1}} \mu_{i_{2n}} \rangle_\mu + \text{permutações}, \quad (3.26)$$

e que correlações de um número ímpar de ruídos são nulas.

Com estas hipóteses, calculamos as médias sobre os ruídos que aparecem na definição do propagador G dada pela Eq. (3.22). Note que, devido à natureza Gaussiana das correlações do ruído, termos com um número ímpar de campos de ruído não contribuem para a função de dois pontos e, portanto, a primeira correção diferente de zero da função de dois pontos se origina das médias sobre o terceiro termo na Eq. (3.22). Assim, até a segunda ordem nos campos de ruído, temos

$$\begin{aligned} G^{(1)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \langle G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle_{\mu\xi} \\ &= G^{(0)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + G^{(1)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (3.27)$$

com a correção de um laço $G^{(1)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ dada em termos de sua transformada de Fourier $\tilde{G}^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$ como

$$G^{(1)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \tilde{G}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}') e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}. \quad (3.28)$$

Esta grandeza pode ser escrita em termos da autoenergia $\Sigma(\omega, \mathbf{k})$ como

$$\tilde{G}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}') = -G^{(0)}(\omega, \mathbf{k})\Sigma(\omega, \mathbf{k})G^{(0)}(\omega, \mathbf{k}), \quad (3.29)$$

com

$$\Sigma(\omega, \mathbf{k}) = -(\sigma_\mu^2\omega^4 + \sigma_\xi^2m_0^4) \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^d} \frac{1}{\omega^2 - (\mathbf{k}'^2 + m_0^2) + i\epsilon}. \quad (3.30)$$

Note que até a ordem de um laço, a autoenergia é independente de \mathbf{k} . Assim, mantendo apenas termos de primeira ordem em Σ na Eq.(3.13), obtemos que $G^{-1} = G^{(0)^{-1}} + \Sigma$. Então, na representação do espaço \mathbf{k} , G^{-1} pode ser escrito como

$$[G^{(1)}(\omega, \mathbf{k})]^{-1} = [G^{(0)}(\omega, \mathbf{k})]^{-1} + \Sigma(\omega, \mathbf{k}) = \omega^2 - \mathbf{k}^2 - m^2, \quad (3.31)$$

com

$$m^2 = m_0^2 - \Sigma(\omega, \mathbf{k}) = m_0^2 + (\sigma_\mu^2\omega^4 + \sigma_\xi^2m_0^4)\alpha(\omega) \quad (3.32)$$

e

$$\alpha(\omega) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} G^{(0)}(\omega, \mathbf{k}). \quad (3.33)$$

A partir desse resultado, fica claro que um dos efeitos da aleatoriedade é causar uma renormalização da massa de forma qualitativamente similar à teoria $\lambda\phi^4$, como representado na figura 3.2 . Para uma discussão mais aprofundada sobre a teoria $\lambda\phi^4$, sugerimos a Ref. [39]. A teoria $\lambda\phi^4$ induzida é uma consequência da natureza Gaussiana das funções $\mu(\mathbf{r})$ e $\xi(\mathbf{r})$. Um modelo autointeragente polinomial mais geral pode ser obtido se ruídos não-gaussianos forem considerados. O acoplamento induzido depende da frequência de acordo com a relação

$$\lambda(\omega) \approx \sigma_\mu^2\omega^4 + \sigma_\xi^2m_0^4. \quad (3.34)$$

A integral na Eq.(3.30) é divergente devido à natureza do ruído branco das funções $\mu(\mathbf{r})$ e $\xi(\mathbf{r})$. Uma função de correlação não-nula para diferentes instantes temporais (ruído colorido) levaria a uma integral finita. Para $d = 3$, é possível isolar a parte finita da integral fazendo o uso da identidade

$$\frac{|\mathbf{k}|^2}{|\mathbf{k}|^2 - (\omega^2 - m_0^2)} = 1 + \frac{\omega^2 - m_0^2}{|\mathbf{k}|^2 - (\omega^2 - m_0^2)}, \quad (3.35)$$

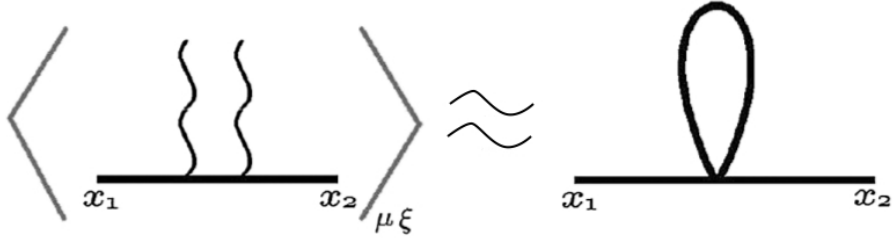


Figura 3.2: Correção de um laço para função causal de dois pontos devido à desordem no sistema.

tal que a parte finita da autoenergia, $\Sigma_f(\omega, \mathbf{k})$, é dada por

$$\Sigma_f(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4 \int_0^\infty \frac{d\mathbf{k}'}{2\pi^2} \frac{\omega^2 - m_0^2}{\omega^2 - |\mathbf{k}'|^2 - m_0^2}, \quad (3.36)$$

$$= \frac{1}{4\pi} (\sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4) |\omega^2 - m_0^2|^{1/2} \mathcal{A}, \quad (3.37)$$

com

$$\mathcal{A} = \begin{cases} +1, & m_0^2 > \omega^2, \\ -1, & \omega^2 > m_0^2. \end{cases} \quad (3.38)$$

Capítulo 4

O sistema de dois emissores quânticos em meios desordenados

Nesse capítulo, discutiremos o problema de Fermi de um ponto de vista perturbativo, como visto no capítulo 2, e os resultados originais aqui obtidos podem ser encontrados na referência [40]. Recapitulando, usaremos uma teoria de perturbação dependente do tempo para calcular as probabilidades de transição para um determinado intervalo de tempo finito $[\tau_0, \tau]$. Novamente, serão considerados dois emissores quânticos iguais, de dois níveis, interagindo com um campo escalar sem massa em um espaço-tempo de Minkowski de quatro dimensões. Usando $\hbar = 1$ por conveniência, o hamiltoniano do sistema é dado por

$$H = H_A + H_F + H_I, \quad (4.1)$$

onde o hamiltoniano dos emissores é dado por

$$H_A = \frac{\omega_0}{2} \sum_{j=1}^2 \sigma_j^z, \quad (4.2)$$

com j indexando cada emissor quântico,

$$\sigma_j^z = \frac{\omega_0}{2} (|e_j\rangle \langle e_j| - |g_j\rangle \langle g_j|), \quad (4.3)$$

$|g_1\rangle$ e $|g_2\rangle$ são os estados fundamentais de cada emissor isolado, com energias $-\omega_0/2$, e $|e_1\rangle$ e $|e_2\rangle$ são seus respectivos estados excitados, com energias $\omega_0/2$.

O hamiltoniano do campo escalar livre é dado por

$$H_F(\tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger(\tau) a_{\mathbf{k}}(\tau) \quad (4.4)$$

onde $\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$. O hamiltoniano de interação possui duas contribuições, uma para cada emissor quântico, a saber

$$H_I = \lambda \sum_{j=1}^2 m_j(\tau) \varphi[x_j(\tau)]. \quad (4.5)$$

Na expressão anterior, $m_j(\tau)$ é o operador de monopólo do emissor quântico j que pode ser expresso por

$$m_j(\tau_0) = \frac{i}{2}(\sigma_j^- - \sigma_j^+), \quad (4.6)$$

com $\sigma_j^- = |g_j\rangle \langle e_j|$ e $\sigma_j^+ = |e_j\rangle \langle g_j|$. Sua evolução temporal é dada por

$$m_j(\tau) = e^{iH_A\tau} m_j(\tau_0) e^{-iH_A\tau} \quad (4.7)$$

A evolução temporal do sistema será descrita com respeito ao tempo próprio τ dos emissores quânticos e suporemos $\lambda \ll 1$, isto é, consideraremos que a interação entre os emissores quânticos e o campo é fraca o suficiente para que possamos fazer uma abordagem perturbativa.

