



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA

**ESTUDO DO EFEITO DE CORRELAÇÕES DO
RESERVATÓRIO NA DINÂMICA DE UM QUBIT
EM MODELO COLISIONAL**

John Milton Zapana Choquehuanca

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Marcelo Paleólogo Elefteriadis de França Santos

Rio de Janeiro

21 Dezembro de 2018

P436 Zapana Choquehuanca, John Milton

Estudo Do Efeito de Correlações Do Reservatório Na Dinâmica De Um Qubit Em Modelo Colisional / John Milton Zapana Choquehuanca - Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2018.

xiv, 154f.

Orientador: Marcelo Paleólogo Elefteriadis de França Santos

Dissertação (Mestrado em Física) - UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Referências Bibliográficas: f. 124-145.

1. Sistemas Quânticos Abertos 2. Modelos Colisionais. 3. Dinâmica Markoviana. 4. Descoerência. I. Santos, Marcelo Paleólogo Elefteriadis de França II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Física. III. Estudo Do Efeito de Correlações Do Reservatório Na Dinâmica De Um Qubit Em Modelo Colisional

Resumo

ESTUDO DO EFEITO DE CORRELAÇÕES DO RESERVATÓRIO NA DINÂMICA DE UM QUBIT EM MODELO COLISIONAL

John Milton Zapana Choquehuanca

Orientador: Marcelo Paleólogo Elefteriadis de França Santos

Resumo da Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Física.

Na era atual, há investigações e projetos de enorme importância que se baseiam principalmente em tecnologias quânticas e, para seu desenvolvimento, exigem estudos de sistemas quânticos abertos (SQA). Uma das questões importantes em torno de SQA que estão envolvidos em tecnologias quânticas é o estudo da transição de regime Markoviano a um regime não Markoviano, que é difícil de ser controlada. Nesse trabalho, estudaremos uma possível maneira de induzir uma dinâmica não-Markoviana com base na dinâmica Markoviana de um qubit representada por um sistema de dois níveis dentro de um reservatório em equilíbrio térmico. Testamos dois modelos: um modelo colisional (CM) para tempos de interação entre o sistema e o ambiente muito pequenos; e para um tempo de interação qualquer com uma transformação unitária no sistema entre duas colisões consecutivas. Existem várias maneiras de gerar não markovianidade, mas vamos concentrar-nos em impor correlações no ambiente de modo que queremos que qualquer mudança na dinâmica venha apenas da definição dessas correlações. Para analisar a dinâmica usaremos a solução completa do operador densidade reduzido assim como, em um dos casos, o cálculo de uma

testemunha de não Markovianidade.

Palavras-chave: Modelo Colisional, Mapas CPTP, Markovianidade e não Markovianidade.

Abstract

Study of the effect of Correlations of the Reservoir in the Dynamics of a Qubit in Collisional Model

John Milton Zapana Choquehuanca

Orientador: Marcelo Paleólogo Elefteriadis de França Santos

Abstract Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

In the current era, there are major investigations and projects that rely heavily on quantum technologies and, for their development, require open quantum systems (SQA) studies. One of the important issues surrounding SQA that are involved in quantum technologies is the study of the Markovian regime transition to a non-Markovian regime, which is difficult to control. In this work, we will study a possible way to induce non-Markovian dynamics based on the Markovian dynamics of a qubit represented by a two-level system inside a reservoir in thermal equilibrium. We tested two models: a collision model (CM) for very small times of interaction between the system and the environment; and for any interaction time with a unitary transformation in the system between two consecutive collisions. There are several ways to generate non-markovianity, but we will focus on imposing correlations on the environment so that we want any change in the dynamics to come only from the definition of these correlations. To analyze the dynamics we will use the complete solution of the reduced density operator as well as, in one case, the calculation of a non-Markovianity witness.

Keywords: Collisional Model, CPTP Maps, Markovian e Não Markovian.

Agradecimentos

Durante o desenvolvimento em minha etapa de mestrado em Física no IF-UFRJ que começou em março de 2016 e terminou em dezembro de 2018, eu conheci muitas pessoas importantes e que foram uma influencia para meu crescimento tanto acadêmica, profissional e pessoal durante minha estadia aqui no Brasil. Em resumo, a todos eles agradeço pelo mais sincero da minha pessoa.