Para estudar a modificação causada pelas flutuações dos cones de luz nas probabilidades de transição, aplicaremos um cálculo perturbativo similar ao discutido no capítulo 3. Primeiro, consideramos a equação de Klein-Gordon escalar usada no capítulo anterior (Eq. (3.1)):

$$\left\{ [1 + \mu(\mathbf{r})] \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right\} \varphi(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (4.8)$$

onde ∇^2 é o Laplaciano tridimensional. Sem perda de generalidade, usaremos $\xi = 0$, já que o termo relacionado com a velocidade de propagação e, conseqüentemente, com a causalidade no sistema, é o que contém a variável aleatória $\mu(\mathbf{r})$. Para o coeficiente $\mu(\mathbf{r})$, escolhemos uma função aleatória Gaussiana cujas média e função de correlação são dadas

por

$$\langle \mu(\mathbf{r}) \rangle_\mu = 0, \quad (4.9)$$

$$\langle \mu(\mathbf{r})\mu(\mathbf{r}') \rangle_\mu = \sigma^2 \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (4.10)$$

sendo σ^2 a intensidade das flutuações aleatórias. Assim como no capítulo 3, a notação $\langle \dots \rangle_\mu$ denota uma média tomada sobre todas as possíveis realizações dessa variável aleatória. Note que assumimos uma função aleatória independente do tempo. Desta forma, a equação aleatória de Klein-Gordon pode ser resolvida com o auxílio de uma expansão perturbativa na função de ruído. Também vale ressaltar que a equação (4.8) é linear no campo. Isto significa que a ação correspondente do modelo é quadrática no campo, resultando em um funcional gerador Gaussiano. Assim, todas as funções de Green de n pontos do campo escalar podem ser expressas como produtos de funções de Green de dois pontos. Tal fato será explorado mais adiante.

Originalmente, a questão da causalidade na configuração de Fermi foi estudada com uma especificação precisa dos estados de ambos os emissores quânticos e do campo em um tempo τ após a emissão do fóton pelo emissor quântico A . Entretanto, vários trabalhos mostraram a importância de se considerar configurações mais gerais [10, 11, 41].

Nesse capítulo, investigaremos três configurações diferentes, sendo a primeira similar à usada por Fermi:

- **situação 1:** no instante τ_0 , o sistema é preparado no estado $|e_1 g_2 0_\mu\rangle$ e nos interessa saber qual é a probabilidade de que no instante de tempo τ posterior, o emissor quântico 1 seja encontrado no estado fundamental, o emissor quântico 2 no estado excitado e o campo escalar no estado de vácuo $|0_\mu\rangle$. Aqui $|0_\mu\rangle$ não é o estado de vácuo de Minkowski usual, mas um estado de vácuo modificado na presença da desordem. Esta probabilidade pode ser expressa por

$$P = |\langle 0_\mu e_2 g_1 | e_1 g_2 0_\mu \rangle|^2; \quad (4.11)$$

- **situação 2:** no instante τ_0 , o sistema é preparado no estado $|e_1g_20_\mu\rangle$, e nos interessa saber qual é a probabilidade de que no instante de tempo τ posterior, o emissor quântico 1 seja encontrado no estado fundamental e o emissor quântico 2 no estado excitado. Temos, então,

$$P = \sum_F |\langle F_\mu e_2 g_1 | e_1 g_2 0_\mu \rangle|^2, \quad (4.12)$$

onde $|F_\mu\rangle$ é qualquer estado final do campo eletromagnético para uma dada realização da desordem;

- **situação 3:** no instante τ_0 , o sistema é preparado no estado $|e_1g_20_\mu\rangle$, e nos interessa saber qual é a probabilidade de que no instante de tempo τ posterior, o emissor quântico 2 seja encontrado no estado excitado. Portanto,

$$P = \sum_{F,S} |\langle F_\mu e_2 S | e_1 g_2 0_\mu \rangle|^2, \quad (4.13)$$

onde $|F_\mu\rangle$ é qualquer estado final do campo eletromagnético e $|S\rangle$ é qualquer estado final do emissor quântico 1.

Consideremos a situação 1. Para uma dada realização da desordem, obtemos que a probabilidade de transição para o estado final $|\phi_f\rangle = |g_1e_2\rangle \otimes |0_\mu\rangle$ é, até a quarta ordem em λ ,

$$\begin{aligned} P_{\phi_i \rightarrow \phi_f}(\mu) &= |\langle 0_\mu e_2 g_1 | e_1 g_2 0_\mu \rangle|^2 \\ &= \frac{\lambda^4}{16} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_3 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_4 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_1 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_2 e^{i\omega_0(\tau_3 - \tau_4)} e^{-i\omega_0(\tau_1 - \tau_2)} G^*(\tau_4, \tau_3; r) G(\tau_1, \tau_2; r), \end{aligned} \quad (4.14)$$

sendo $G(\tau_1, \tau_2; |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = G(\tau_1, \tau_2; r)$ o propagador de Feynman, dado pela Eq. (3.18).

Agora, consideremos a segunda situação. Até a quarta ordem em λ e para uma dada realização da desordem, a probabilidade de transição para o estado final $|\psi_f\rangle =$

$|g_1 e_2\rangle \otimes |F_\mu\rangle$ é

$$\begin{aligned}
P_{\phi_i \rightarrow \psi_f}(\mu) &= \sum_F |\langle F_\mu e_2 g_1 | e_1 g_2 0_\mu \rangle|^2 \\
&= \frac{\lambda^4}{16} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_3 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_4 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_1 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_2 e^{i\omega_0(\tau_3 - \tau_4)} e^{-i\omega_0(\tau_1 - \tau_2)} \left[G^*(\tau_4, \tau_3; r) G(\tau_1, \tau_2; r) \right. \\
&\quad \left. + G^+(\tau_4, \tau_1; r) G^+(\tau_3, \tau_2; r) + G^+(\tau_4, \tau_2; 0) G^+(\tau_3, \tau_1; 0) \right]. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Na última expressão, foi necessária a inserção de uma relação de completeza. Esta equação descreve a probabilidade de transição do sistema de emissores quânticos para o estado $|g_1 e_2\rangle$ — todo o sistema em qualquer estado da forma $|\psi_f\rangle$. Isso é dado através de uma soma sobre as probabilidades de um conjunto completo de estados do campo $|F_\mu\rangle$ que é a equação (4.15). Vale também notar que o primeiro termo dentro dos colchetes é o mesmo termo obtido no caso anterior. Isto significa que, quando o estado final do campo quântico não é especificado, a probabilidade de transição adquire dois novos termos em relação ao caso anterior, no qual o estado final do campo era conhecido.

Na equação (4.15), o termo $G^+(x(\tau), x(\tau'))$ é a função de Wightman com frequência positiva. Como ela satisfaz à equação de onda homogênea, é possível implementar uma expansão perturbativa no campo de ruído similar à expansão em série feita para o propagador de Feynman:

$$G^+(x, x') = G_0^+(x - x') + \sum_{n=1}^{\infty} \int dz_1 G_{\text{ret}}(x - z_1) \mathcal{D}^{(n)}(z_1, x'), \tag{4.16}$$

onde $G_0^+(x - x')$ é função de Wightman para o campo livre, dada por

$$G_0^+(x - x') = -\frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{1}{(t - t' - i\epsilon)^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \right], \tag{4.17}$$

e $G_{\text{ret}}(x - z_1)$ é a função de Green retardada associada à equação de Klein-Gordon livre:

$$G_{\text{ret}}(x - x') = \frac{\theta(t - t')}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left[\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - (t - t')) - \delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| + (t - t')) \right]. \tag{4.18}$$

Por conta da função θ de Heaviside, apenas a primeira delta fornecerá contribuições não-nulas. Além disso, as contribuições das flutuações aleatórias estão codificadas no termo

$$\mathcal{D}^{(n)}(z_1, x') = (-1)^n \prod_{j=1}^n L_1(z_j) \int dz_{j+1} G_0^+(z_j, z_{j+1}), \quad (4.19)$$

com $L_1(x)$ sendo o operador diferencial aleatório definido pela equação (3.20).

Por último, na terceira e última situação estudada, queremos calcular a probabilidade de transição para o estado final $|\Phi_f\rangle = |Se_2\rangle \otimes |F_\mu\rangle$, onde $|F_\mu\rangle$ é o estado do campo como definido anteriormente e $|S\rangle$ é qualquer estado do emissor quântico 1, isto é, a probabilidade de encontrar o emissor quântico 2 no estado $|e_2\rangle$ independente dos estados finais do outro emissor quântico e do campo. Até a quarta ordem em λ e para uma dada realização da desordem, temos

$$P_{\phi_i \rightarrow \Phi_f}(\mu) = \sum_F |\langle F_\mu e_2 S | e_1 g_2 0_\mu \rangle|^2 = P(\mu) + P_{\phi_i \rightarrow \psi_f}(\mu) + \Delta P(\mu), \quad (4.20)$$

onde

$$\begin{aligned} P(\mu) &= \frac{\lambda^2}{4} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'' e^{i\omega_0(\tau'' - \tau')} G^+(\tau', \tau''; 0), \quad (4.21) \\ \Delta P(\mu) &= -\frac{\lambda^4}{16} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_1 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_3 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_4 e^{i\omega_0(\tau_3 - \tau_4)} e^{-i\omega_0(\tau_1 - \tau_2)} \\ &\times \left\{ G^+(\tau_1, \tau_2; r) G^+(\tau_3, \tau_4; r) [\theta(\tau_2 - \tau_4) \theta(\tau_3 - \tau_4) + \theta(\tau_1 - \tau_3) \theta(\tau_4 - \tau_3)] \right. \\ &+ G^+(\tau_1, \tau_2; r) G^+(\tau_4, \tau_3; r) [\theta(\tau_2 - \tau_4) \theta(\tau_4 - \tau_3) + \theta(\tau_1 - \tau_3) \theta(\tau_3 - \tau_4)] \\ &+ G^+(\tau_1, \tau_4; r) G^+(\tau_2, \tau_3; r) \left[(\theta(\tau_2 - \tau_4) + \theta(\tau_3 - \tau_4)) \theta(\tau_2 - \tau_3) \right. \\ &+ \left. (\theta(\tau_4 - \tau_2) + \theta(\tau_1 - \tau_2)) \theta(\tau_4 - \tau_1) \right] \left. \right\} \\ &- \frac{\lambda^4}{16} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_1 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_3 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_4 \left\{ e^{i\omega_0(\tau_3 - \tau_4)} e^{-i\omega_0(\tau_1 - \tau_2)} \left[G^+(\tau_1, \tau_3; 0) G^+(\tau_2, \tau_4; 0) (1 + \theta(\tau_4 - \tau_3)) \right] \right. \\ &+ \left. G^+(\tau_1, \tau_2; 0) G^+(\tau_3, \tau_4; 0) + G^+(\tau_1, \tau_4; 0) G^+(\tau_2, \tau_3; 0) \theta(\tau_4 - \tau_3) \right\} \theta(\tau_2 - \tau_4) \theta(\tau_2 - \tau_3) + \text{c.c.} \left. \right\} \quad (4.22) \end{aligned}$$

e $P_{\phi_i \rightarrow \psi_f}(\mu)$ é dado pela Eq. (4.15). Para obter a Eq. (4.22), foi usada a relação de completude para os estados do campo e do emissor quântico 2.

Os termos independentes de r nas Eqs. (4.15), (4.20) e (4.22) descrevem as contribuições da probabilidade de transição que surgem da interação de cada emissor quântico somente com o vácuo. Os únicos termos relevantes com relação aos efeitos de causalidade e que descrevem o impacto do emissor 1 no emissor 2 são aqueles que dependem de r nessas equações e são estes que consideraremos daqui em diante. Discussões sobre quais termos são relevantes para identificar o impacto do emissor 1 no emissor 2 também podem ser encontradas em [11, 42, 43].

Suponhamos, agora, a existência de termos na probabilidade de transição com $\Delta\tau = \tau - \tau_0 < r$, onde $\Delta\tau$ é o intervalo de tempo entre as observações. Isto é uma clara indicação de violação de causalidade. Apesar disso, sempre que a função de Wightman for da forma

$$G^+(t - t'; r) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{f(t - t', r)}{[(t - t' - i\epsilon)^2 - r^2]^n} \quad (4.23)$$

e a parte do propagador de Feynman que gera os efeitos não-causais (como será visto a seguir) também possui uma forma similar, dada por

$$G_{NC}(t - t'; r) = \frac{i}{4\pi^2} \frac{f(t - t', r)}{[(t - t')^2 - r^2]^n}, \quad (4.24)$$

os termos não-causais se cancelam na Eq.(4.20) e o resultado é estritamente causal (para $\Delta\tau < r$, o limite $\epsilon \rightarrow 0$ pode ser tirado diretamente na função de Wightman). Nas Eqs. (4.23) e (4.24), n é um inteiro positivo e $f(t - t', r)$ é uma função par de $t - t'$.

4.1 Contribuições não-perturbadas

Discutiremos, primeiramente, os termos que surgiriam mesmo na ausência de flutuações aleatórias do cone de luz. Consideremos a situação em que o estado final do emissor é dado por $|\phi_f\rangle$. Realizando uma mudança de variáveis $(\tau', \tau'') \rightarrow (\xi, \eta)$ da forma $\xi = \tau' - \tau''$ e $\eta = \tau' + \tau''$ na Eq. (4.14), temos que

$$P_{\phi_i \rightarrow \phi_f} = \frac{\lambda^4}{16} \left| \int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} d\xi (\Delta\tau - |\xi|) e^{-i\omega_0 \xi} G_0(\xi, r) \right|^2, \quad (4.25)$$

onde $G_0(\xi, r)$ é descrito por

$$G_0(\xi, r) = \frac{i}{4\pi^2} \left[\frac{1}{\xi^2 - r^2} \right] - \frac{1}{8\pi r} \frac{\xi}{|\xi|} \left[\delta(r - \xi) - -\delta(r + \xi) \right]. \quad (4.26)$$

e $\Delta\tau = \tau - \tau_0$. Quando inserimos a expressão para o propagador de Feynman livre na Eq. (4.25), obtemos duas contribuições para cada uma das integrais temporais. A contribuição relacionada com a delta de Dirac produzirá uma função de Heaviside $\theta(\Delta\tau - r)$. Este termo está de acordo com a definição de causalidade dada na Ref. [25]. Por outro lado, a outra contribuição possui um termo finito para $\Delta\tau < r$ proporcional a $1/(\omega_0^2 r^2)$. De fato, é possível demonstrar que é uma combinação de integrais trigonométricas ($\text{Ci}(\omega_0 r)$ e $\text{Si}(\omega_0 r)$) e funções trigonométricas ($\cos(\omega_0 r)$ e $\sin(\omega_0 r)$) multiplicadas por $1/(\omega_0^2 r^2)$. Entretanto, como discutido por Pauli e Stueckelberg [24, 25], o conceito de causalidade em teoria quântica de campos relativística só possui sentido na zona de radiação, onde $\omega_0 r \gg 1$. Sendo assim, o termo anômalo mencionado tende a zero nesta região e a causalidade, assim definida, é preservada.

No segundo caso mencionado anteriormente, o estado final do sistema é dado por $|\psi_f\rangle$, *i.e.*, somente os estados finais dos emissores quânticos são especificados. Empregando a mesma troca de variáveis $(\tau', \tau'') \rightarrow (\xi, \eta)$ e utilizando a expressão usual para a função de Wightman para frequências positivas $G_0^+(t - t', r)$, obtemos três tipos de termos. O primeiro deles é idêntico ao resultado discutido anteriormente, dado pela equação (4.25). O segundo termo entre colchetes na Eq. (4.15) gera uma contribuição finita para $\Delta\tau < r$, proporcional a $g(\omega_0, r, \Delta t)/(\omega_0^2 r^2)$, onde $g(\omega_0, r, \Delta t)$ pode ser escrito em termos de integrais trigonométricas e funções trigonométricas. O último termo entre colchetes na equação (4.15) dá origem a um fator que reproduz resultados idênticos aos discutidos em [44]. Em particular, tal contribuição não depende de r e, portanto, não tem um papel na análise da influência do emissor 1 sobre os processos radioativos do emissor 2. Em suma, é possível dizer que dentro desse contexto, a causalidade é preservada em processos que transferem energia entre emissores quânticos somente na zona de radiação.