Agradeço plenamente às pessoas mais importante de minha vida que são minha família. Meu pai Hugo, que tem uma aparência difícil mas é realmente sentimental, ele foi a pessoa que mais tempo passo meu lado quando era menino, sempre oferecendo-me apoio em momentos difíceis, dando-me diversão e alegria em minha vida o qual nunca vou esquecer. Minha mãe Gaby, uma mulher muito trabalhadora e amigável com as pessoas, ela me deu um enorme tesouro o qual é sua confiança já que ela sempre vai acreditar em mim sucesso como pessoa e dando-me o amor mais sincero que eu posso ter e considerando-me um de suas mais grandes tesouros. Meu irmão Edwin, que é meu melhor amigo com quem eu joguei desde que éramos crianças , assistimos TV juntos, nós compartilhamos momentos divertidos juntos, estudávamos juntos no mesmo escritório e a coisa mais valiosa que ele me deu foi dizer-me irmão do que eu me sinto muito orgulhoso. Meus avós, que como sempre, me davam todo o seu carinho como se fosse filho deles e me estragavam muito, mas infelizmente morreram dois deles que são: Elias e Alejandrina aos quais tenho uma dívida sentimental com eles já que não era o neto ou filho que eles mereciam e é por isso que eu sempre pedirei a eles perdão e a maneira de fazer isso será realizando os sonhos que eles me contaram desde que eu era criança; a minha avó, Luisa, que ainda está ao meu

lado, é uma das primeiras pessoas que me entendeu muito por causa da minha doença e a quem lhe digo que me dedicarei que tenha muito momentos de alegria, o que infelizmente não pude fazer aos meus falecido avós. Em resumo, eu tenho muito mais palavras para toda minha família que simplesmente não entraria neste formato de agradecimentos, mas em poucas palavras eu posso dizer que eu os amo muito.

Eu tenho que dar um profundo agradecimento a meu orientador *Marcelo Paleólogo Elefteriadis de França Santos* que tenho-lhe um enorme respeito e admiração, porque é uma pessoa com uma grande quantidade de conhecimento em física e a pessoa que aceitou meu pedido de orientação, mas durante o desenvolvimento da pesquisa não somente ofereceu me seu conhecimento, mas também me ofereceu sua paciência e compreensão como pessoa devido a algumas deficiências que eu tenho no acadêmico como pessoa. Minha gratidão é total e sincera.

Agradeço a certas pessoas que estimo muito no âmbito da física: Cynthia, Astrid, José, Jilder, Fran, Charlie, são pessoas de enorme coração já que desde no começo de meu estância no Brasil, eles foram as primeiras pessoas que me deram toda a ajuda e conselhos que eu precisava no momento certo e de eles tenho que dizer que foi José quem me falou mais de física como teorias, fenômenos, etc. Com todo isso posso dizer então que, graças a eles, eu nunca me senti sozinho e acima de tudo o que eu estimo deles é que eles me entenderam por causa de meu jeito especial de ser e do fundo do meu coração, eu agradeço a eles.

Agradeço também aos meus colegas da sala de estudo e do mesmo grupo de pesquisa, já que imediatamente me ofereceram sua hospitalidade, um deles foi Marcos, uma pessoa com um enorme coração, com bastante conhecimento não apenas em física, mas também em cultura geral, além disso, ele compartilhou seus conhecimentos comigo ensinando-me, aconselhando-me e acima de tudo, me dando a coragem de fazer o que eu tenho que fazer,

muito obrigado, você é um grande amigo o qual sempre lembrarei. A outra pessoa é Erik que também é uma pessoa com bastante conhecimento em física e especialmente com uma grande personalidade que é o que eu mais admiro dele. Já que é uma pessoa ativa e com bastante atitude positiva, ele esclareceu muitas dúvidas em quântica que eu tinha e acima de tudo ele me ofereceu ajuda constante, muito obrigado Erik.

Agradeço também a grandes pessoas cujos nomes são: Wilson, Xander, Alex, Erik R., Erik C., Paul, Charles, Fidel, Giovanny, Manuel (Conhecidos como a Galera Peruana de Matemática), todos eles fazem parte de minha vida em meu tempo no Brasil. Eles me deram o seu entendimento, ajuda e acima de tudo a amizade deles. Posso dizer que diverti-me muito com eles, ensinaram-me muitas coisas sobre as maravilhas da Matemática e sobre todo eles eram um exemplo de união de amigos já que compartilharam grandes momentos de amigos e posso dizer de minha parte que foi um honra fazer parte de seu grupo de amizade. Eu nunca vou esquecer-los. Muito Obrigado Galera Peruana.