Por fim, discutiremos a situação onde somente o estado final do emissor 2 é especificado. A inclusão das funções de Green livres do nosso problema na equação (4.20) resulta em três termos, dois dos quais possuem a mesma forma e comportamento do caso anterior. O último termo está relacionado com a contribuição $\Delta P(\mu)$. Como as condições (4.23) e (4.24) são satisfeitas pela função de Wightman e pelo propagador de Feynman do campo escalar livre, está claro que os termos não-causais se cancelam e que tais probabilidades de transição são estritamente causais quando a medida é inclusiva, recuperando os resultados contidos na referência [10].

4.2 Flutuações de cone de luz e causalidade

Nesta subseção, analisaremos o efeito das flutuações nas probabilidades (4.14), (4.15) e (4.20). Levaremos em conta todos os termos até a segunda ordem em μ na série perturbativa para o propagador de Feynman e para a função de Wightman. Além disso, manteremos termos até a ordem σ^2 em todos os cálculos depois de tomar as médias aleatórias. Considere o resultado final $|\phi_f\rangle$. Por conveniência, começamos calculando o termo $G^*(\tau_4, \tau_3; r)G(\tau_1, \tau_2; r)$ na Eq.(4.14). Usando a definição Eq. (3.18) e fazendo $x_1 = (\tau_3, \mathbf{x}_1)$, $x'_1 = (\tau_1, \mathbf{x}_1)$, $x_2 = (\tau_4, \mathbf{x}_2)$ e $x'_2 = (\tau_2, \mathbf{x}_2)$, obtemos, até segunda ordem em μ :

$$\begin{aligned}
G^*(\tau_4, \tau_3; r)G(\tau_1, \tau_2; r) &= G^*(x_2, x_1)G(x'_1, x'_2) \\
&= \left[G_0^*(x_2 - x_1) + \int dz G_0^*(x_2 - z)\mu(\mathbf{z})\frac{\partial^2}{\partial z_0^2}G_0^*(z - x_1) \right. \\
&\quad \left. + \int dz_1 G_0^*(x_2 - z_1)\mu(\mathbf{z}_1)\frac{\partial^2}{\partial z_{01}^2} \int dz_2 G_0^*(z_1 - z_2)\mu(\mathbf{z}_2)\frac{\partial^2}{\partial z_{02}^2}G_0^*(z_2 - x_1) \right] \\
&\quad \times \left[G_0(x'_1 - x'_2) + \int dz G_0(x'_1 - z)\mu(\mathbf{z})\frac{\partial^2}{\partial z_0^2}G_0(z - x'_2) \right. \\
&\quad \left. + \int dz_1 G_0(x'_1 - z_1)\mu(\mathbf{z}_1)\frac{\partial^2}{\partial z_{01}^2} \int dz_2 G_0(z_1 - z_2)\mu(\mathbf{z}_2)\frac{\partial^2}{\partial z_{02}^2}G_0(z_2 - x'_2) \right].
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Sabemos, pela definição expressa na Eq. (3.26), que os termos com número ímpar de campos de ruído μ são zero. Sendo assim, manteremos somente termos pares em μ até

segunda ordem de perturbação. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
& G^*(x_2, x_1)G(x'_1, x'_2) \rightarrow G_0^*(x_2 - x_1)G_0(x'_1 - x'_2) \\
& + G_0^*(x_2 - x_1) \int dz_1 \int dz_2 G_0(x'_1 - z_1)\mu(\mathbf{z}_1)\mu(\mathbf{z}_2) \left[\frac{\partial^2}{\partial z_{01}^2} G_0(z_1 - z_2) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial z_{02}^2} G_0(z_2 - x'_2) \right] \\
& + G_0(x'_1 - x'_2) \int dz_1 \int dz_2 G_0^*(x_2 - z_1)\mu(\mathbf{z}_1)\mu(\mathbf{z}_2) \left[\frac{\partial^2}{\partial z_{01}^2} G_0^*(z_1 - z_2) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial z_{02}^2} G_0^*(z_2 - x_1) \right] \\
& + \int dz_1 \int dz_2 G_0^*(x_2 - z_1)G_0(x'_1 - z_2)\mu(\mathbf{z}_1)\mu(\mathbf{z}_2) \left[\frac{\partial^2}{\partial z_{01}^2} G_0^*(z_1 - x_1) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial z_{02}^2} G_0(z_2 - x'_2) \right].
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Tomando a média sobre os ruídos, usando Eqs. (4.9) e (4.10), obtemos

$$\langle G^*(\tau_4, \tau_3; r)G(\tau_1, \tau_2; r) \rangle_\mu = G_0^*(x_2 - x_1)G_0(x'_1 - x'_2) + G_0^*(x_2 - x_1)I_1(x'_1, x'_2) + G_0(x'_1 - x'_2)I_1(x_2, x_1) + I_2 \tag{4.29}$$

onde definimos

$$I_1(y_1, y_2) = \sigma^2 \int d\mathbf{z}_1 \int dz_{01} \int dz_{02} G_0(y_1 - z_1) \left[\frac{\partial^2}{\partial z_{01}^2} G_0(z_{01} - z_{02}, 0) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial z_{02}^2} G_0(z_{02} - \tau_2; |\mathbf{z}_1 - \mathbf{y}_2|) \right], \tag{4.30}$$

e

$$\begin{aligned}
I_2(y_1, y_2) &= \sigma^2 \int d\mathbf{z}_1 \int dz_{01} \int dz_{02} G_0^*(y_2 - z_1)G_0(\tau_1 - z_{02}; |\mathbf{y}_1 - \mathbf{z}_1|) \\
&\times \left[\frac{\partial^2}{\partial z_{01}^2} G_0^*(z_1 - y_1) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial z_{02}^2} G_0(z_{02} - \tau_2; |\mathbf{z}_1 - \mathbf{y}_2|) \right].
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Para resolvermos estas integrais, utilizamos a seguinte representação de Fourier para o propagador de Feynman livre:

$$G_0(x - x') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_0}{2\pi} G_0(k_0, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-ik_0(t-t')}, \tag{4.32}$$

onde

$$G_0(k_0, \mathbf{k}) = \frac{i}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon}. \tag{4.33}$$

Determinando, primeiramente, I_1 , temos

$$\begin{aligned}
I_1(x'_1, x'_2) &= \sigma^2 \int d\mathbf{z}_1 \int dz_{01} \int dz_{02} G_0(x'_1 - z_1) \left[\frac{\partial^2}{\partial z_{01}^2} G_0(z_{01} - z_{02}, 0) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial z_{02}^2} G_0(z_{02} - \tau_2; |\mathbf{z}_1 - \mathbf{x}_2|) \right] \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_0}{2\pi} G_0(k_0, \mathbf{k}) \Sigma(k_0) G_0(k_0, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} e^{-ik_0(\tau_1 - \tau_2)},
\end{aligned} \tag{4.34}$$

onde

$$\Sigma(k_0) = \sigma^2 k_0^4 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{i}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon} = -\frac{\sigma^2 k_0^5}{4\pi}. \quad (4.35)$$

Portanto

$$I_1(x'_1, x'_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} e^{-ik_0(\tau_1 - \tau_2)} \frac{k_0^5}{(k_0^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon)^2}. \quad (4.36)$$

Seguindo os passos desenvolvidos na Ref. [45], obtemos

$$I_1(x'_1, x'_2) = \frac{6i\sigma^2}{(2\pi)^3} \left[\frac{\mathcal{F}(\Delta t, |\Delta \mathbf{x}|) \theta(\Delta t)}{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - |\Delta \mathbf{x}|^2]^5} + \frac{\mathcal{F}(-\Delta t, |\Delta \mathbf{x}|) \theta(-\Delta t)}{[(\Delta t + i\epsilon)^2 - |\Delta \mathbf{x}|^2]^5} \right], \quad (4.37)$$

sendo $\Delta t = \tau_1 - \tau_2$, $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ e definimos

$$\mathcal{F}(\Delta t, |\Delta \mathbf{x}|) = \Delta t \left[5(\Delta t - i\epsilon)^4 + 10(\Delta t - i\epsilon)^2 |\Delta \mathbf{x}|^2 + |\Delta \mathbf{x}|^4 \right] - 4(\Delta t - i\epsilon) \left[(\Delta t - i\epsilon)^4 - |\Delta \mathbf{x}|^4 \right]. \quad (4.38)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} I_2 &= \sigma^2 \int d\mathbf{z}_1 \int dz_{01} \int dz_{02} G_0^*(x_2 - z_1) G_0(\tau_1 - z_{02}; |\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1|) \\ &\times \left[\frac{\partial^2}{\partial z_{01}^2} G_0^*(z_1 - x_1) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial z_{02}^2} G_0(z_{02} - \tau_2; |\mathbf{z}_1 - \mathbf{x}_2|) \right] \\ &= \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_{01}}{2\pi} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} e^{-ik_{01}(\tau_4 - \tau_3)} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_{02}}{2\pi} e^{-ik_{02}(\tau_1 - \tau_2)} \\ &\times G_0^*(k_{01}, \mathbf{k}_1) \Omega(k_{01}, k_{02}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2; \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) G_0(k_{02}, \mathbf{k}_2), \end{aligned} \quad (4.39)$$

onde

$$\Omega(k_{01}, k_{02}, \mathbf{p}; \mathbf{y}) = \sigma^2 k_{01}^2 k_{02}^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}}{[k_{01}^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 - i\epsilon](k_{02}^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon)}. \quad (4.40)$$

Para resolver esta integral, podemos utilizar o método dos parâmetros de Feynman [46].

A partir da identidade

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 d\alpha d\beta \delta(\alpha + \beta - 1) \frac{1}{(\alpha A + \beta B)^2}, \quad (4.41)$$

é possível escrever

$$\Omega(k_{01}, k_{02}, \mathbf{p}; \mathbf{y}) = \sigma^2 k_{01}^2 k_{02}^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \int_0^1 d\alpha d\beta \delta(\alpha + \beta - 1) \frac{1}{D^2}, \quad (4.42)$$

onde

$$D = \alpha[k_{0_1}^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 - i\epsilon] + \beta(k_{0_2}^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon), \quad (4.43)$$

que, após um pouco de álgebra, pode ser reescrito como

$$-D = \ell^2 - \Delta^2 - i(2\alpha - 1)\epsilon, \quad (4.44)$$

sendo $\ell = \mathbf{k} - \alpha\mathbf{p}$ e $\Delta^2 = -\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha k_{0_1}^2 + \beta k_{0_2}^2$. Aplicando essa simples mudança de variáveis, a Eq. (4.42) toma a forma

$$\Omega(k_{0_1}, k_{0_2}, \mathbf{p}; \mathbf{y}) = \sigma^2 k_{0_1}^2 k_{0_2}^2 \int_0^1 d\alpha d\beta \delta(\alpha + \beta - 1) e^{i\alpha\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} \int \frac{d^3\ell}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\ell\cdot\mathbf{y}}}{(\ell^2 - \Delta^2 - i\epsilon')^2}, \quad (4.45)$$

onde $\epsilon' = (2\alpha - 1)\epsilon$. A integral sobre ℓ pode ser resolvida como segue:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3\ell}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\ell\cdot\mathbf{y}}}{(\ell^2 - \Delta^2 - i\epsilon')^2} &= \frac{i}{2|\mathbf{y}|(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\ell \frac{\ell}{(\ell^2 - \Delta^2 - i\epsilon')^2} (e^{-i\ell|\mathbf{y}|} - e^{i\ell|\mathbf{y}|}) \\ &= \frac{i}{2\pi} \frac{e^{i\Delta|\mathbf{y}|}}{4\Delta} \theta\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) - \frac{i}{2\pi} \frac{e^{-i\Delta|\mathbf{y}|}}{4\Delta} \theta\left(-\alpha + \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Para $\alpha < 1/2$, a integral sobre ℓ foi resolvida pelo método de resíduos tomando apenas os devidos cuidados com os contornos utilizados para os dois diferentes valores de α : $\alpha > 1/2$ e $\alpha < 1/2$, já que para cada um desses valores, o sinal de ϵ' será diferente. Com isso,

$$\begin{aligned} \Omega(k_{0_1}, k_{0_2}, \mathbf{p}; \mathbf{y}) &= \frac{i\sigma^2}{2\pi} k_{0_1}^2 k_{0_2}^2 \int_0^1 d\alpha d\beta \delta(\alpha + \beta - 1) e^{i\alpha\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} \\ &\times \left[\frac{e^{i\Delta|\mathbf{y}|}}{4\Delta} \theta\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) - \frac{e^{-i\Delta|\mathbf{y}|}}{4\Delta} \theta\left(-\alpha + \frac{1}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

e, então,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{i\sigma^2}{2\pi} \int_0^1 d\alpha d\beta \delta(\alpha + \beta - 1) \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} e^{i\beta\mathbf{k}_1\cdot(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} e^{i\alpha\mathbf{k}_2\cdot(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \\ &\times \int \frac{dk_{0_2}}{2\pi} k_{0_2}^2 G_0(k_{0_2}, \mathbf{k}_2) e^{-ik_{0_2}(\tau_1 - \tau_2)} \int \frac{dk_{0_1}}{2\pi} k_{0_1}^2 G_0^*(k_{0_1}, \mathbf{k}_1) e^{-ik_{0_1}(\tau_4 - \tau_3)} \\ &\times \left[\frac{e^{i|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|(-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha k_{0_1}^2 + \beta k_{0_2}^2)^{1/2}}}{4(-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha k_{0_1}^2 + \beta k_{0_2}^2)^{1/2}} \theta(\alpha - 1/2) - \frac{e^{-i|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|(-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha k_{0_1}^2 + \beta k_{0_2}^2)^{1/2}}}{4(-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha k_{0_1}^2 + \beta k_{0_2}^2)^{1/2}} \theta(-\alpha + 1/2) \right], \end{aligned}$$

sendo $\mathbf{p} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$. Considerando somente a integral sobre k_{0_1} para $\alpha > 1/2$, obtemos

$$J_1 = \int \frac{dk_{0_1}}{2\pi} k_{0_1}^2 e^{-ik_{0_1}(\tau_4 - \tau_3)} \frac{e^{i|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|(-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha k_{0_1}^2 + \beta k_{0_2}^2)^{1/2}}}{(k_{0_1}^2 - \mathbf{k}_1^2 - i\epsilon)(-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha k_{0_1}^2 + \beta k_{0_2}^2)^{1/2}}.$$

Para fazer uso do método dos resíduos, escolhamos o contorno comumente usado para o propagador de Feynman, mas levemente deformado de forma que ele não contenha a linha de corte $[-z_0, z_0]$, onde $\pm z_0$ são as raízes do polinômio $-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha k_{0_1}^2 + \beta k_{0_2}^2$. Tomando o cuidado para que um dos pólos $\pm(|\mathbf{k}_1| - i\epsilon)$ ainda esteja no interior do contorno, teremos:

$$J_1 = \frac{i|\mathbf{k}_1| e^{i|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \sqrt{-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha|\mathbf{k}_1|^2 + \beta k_{0_2}^2} + i|\mathbf{k}_1|(\tau_4 - \tau_3)}}{2\sqrt{-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha|\mathbf{k}_1|^2 + \beta k_{0_2}^2}} \theta(\tau_4 - \tau_3) \\ + \frac{i|\mathbf{k}_1| e^{i|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \sqrt{-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha|\mathbf{k}_1|^2 + \beta k_{0_2}^2} + i|\mathbf{k}_1|(\tau_3 - \tau_4)}}{2\sqrt{-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha|\mathbf{k}_1|^2 + \beta k_{0_2}^2}} \theta(-\tau_4 + \tau_3).$$

Um resultado análogo vale para $\alpha < 1/2$. Analisaremos, agora, a integral sobre k_{0_2} para $\alpha > 1/2$:

$$J_2 = i \int \frac{dk_{0_2}}{2\pi} k_{0_2}^2 e^{-ik_{0_2}(\tau_1 - \tau_2)} \frac{e^{i|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|(-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha|\mathbf{k}_1|^2 + \beta k_{0_2}^2)^{1/2}}}{(k_{0_2}^2 - \mathbf{k}_2^2 + i\epsilon)(-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha|\mathbf{k}_1|^2 + \beta k_{0_2}^2)^{1/2}}.$$