Agradeço ao IF-UFRJ por me dar através da concessão de uma sala de estudo, da gentileza dos funcionários como secretários de Pós-graduação, limpeza e manutenção, entre outros.

Agradeço à CAPES o qual me outorgo uma bolsa de estudo para a respectiva pesquisa em física mas sobre todo me ensino em meu caso a valorar a bolsa como um salário e que a melhor forma de retribuir é por meio de responsabilidade e dedicação.

Agradeço a todas as pessoas que conheci no decorrer da pesquisa tanto no IF-UFRJ como em outros lugares onde convivi, alguns de eles são: Saul, Renato, Flaviana, Marcio, Thais, Wellinson, Carolina, Carlos, Edwards, Lorayne, Luiz, Fabiola, Fatima, Ketty, Yanny, Kevin, Vernny, Veronica, Peter, Sebastião, entre outros ; em resumo posso dizer que são pessoas ótima e com uma grande gentileza . A única coisa que posso mencionar

com segurança sobre essas pessoas é que elas me deixaram certos ensinamentos e dicas importantes para poder executar no decorrer de minha vida.

Agradeço a Todos Eles.

Sumário

Sumário	xi
Lista de Figuras	xiii
1 Introdução	1
2 Breve Estudo de Sistemas Quânticos Abertos	5
2.1 Noções Básicas	5
2.1.1 Sistema de 2 Níveis	7
2.2 Mapas Dinâmicos Quânticos.	8
2.2.1 Representação de Kraus	9
2.2.2 Concatenação de mapas	11
2.3 Definição de um Processo Markoviano.-	13
2.4 Medidores de Não-Markovianidade	14
2.4.1 Divisibilidade de Mapas.-	15
2.4.2 Backflow de Informação	15
2.5 Equação Mestra (ME) Markoviana	18
3 Estudo e Descrição de Modelos Colisões (CM)	20
3.1 Introdução	20
3.2 Modelo de Colisão e a Equação Mestre Markoviano	21
3.3 Uso do CM	27

3.3.1	Exemplo 1	27
3.3.2	Exemplo 2	29
4	Estudo Da Dinâmica de Sistema de 2 Níveis	32
4.1	Entorno Correlacionado	37
4.2	Entorno correlacionado - além da aproximação de segunda ordem no tempo.	44
4.3	Colisões intermediadas por transformações unitárias locais no sistema . . .	53
5	Considerações Finais	65
	Referências Bibliográficas	67
A	Passos Intermediários dentro do CM para a obtenção de uma equação próxima à ME Lindblad	71

Lista de Figuras

2.1	Ideia Concetual em relação aos Mapas CPTP	11
2.2	Situação Geral de um sistema de interesse S : No tempo t_0 é assumido que o ρ_{se} é fatorizável em produto tensor, mas no tempo t' não pode-se assegurar que ρ_{se} seja fatorizavel num produto tensor por causa da interação de S com o entorno E	12
2.3	Esquema simples de perda de Informação quantificada pela distância de traço entre dois estados do mesmo espaço de Hilbert.	16
2.4	Ideia em base à formulação da ME Lindblad por meio da Equação de Von Neumman do estado total $S - E$	18
3.1	Esboço Característico do que acontece num Modelo Colisional Simples . . .	22
4.1	Ideia do CM com correlações no E	37

Capítulo 1

Introdução

Os Sistemas Quânticos Abertos (SQA) se definem como o estudo da interação entre um sistema quântico de interesse S e seu entorno E . A interação faz com que as dinâmicas de S e E sejam mutuamente dependentes, originando dinâmicas não unitárias para o sistema de interesse devido ao acoplamento deste com seu entorno. Um dos benefícios modernos de estudar SQA se encontra em conhecer seus efeitos no desenvolvimento de tecnologias quânticas atuais. Essas tecnologias têm como objetivo explorar fenômenos físicos quânticos e, em sua maioria, se baseiam na manipulação de sistemas quânticos fechados. Contudo, todo sistema sempre estará de alguma forma em contato com seu entorno, o qual produz ligeiras perturbações em sua dinâmica, trazendo como consequência que o princípio de superposição característico de todo sistema quântico colapse no tempo. O fenômeno que faz com que as características quânticas do sistema se transformem em características clássicas é conhecido como descoerência e está presente em todas as aplicações tecnológicas de sistemas quânticos. Um exemplo notório de descoerência é a destruição de padrão de interferência em um experimento de fenda dupla devido à interação da partícula com potenciais marcadores de caminho. [1]-[10]. Para dar ideia do que consiste um SQA, temos como exemplo um sistema quântico de dois níveis que se encontra em contato com um reservatório em equilíbrio térmico. Outro exemplo seria de um sistema de interesse formado por um átomo de dois níveis que interage com um

entorno formado por um campo eletromagnético. A maior parte das dinâmicas geradas por SQA se baseia em processos Markovianos nos quais flui informação de S para E e a dinâmica do estado reduzido de S só depende de seu estado imediatamente anterior e não de estados mais distantes no tempo.

O estudo de tais dinâmicas quânticas Markovianas pode ser focado de duas formas: a primeira do ponto de vista discreto, se baseia em conceitos de mapas dinâmicos Completamente Positivos e que Preservam o Traço (CPTP da sigla em inglês - Completely Positive and Trace Preserving) e na representação de Kraus [1, 2]. A outra forma é desde uma perspectiva contínua que se baseia principalmente na equação diferencial mestra de Lindblad (ME Lindblad)[11]-[16]. Graças a estas formas, se conclui que: se no desenvolvimento temporal da dinâmica se cumpre a concatenação de mapas, sendo tais mapas todos CPTP, então, dizemos que estamos em uma dinâmica Markoviana total. Contudo, se existe pelo menos um mapa que não cumpre a concatenação ou que não seja CPTP, no intervalo temporal, então dizemos que temos uma dinâmica não Markoviana. Comumente, entende-se que uma dinâmica Markoviana produz um fluxo de informação do sistema para o entorno sem que essa regresse ao sistema, enquanto uma dinâmica não Markoviana permite o refluxo de informação do entorno para o sistema.

Sabendo a diferença entre uma dinâmica Markoviana e não Markoviana, a pergunta importante é saber porque, quando e que condições são necessárias para que se suceda essa transição de dinâmicas. Esta é a motivação principal de nossa pesquisa. Para seu desenvolvimento, usaremos um dos tratamentos que é comumente empregado no estudo dessa transição, o de *Modelo Colisional (CM)*. Este modelo tem como vantagem simular principalmente uma dinâmica totalmente Markoviana somente realizando considerações como: sistema e entorno estão inicialmente expressados como um produto tensorial; o estado do entorno é formado por ancillas (subsistemas do entorno) não correlacionadas entre si e cada ancilla do entorno interage com o sistema uma única vez de forma ordenada

e sucessiva com o mesmo tempo de interação [17]-[20].

Este trabalho de dissertação começa definindo como sistema de interesse um Qubit e como seu entorno ancillas que também são qubits. As ancillas interagem com o sistema segundo um hamiltoniano que permite derivar uma dinâmica Markoviana expressa por uma equação mestra na forma de Lindblad. Essa interação busca simular a dinâmica de um sistema de dois níveis dentro de um banho térmico a temperatura constante [21], [22], o que dá um significado físico ao nosso CM.

Partindo da obtenção da ME tentamos produzir a transição da dinâmica Markoviana para uma não Markoviana somente impondo correlações entre as ancillas, sem modificar outras considerações que foram feitas na construção da ME; esta hipótese de transição é baseada principalmente nos estudos realizados em [23] e [24] onde os autores conseguem produzir dinâmica não Markoviana apenas com duas interações entre o sistema e seu entorno. Nestes exemplos, os operadores de Kraus associados à parte não unitária da dinâmica são matrizes de Pauli.

Com essa motivação, o objetivo da dissertação será de tentar reproduzir tais resultados só que para uma dinâmica não unitária regida por operadores tipo "escada" (abaixamento e levantamento). Para verificar a eventual transição, tanto podemos usar testemunhas de não Markovianidade [25]-[31] quanto, no nosso caso, a forma mais razoável é simplesmente comparar o estado gerado pela segunda interação nos dois casos: com entorno descorrelacionado ou correlacionado. Nós mostramos que a diferença entre as duas dinâmicas, se existir, indica a transição que se deseja observar.