Tomando o mesmo cuidado anterior, obtemos, de forma análoga,

$$J_2 = \frac{|\mathbf{k}_2| e^{i|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \sqrt{-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha|\mathbf{k}_1|^2 + \beta|\mathbf{k}_2|^2} - i|\mathbf{k}_2|(\tau_1 - \tau_2)}}{2\sqrt{-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha|\mathbf{k}_1|^2 + \beta|\mathbf{k}_2|^2}} \theta(\tau_1 - \tau_2) \\ + \frac{|\mathbf{k}_2| e^{i|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \sqrt{-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha|\mathbf{k}_1|^2 + \beta|\mathbf{k}_2|^2} - i|\mathbf{k}_2|(\tau_2 - \tau_1)}}{2\sqrt{-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha|\mathbf{k}_1|^2 + \beta|\mathbf{k}_2|^2}} \theta(-\tau_1 + \tau_2).$$

Novamente, um resultado semelhante vale para o caso em que $\alpha < 1/2$. Assim sendo, reunindo nossos resultados, obtemos

$$I_2 = \frac{i\sigma^2}{32\pi} \int_0^1 d\alpha d\beta \delta(\alpha + \beta - 1) \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} e^{i\beta \mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} |\mathbf{k}_1| \\ \times [e^{i|\mathbf{k}_1|(\tau_4 - \tau_3)} \theta(\tau_4 - \tau_3) + e^{i|\mathbf{k}_1|(\tau_3 - \tau_4)} \theta(-\tau_4 + \tau_3)] \\ \times \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} e^{i\alpha \mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} |\mathbf{k}_2| [e^{-i|\mathbf{k}_2|(\tau_1 - \tau_2)} \theta(\tau_1 - \tau_2) + e^{-i|\mathbf{k}_2|(\tau_2 - \tau_1)} \theta(-\tau_1 + \tau_2)] \\ \times \left[\frac{e^{i|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \sqrt{-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha|\mathbf{k}_1|^2 + \beta|\mathbf{k}_2|^2}}{\sqrt{-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha|\mathbf{k}_1|^2 + \beta|\mathbf{k}_2|^2}} \theta\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) - \frac{e^{-i|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \sqrt{-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha|\mathbf{k}_1|^2 + \beta|\mathbf{k}_2|^2}}{\sqrt{-\alpha\beta\mathbf{p}^2 + \alpha|\mathbf{k}_1|^2 + \beta|\mathbf{k}_2|^2}} \theta\left(-\alpha + \frac{1}{2}\right) \right]. \quad (4.48)$$

Como $\mathbf{p} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, por conta da função delta, podemos escrever

$$-\alpha\beta(\mathbf{k}_1^2 + \mathbf{k}_2^2 + 2\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) + \alpha|\mathbf{k}_1|^2 + \beta|\mathbf{k}_2|^2 = (\alpha\mathbf{k}_1 - \beta\mathbf{k}_2)^2, \quad (4.49)$$

portanto,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{i\sigma^2}{32\pi} \int_0^1 d\alpha d\beta \delta(\alpha + \beta - 1) \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} e^{i\beta \mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} |\mathbf{k}_1| \\
&\times \left[e^{i|\mathbf{k}_1|(\tau_4 - \tau_3)} \theta(\tau_4 - \tau_3) + e^{i|\mathbf{k}_1|(\tau_3 - \tau_4)} \theta(-\tau_4 + \tau_3) \right] \\
&\times \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} e^{i\alpha \mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} |\mathbf{k}_2| \left[e^{-i|\mathbf{k}_2|(\tau_1 - \tau_2)} \theta(\tau_1 - \tau_2) + e^{-i|\mathbf{k}_2|(\tau_2 - \tau_1)} \theta(-\tau_1 + \tau_2) \right] \\
&\times \left[\frac{e^{i|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \sqrt{(\alpha \mathbf{k}_1 - \beta \mathbf{k}_2)^2}}}{\sqrt{(\alpha \mathbf{k}_1 - \beta \mathbf{k}_2)^2}} \theta\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) - \frac{e^{-i|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \sqrt{(\alpha \mathbf{k}_1 - \beta \mathbf{k}_2)^2}}}{\sqrt{(\alpha \mathbf{k}_1 - \beta \mathbf{k}_2)^2}} \theta\left(-\alpha + \frac{1}{2}\right) \right] \\
&= \frac{i\sigma^2}{32\pi} \int_0^1 d\alpha d\beta \frac{\delta(\alpha + \beta - 1)}{\alpha^4 \beta^4} \\
&\times \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} e^{i\alpha \mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) / \beta} |\mathbf{k}_2| \left[e^{-i|\mathbf{k}_2|(\tau_1 - \tau_2) / \beta} \theta(\tau_1 - \tau_2) + e^{-i|\mathbf{k}_2|(\tau_2 - \tau_1) / \beta} \theta(-\tau_1 + \tau_2) \right] \\
&\times \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} e^{-i\beta \mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) / \alpha} |\mathbf{k}_1| \left[e^{i|\mathbf{k}_1|(\tau_4 - \tau_3) / \alpha} \theta(\tau_4 - \tau_3) + e^{i|\mathbf{k}_1|(\tau_3 - \tau_4) / \alpha} \theta(-\tau_4 + \tau_3) \right] \\
&\times \left[\frac{e^{i|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|}}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|} \theta\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) - \frac{e^{-i|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|}}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|} \theta\left(-\alpha + \frac{1}{2}\right) \right]. \tag{4.50}
\end{aligned}$$

Seja $\alpha > 1/2$. Note que

$$\frac{e^{i|\Delta \mathbf{x}| |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|}}{4\pi |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|}$$

é a função de Green para a equação de Helmholtz em três dimensões. Ela admite a seguinte expansão em termos de produtos de funções de Bessel e Hankel esféricas e de harmônicos esféricos [23]:

$$\frac{e^{i|\Delta \mathbf{x}| |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|}}{4\pi |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|} = i|\Delta \mathbf{x}| \sum_{l=0}^{\infty} j_l(|\Delta \mathbf{x}| k_{<}) h_l^{(1)}(|\Delta \mathbf{x}| k_{>}) \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta_1, \phi_1) Y_l^{m*}(\theta_2, \phi_2),$$

onde $k_{<}$ ($k_{>}$) indica o menor (maior) valor entre k_1 e k_2 . Ainda, θ_i e ϕ_i (para $i = 1, 2$) são as coordenadas angulares esféricas associadas à integração sobre \mathbf{k}_i . Contudo, utilizando a definição usual para os harmônicos esféricos, pode-se mostrar que

$$\int_0^{2\pi} d\phi Y_l^m(\theta, \phi) = 0,$$

para l, m inteiros e $m \neq 0$, que é o caso aqui abordado. Considerações análogas valem para o caso em que $\alpha < 1/2$. Portanto,

$$I_2 = 0. \tag{4.51}$$

A forma final da equação para $\langle P_{\phi_i \rightarrow \phi_f}(\mu) \rangle_\mu$ é, enfim,

$$\begin{aligned} \langle P_{\phi_i \rightarrow \phi_f}(\mu) \rangle_\mu &= \frac{\lambda^4}{16} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_3 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_4 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_1 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_2 e^{i\omega_0(\tau_3 - \tau_4)} e^{-i\omega_0(\tau_1 - \tau_2)} \\ &\times [G_0^*(\tau_4 - \tau_3; r)G_0(\tau_1 - \tau_2; r) + G_0^*(\tau_4 - \tau_3; r)I(\tau_1 - \tau_2; r) \\ &+ G_0(\tau_1 - \tau_2; r)I^*(\tau_4 - \tau_3; r)]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Sendo assim, a função $I(\Delta\tau, |\Delta\mathbf{x}|)$ é a quantidade que levará em conta quaisquer efeitos de violação de causalidade que possam surgir.