A estrutura dessa dissertação consiste, a seguir, em quatro capítulos. No capítulo 2 fazemos uma breve introdução das ferramentas necessárias para entender da física e

modelagem de um CM. No capítulo 3, falamos mais sobre o CM e como esse tratamento permite gerar a transição desejada, por meio de exemplos específicos. No capítulo 4, mostraremos nosso CM no qual geramos uma dinâmica Markoviana em condições normais e buscamos uma dinâmica não Markoviana alterando o grau de correlação das ancillas que formam o entorno. Por fim, no capítulo 5 fazemos considerações finais sobre os resultados obtidos e perspectivas de pesquisa futura.

Capítulo 2

Breve Estudo de Sistemas Quânticos Abertos

A maneira tradicional de aprender a *Mecânica Quântica* é estudar sistemas fechados como, por exemplo, um átomo de hidrogênio ou um oscilador harmônico. Contudo, todo sistema fechado S está dentro de um *Universo* com o qual interage, de tal forma que falar em sistema fechado é sempre apenas uma aproximação. Ainda assim, para tratar a dinâmica de um *Sistema Quântico Aberto*, composto por um sistema de interesse S e seu entorno E , podemos considerar o sistema total $S-E$ como um sistema fechado, governado por uma evolução temporal unitária. Contudo, uma das desvantagens dessa abordagem é que o sistema total é frequentemente de grande dimensão e a equação de Schrödinger correspondente pode ser intratável. Há, contudo, algumas propriedades básicas da dinâmica de sistemas quânticos abertos que se aplicam a uma classe grande de situações. Nesse capítulo, descreveremos as propriedades que nos serão úteis para estudar os modelos colisionais dos capítulos seguintes.

2.1 Noções Básicas

A formulação tradicional da mecânica quântica descreve um sistema fechado através de um *Vetor de Estado*, $|\psi\rangle$, que é um elemento normalizado de um espaço de Hilbert \mathcal{H} .

O vetor de estado é dependente do tempo e sua dinâmica é determinada pela *equação de Schrödinger*

$$\frac{d}{dt} |\psi_s(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} H_s |\psi_s(t)\rangle \quad (2.1)$$

onde H_s é o Hamiltoniano do sistema S . A dinâmica gerada pela equação (2.1) é unitária e a solução pode ser representada em termos de um *Operador de Evolução Temporal Unitária* $U_s(t, t_0)$,

$$|\psi_s(t)\rangle = U_s(t, t_0) |\psi_s(t_0)\rangle, \quad U_s^\dagger(t, t_0) = U_s^{-1}(t, t_0) \quad (2.2)$$

onde

$$U_s(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_s \cdot (t-t_0)} \quad (2.3)$$

se H_s for independente do tempo (*Sistema Conservativo*).

Contudo, tal formulação não contempla vários estados físicos possíveis que são os “ensembles” de vetores de estado, compostos por misturas estatísticas de vetores $|\psi_i\rangle$ cada qual com probabilidade p_i . Tais ensembles, devidamente descritos por operadores densidade, são essenciais para descrever a dinâmica de sistemas quânticos abertos. Apresentamos, então, a formulação de mecânica quântica para esses operadores, seguindo o desenvolvimento das referências [1]-[9]. Em termos de operadores densidade, os postulados da mecânica quântica podem ser enumerados da seguinte forma:

- **Postulado 1 - definição de estado**

Associado a qualquer sistema físico isolado, existe um espaço vetorial complexo com produto interno, conhecido como “espaço de estados” do sistema. O sistema é completamente descrito por seu operador densidade, que é um operador positivo de traço um, que atua no espaço de estados do sistema. Se um sistema quântico está no estado ρ_i com probabilidade p_i , então o operador densidade do sistema é $\sum_i p_i \rho_i$.