Na Eq. (4.52), o primeiro termo em colchetes fornece a contribuição discutida a partir da Eq. (4.27). As integrais temporais em I (correção devido à desordem nas amplitudes de transição de ordens mais altas) produzem um termo finito para $\Delta\tau < r$ que não se anula na zona de radiação ($\omega_0 r \gg 1$):

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\phi_i \rightarrow \phi_f} &= \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_1 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_2 e^{-i\omega_0(\tau_1 - \tau_2)} I(\tau_1 - \tau_2; r) \\ &\xrightarrow{\omega_0 r \gg 1} -\frac{i\pi\sigma^2}{(2\pi)^4} \omega_0^3 \text{sen}(\omega_0 \Delta\tau) \end{aligned} \quad (4.53)$$

para $\Delta\tau < r$, este resultado claramente demonstra uma violação de causalidade mesmo na zona de radiação, já que é não-nulo para $\Delta\tau < r$. Uma possível interpretação é que os argumentos mencionados anteriormente sobre a definição de causalidade simplesmente não se aplicam na presença de flutuações de cones de luz. Entretanto, considerando probabilidades de transição ao invés de amplitudes de transição, notamos que $\mathcal{I}_{\phi_i \rightarrow \phi_f}$ é multiplicado por um termo que vem de G_0 e que tende a zero na zona de radiação. Então, a causalidade como descrita por Pauli e Stueckelberg é preservada contanto que somente sejam consideradas as probabilidades de transição.

Em relação à transição ao estado final $|\psi_f\rangle$, é possível encontrar, após tomar as médias

sobre os ruídos aleatórios,

$$\begin{aligned}
\langle P_{\phi_i \rightarrow \psi_f}(\mu) \rangle_\mu &= \frac{\lambda^4}{16} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_3 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_4 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_1 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_2 e^{i\omega_0(\tau_3 - \tau_4)} e^{-i\omega_0(\tau_1 - \tau_2)} \\
&\times [G_0^*(\tau_4 - \tau_3; r) G_0^+(\tau_1 - \tau_2; r) + G_0^+(\tau_4 - \tau_1; r) G_0(\tau_3 - \tau_2; r) \\
&+ G_0^+(\tau_4 - \tau_2; 0) G_0^+(\tau_3 - \tau_1; 0) + G_0^*(\tau_4 - \tau_3; r) I(\tau_1 - \tau_2; r) \\
&+ G_0(\tau_1 - \tau_2; r) I^*(\tau_4 - \tau_3; r) + G_0^+(\tau_4 - \tau_1; r) I^+(\tau_3 - \tau_2; r) \\
&+ G_0^+(\tau_3 - \tau_2; r) I^+(\tau_4 - \tau_1; r) + G_0^+(\tau_4 - \tau_1; 0) I^+(\tau_3 - \tau_1; 0) \\
&+ G_0^+(\tau_3 - \tau_1; r) I^+(\tau_4 - \tau_2; 0)]. \tag{4.54}
\end{aligned}$$

com $I^+(t - t', r) = I(t - t', r) \Big|_{t-t' > 0}$. As contribuições de ordem zero no campo de ruído e os termos relacionados com a função $I(t - t', r)$ já foram analisados. Por outro lado, uma análise simples mostra que as integrais temporais sobre a função $I^+(t - t', r)$ se anulam para $\Delta\tau < r$. Dessa forma, os últimos termos dentro dos colchetes na Eq. (4.54) não dependem da distância entre os emissores quânticos. Conseqüentemente, a causalidade é preservada para essa transição na presença de uma desordem fraca, mas somente na zona de radiação.

A situação final que estudaremos considera as transições para o estado final $|\Phi_f\rangle$. Depois de realizar as médias sobre a Eq. (4.20), obtemos

$$\langle P_{\phi_i \rightarrow \Phi_f}(\mu) \rangle_\mu = \langle P(\mu) \rangle_\mu + \langle P_{\phi_u \rightarrow \psi_f}(\mu) \rangle_\mu + \langle \Delta P(\mu) \rangle_\mu. \tag{4.55}$$

Conforme discutido, estamos considerando apenas termos dependentes de r na Eq. (4.55), já que são eles que determinam a influência do emissor 1 no emissor 2 com relação aos efeitos de causalidade discutidos nesse capítulo.

O primeiro termo da equação (4.55) é independente de r , enquanto o segundo surge da probabilidade de transição para o estado final $|\Phi_f\rangle$. Já a contribuição vinda de $\langle \Delta P(\mu) \rangle_\mu$ precisa ser vista mais detalhadamente. Ela é dada por integrais quádruplas de termos como $G_0^+(\tau_1 - \tau_2; r) I^+(\tau_3 - \tau_4; r) + G_0^+(\tau_3 - \tau_4; r) I^+(\tau_1 - \tau_2; r)$. Tais integrais resultam em expressões que dificultam o entendimento da física por trás das contas de maneira simples.

Entretanto, a análise da causalidade segue de maneira direta a partir dos argumentos desenvolvidos no decorrer deste capítulo. É razoável perceber que a função $I(t - t', r)$ não satisfaz às condições (4.23) e (4.24), de modo que a presença de desordem não é estritamente causal quando a medida é inclusiva. Não obstante, essas integrais produzirão contribuições que são proporcionais ao termo $h(\omega_0, r, \Delta t)/(\omega_0^m r^m)$, onde m é um inteiro positivo, e, como nos casos anteriores, $h(\omega_0, r, \Delta t)$ pode ser escrito em termos de funções e integrais trigonométricas. Estas contribuições são suprimidas por potências de $\omega_0 r$. Assim, para que a causalidade seja mantida, é preciso usar os argumentos de Pauli e Stueckelberg e considerar o limite $\omega_0 r \gg 1$. Somente assim a causalidade é recuperada.

Capítulo 5

Conclusões e discussões finais

Nesta dissertação, descrevemos o problema de propagação de um fóton entre dois átomos, como primeiramente apresentado por Fermi, e mostramos que, após estudos independentes feitos por diversos autores, a máxima de que a causalidade não deve ser violada é respeitada. Argumentamos, também, que o problema de Fermi pode ser usado como base para investigar efeitos na causalidade de um sistema imerso em um meio desordenado.

No capítulo 2, vimos que o problema de Fermi pode ser idealizado como um sistema de emissores quânticos de dois níveis de energia, sendo um inicialmente em seu estado fundamental e o outro em seu estado excitado, na presença de um campo escalar livre, e calculamos a amplitude de probabilidade de excitação de um deles a partir do instante em que o outro decai. Mostramos que tal amplitude está diretamente relacionada com o propagador de Feynman e que a causalidade é mantida contanto que esteja em acordo com a definição dada por Pauli [24], isto é, a causalidade deve ser considerada apenas na zona de radiação. Mostramos, ainda, quais termos do formalismo são negligenciados quando os cálculos são feitos utilizando a aproximação de onda girante (*rotating wave*).

O principal objetivo do capítulo 3 foi servir de base para uma introdução ao conceito de meios desordenados. Apresentamos a equação de Klein-Gordon aleatória, que é a equação obedecida por um campo escalar livre inserido em um meio desordenado, discutimos brevemente as propriedades de dois tipos de desordem — *quenched* e *annealed* — e apon-

tamos a diferença entre eles. No caso do nosso sistema, usamos o tratamento dado a uma desordem *quenched* e, para que isso fosse possível, fizemos suposições sobre os momentos estatísticos da desordem. Em seguida, determinamos a função de Green para o sistema e tomamos as médias sobre a desordem dessa função. Ao final, mostramos que, devido à desordem, a primeira correção sobre a função de Green de um campo livre é equivalente a um termo de autointeração qualitativamente similar a uma teoria $\lambda\phi^4$.

No decorrer dos primeiros capítulos, introduzimos os conceitos do problema de Fermi, além do método matemático aplicado no tratamento de campos quânticos em meios desordenados. Este caminho nos forneceu as ferramentas necessárias para que, no capítulo 4, pudéssemos analisar quais os aspectos causais de um sistema de dois átomos inserido num meio com desordem. Três situações diferentes foram abordadas:

- **situação 1:** os estados inicial e final de ambos os átomos são conhecidos nas duas observações do sistema e o campo está em seu estado de vácuo tanto na observação inicial quanto na final;
- **situação 2:** os estados inicial e final de ambos os átomos são conhecidos nas duas observações do sistema e apenas o estado inicial do campo é conhecido (estado de vácuo);
- **situação 3:** apenas os estados inicial e final do átomo inicialmente no estado fundamental são conhecidos nas duas observações. Também é conhecido o estado inicial do campo (estado de vácuo).