- **Postulado 2 - evolução temporal**

A evolução temporal de um sistema quântico fechado é descrita por uma transformação unitária. Ou seja, o estado do sistema $\rho_s(t_1)$ no tempo t_1 está relacionado com o estado do sistema $\rho_s(t_2)$ no tempo t_2 por um operador unitário $U_s(t_2, t_1)$ que só depende dos tempos t_1 e t_2 : $\rho_s(t_2) = U_s(t_2, t_1)\rho_s(t_1)U_s^\dagger(t_2, t_1)$

- **Postulado 3 - medições**

As medições quânticas são descritas por uma coleção de operadores positivos M_m que atuam no espaço de estado do sistema sendo medido. O índice m diz respeito aos resultados que podem ocorrer numa dada medição. Se, antes da medição o sistema está no estado ρ_s , a probabilidade que o resultado m aconteça é dada por :

$$p(m) = \text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho_s)$$

e o estado de pós-medição é dado por :

$$\rho_{sm} = \frac{M_m \rho_s M_m^\dagger}{\text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho_s)}$$

Os operadores M_m respeitam a seguinte relação de completeza: $\sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbb{1}$

- **Postulado 4 - composição de sistemas**

Para um sistema físico composto $\rho_{se}(t)$, o espaço de estados é dado pelo produto tensorial dos espaços de estados de seus sistemas componentes. Em particular, se cada sistema é preparado num estado ρ_i , o estado conjunto do sistema composto é

$$\rho_{se} = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \rho_3 \otimes \dots \otimes \rho_n$$

Informação adicional acerca de sistemas quânticos fechados podemos encontrar em [1]-[9]

2.1.1 Sistema de 2 Níveis

Como exemplo, podemos encontrar uma forma geral para o operador densidade que atua no espaço de estados de um sistema quântico de 2 níveis. Este tipo de sistema pode

representar a descrição da polarização de um foton, um spin 1/2, etc, e em linguagem moderna são chamados de qubits (a versão quântica de um bit). Por ser um espaço de dimensão 2, vamos definir uma base nesse espaço a partir de dois vetores $|0\rangle, |1\rangle$. A matriz 2×2 mais geral nesse espaço pode ser expandida de uma maneira simples como

$$\rho_s(t) = a(t)\mathbb{1}_{2 \times 2} + b(t)\sigma_x + c(t)\sigma_y + d(t)\sigma_z \quad (2.4)$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $\mathbb{1}_{2 \times 2}$ é a matriz identidade e

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{Tr } \sigma_i &= 0; \quad i = x, y, z \end{aligned} \quad (2.5)$$

são as *Matrizes de Pauli*.

Tal operador $\rho_s(t)$ é *Hermitiano* e com traço unitário $\text{Tr} \rho_s(t) = 1$. Dessa condição, obtemos que $a = 1/2$ e, definindo

$$x = 2b, y = 2c, z = 2d,$$

podemos escrever $\rho(t)$ também no formato

$$\rho_s(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + z(t) & x(t) - iy(t) \\ x(t) + iy(t) & 1 - z(t) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Este exemplo é particularmente importante para nós posto que nosso modelo colisional estará baseado na interação entre sistemas de dois níveis. Uma expressão importante que deve-se mencionar para o desenvolvimento desta pesquisa, são os *Operadores Escada* σ^+, σ^- .

$$\sigma^y = (|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|)i = (\sigma^- - \sigma^+)i \quad ; \quad \sigma^x = (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) = \sigma^+ + \sigma^- \quad (2.7)$$

para conhecimentos mais estritos o podemos encontrar principalmente em [1], [4]-[9].

2.2 Mapas Dinâmicos Quânticos.

Até aqui, falamos da dinâmica de um sistema quântico fechado. Contudo, podemos nos perguntar como se dá a dinâmica de um sistema quântico aberto. Há várias formas de

abordar esse problema. Apresentamos a seguir aquelas que nos serão particularmente úteis no restante da dissertação.

2.2.1 Representação de Kraus

Suponha que nosso sistema global seja composto por um sub-sistema de interesse S e seu entorno E , que seu estado inicial seja dado por um produto tensorial entre ambos e que o entorno esteja em um particular estado puro, definido por um projetor em \mathcal{H}_E :

$$\rho_{se}(t_0) = \rho_s(t_0) \otimes \rho_e(t_0) = \rho_s(t_0) \otimes |\phi_e\rangle\langle\phi_e|.$$