Para cada uma das situações apresentadas, obtivemos uma expressão para a probabilidade de transição de um estado do sistema para o outro, a partir do formalismo desenvolvido no capítulo 2. Mostramos que a causalidade dos termos não afetados pela perturbação é respeitada nas três situações, de acordo com a definição de causalidade dada por Pauli. Já os termos que surgem devido à existência de desordem no meio foram

mais complicados de se estudar, mas apesar disso, vimos que as probabilidades de transição em todas as situações investigadas satisfazem à condição de causalidade contanto que consideremos apenas a zona de radiação.

Referências Bibliográficas

- [1] “The quantum theory of the emission and absorption of radiation,” *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 114, no. 767, pp. 243–265, 1927. 1
- [2] E. Fermi, “Quantum theory of radiation,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 4, pp. 87–132, Jan 1932. 1
- [3] J. Hamilton, “Damping theory and the propagation of radiation,” *Proceedings of the Physical Society. Section A*, vol. 62, no. 1, p. 12, 1949. 2
- [4] P. W. Milonni and P. L. Knight, “Retardation in the resonant interaction of two identical atoms,” *Phys. Rev. A*, vol. 10, pp. 1096–1108, Oct 1974. 2
- [5] A. K. Biswas, G. Compagno, G. M. Palma, R. Passante, and F. Persico, “Virtual photons and causality in the dynamics of a pair of two-level atoms,” *Phys. Rev. A*, vol. 42, pp. 4291–4301, Oct 1990. 2
- [6] A. K. Biswas, G. Compagno, G. M. Palma, R. Passante, and F. Persico, “Erratum: Virtual photons and causality in the dynamics of a pair of two-level atoms [phys. rev. a 42, 4291 (1990)],” *Phys. Rev. A*, vol. 44, pp. 798–798, Jul 1991. 2
- [7] G. C. Hegerfeldt, “Problems about causality in Fermi’s two-atom model and possible resolutions,” 1997. 2

- [8] D. Buchholz and J. Yngvason, “There are no causality problems for Fermi’s two atom system,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 73, pp. 613–616, 1994. 2
- [9] P. W. Milonni, D. F. V. James, and H. Fearn, “Photodetection and causality in quantum optics,” *Phys. Rev. A*, vol. 52, pp. 1525–1537, Aug 1995. 2
- [10] E. A. Power and T. Thirunamachandran, “Analysis of the causal behavior in energy transfer between atoms,” *Phys. Rev. A*, vol. 56, pp. 3395–3408, Nov 1997. 2, 26, 32
- [11] M. Cliche and A. Kempf, “Relativistic quantum channel of communication through field quanta,” *Phys. Rev. A*, vol. 81, p. 012330, Jan 2010. 2, 26, 30
- [12] J. F. Donoghue, “Leading quantum correction to the newtonian potential,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 72, pp. 2996–2999, May 1994. 2
- [13] J. F. Donoghue, “General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections,” *Phys. Rev. D*, vol. 50, pp. 3874–3888, Sep 1994. 2
- [14] W. Dittrich and M. Reuter, *Effective Lagrangians in Quantum Electrodynamics*. Springer-Verlag, 1986. 2
- [15] R. J. Glauber, “The quantum theory of optical coherence,” *Phys. Rev.*, vol. 130, pp. 2529–2539, Jun 1963. 5
- [16] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*. Oxford University Press, 1983. 5
- [17] H. M. Nussenzweig, *Introduction to Quantum Optics*. 1973. 5
- [18] W. G. Unruh, “Notes on black-hole evaporation,” *Phys. Rev. D*, vol. 14, pp. 870–892, Aug 1976. 5, 15
- [19] S. W. Hawking and W. Israel, eds., *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*. Cambridge University Press, 1980. 5

- [20] J. J. Sakurai, *Modern quantum mechanics; rev. ed.* Reading, MA: Addison-Wesley, 1994. 5
- [21] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1984. 5, 13, 19
- [22] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*. No. v. 2-3 in Quantum theory of fields, Cambridge University Press, 2000. 6, 18
- [23] G. Arfken and H. Weber, *Mathematical methods for physicists*. Elsevier Acad. Press, 2008. 11, 13, 37
- [24] W. Pauli, *Pauli Lectures on Physics: Selected Topics in Field Quantization*. Dover, 1973. 13, 31, 41
- [25] E. C. G. Stueckelberg and D. Rivier, “Causalité et structure de la matrice s ,” vol. 23, no. 215, 1949. 13, 31
- [26] L. H. Ford, “Gravitons and light cone fluctuations,” *Phys. Rev.*, vol. D51, pp. 1692–1700, 1995. 14
- [27] F. A. E. Pirani, “Noncausal behavior of classical tachyons,” *Phys. Rev.*, vol. D1, pp. 3224–3225, 1970. 14
- [28] M. L. Bellac, *Thermal Field Theory*. Cambridge University Press, 2011. 14
- [29] G. Krein, G. Menezes, and N. F. Svaiter, “Analog model for quantum gravity effects: Phonons in random fluids,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, p. 131301, 2010. 14, 15
- [30] “Disordered systems.” <https://www.lpthe.jussieu.fr/~leticia/cargese-lectures.pdf>. Acessado em 15/04/2018. 15

- [31] S. Weinfurtner, S. Liberati, and M. Visser, “Analogue model for quantum gravity phenomenology,” *J. Phys.*, vol. A39, pp. 6807–6814, 2006. 15
- [32] D. Vocke, C. Maitland, A. Prain, F. Biancalana, F. Marino, and D. Faccio, “Rotating black hole geometries in a two-dimensional photon superfluid,” 2017. 15
- [33] E. Berti, V. Cardoso, and J. P. S. Lemos, “Quasinormal modes and classical wave propagation in analogue black holes,” *Phys. Rev. D*, vol. 70, p. 124006, Dec 2004. 15
- [34] F. Marino, M. Ciszak, and A. Ortolan, “Acoustic superradiance from optical vortices in self-defocusing cavities,” *Phys. Rev. A*, vol. 80, p. 065802, Dec 2009. 15
- [35] C. Barceló, S. Liberati, and M. Visser, “Analogue gravity,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 14, p. 3, May 2011. 15
- [36] R. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley, 2008. 16
- [37] M. Lévy and J. Sucher, “Eikonal approximation in quantum field theory,” *Phys. Rev.*, vol. 186, pp. 1656–1670, Oct 1969. 16
- [38] R. J. A. Diaz, *The Distributional Zeta-Function Approach to Compute the Quenched Average Free Energy in Disordered Systems*. PhD thesis, Department of Theoretical Physics Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2018. 20
- [39] P. Ramond, *Field Theory*. Frontiers in Physics, Avalon Publishing, 1997. 22
- [40] G. Menezes, N. F. Svaiter, H. R. de Mello, and C. A. D. Zarro, “Fermi problem in disordered systems,” *Phys. Rev. A*, vol. 96, p. 042120, Oct 2017. 24
- [41] R. Dickinson, J. Forshaw, and P. Millington, “Probabilities and signalling in quantum field theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 93, p. 065054, Mar 2016. 26

- [42] R. H. Jonsson, E. Martín-Martínez, and A. Kempf, “Quantum signaling in cavity qed,” *Phys. Rev. A*, vol. 89, p. 022330, Feb 2014. 30
- [43] R. H. Jonsson, “Quantum signaling in relativistic motion and across acceleration horizons,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 50, no. 35, p. 355401, 2017. 30
- [44] B. F. Svaiter and N. F. Svaiter, “Inertial and noninertial particle detectors and vacuum fluctuations,” *Phys. Rev. D*, vol. 46, pp. 5267–5277, Dec 1992. 31
- [45] N. F. Svaiter, E. Arias, G. Krein, and G. Menezes, “Thermal radiation from a fluctuating event horizon,” *Int. J. Mod. Phys A*, vol. 27, 2012. 34
- [46] “Feynman parameters.” <http://www.theoretical-physics.net/dev/math/feynman-parameters.html>. Acessado em 04/04/2018. 34