De acordo com o postulado 2, o estado global do sistema num tempo posterior será dado por

$$\rho_{se}(t) = U_{se}(t, t_0)\rho_{se}(t_0)U_{se}^\dagger(t, t_0) \quad (2.8)$$

onde $U_{se}(t, t_0)$ é o operador de evolução temporal unitária do sistema total $S - E$. Se quisermos saber apenas o estado do sistema S , tomamos o traço parcial sobre os graus de liberdade do entorno E , numa operação que pode ser resumida por

$$\begin{aligned} \rho_s(t) &= \text{Tr}_e[U_{se}(t, t_0) (\rho_s(t_0) \otimes |\phi_e\rangle\langle\phi_e|) U_{se}^\dagger(t, t_0)] \\ &= \sum_{i=1}^n \langle a_e^i | (U_{se}(t, t_0) (\rho_s(t_0) \otimes |\phi_e\rangle\langle\phi_e|) U_{se}^\dagger(t, t_0)) | a_e^i \rangle \\ \rho_s(t) &= \sum_{i=1}^n K_i \rho_s(t_0) K_i^\dagger \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde a_e^i são uma base ortonormal de n elementos para o espaço \mathcal{H}_e e $K_i = \langle a_e^i | U_{se}(t, t_0) | \phi_e \rangle$ conhecido como *Operador de Kraus*, é um operador atuando apenas no espaço \mathcal{H}_s do sistema. A equação (2.9) é considerada um mapa $\Lambda : \rho_s(t_0) \rightarrow \rho_s(t)$ que atua sobre os estados do sistema S e representa uma forma mais geral de evolução temporal, adequada para quando o sistema de interesse não está isolado. No formato acima, esse mapa é conhecido como *Representação de Kraus* e a condição sobre os operadores de Kraus K_i para que o mapa tenha sentido físico é que o traço de (2.9) seja 1, i.e.

$$\sum_{i=1}^n K_i^\dagger K_i = \mathbb{1} \quad (2.10)$$

Toda a análise dinâmica da dissertação será feita baseada nesse tipo de mapa. Como veremos nos capítulos seguintes, os modelos colisionais que estudaremos são sempre baseados numa dinâmica global unitária entre sistema e entorno como posterior redução do estado global ao estado do sistema de interesse e consequente descrição do mapa de Kraus que descreve a evolução apenas em \mathcal{H}_s .

Uma análise mais profundo da representação de Kraus, incluindo deduções passo a passo e as diferentes propriedades dos operadores K_i , pode ser encontrada em [25], [26]. Para efeito dessa dissertação, o que precisamos saber dos mapas Λ que utilizaremos (mais informação de tais mapas estão presente nas referencias [6],[7]) é que:

- *Cumprem a propriedade de linearidade.* Ou seja, se $\rho_s(t_0) = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \rho_s^{\alpha}(t_0)$, $p_{\alpha} \neq 0$, $\sum_{\alpha} p_{\alpha} = 1$

$$\Lambda(t, t_0)[\rho_s(t_0)] = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \Lambda(t, t_0)[\rho_s^{\alpha}(t_0)] \quad (2.11)$$

- *Têm de preservar as propriedades de hermiticidade e traço de um operador de estado físico qualquer ρ .*

$$(\Lambda(t, t_0)[\rho_s(t)])^{\dagger} = \Lambda(t, t_0)[\rho_s(t)]; \quad (2.12)$$

e

$$\sum_i K_i^{\dagger}(t, t_0) K_i(t, t_0) = \mathbb{1} \quad (2.13)$$

- *Sejam Operações Positivas*, ou seja, mapeiam operador positivo em operador positivo.

$$\Lambda(t, t_0)[\rho(t_0)] \rightarrow \rho(t) \geq 0 \quad (2.14)$$

- *Sejam Completamente Positivos* de modo que, mesmo interagindo com o entorno de dimensão arbitraria representem uma operação física, que matematicamente pode ser expressado como

$$(\Lambda_s(t, t_0) \otimes \mathbb{1}_e)[\rho_{se}(t_0)] = \rho_{se}(t) > 0, \quad (2.15)$$

onde “e” representa o resto do universo. Ou seja, se a transformação do sistema de interesse é descrita pelo mapa Λ , então não pode fazer diferença aplicar o mapa em ρ_s ou sua versão estendida para o resto do universo em ρ_{se} .

Por preservarem positividade no sentido mais amplo e o traço, chamamos esses mapas de CPTP (*do inglês Completely Positive Trace Preserving*). A figura 2.1 dá a ideia central dos mapas CPTP.

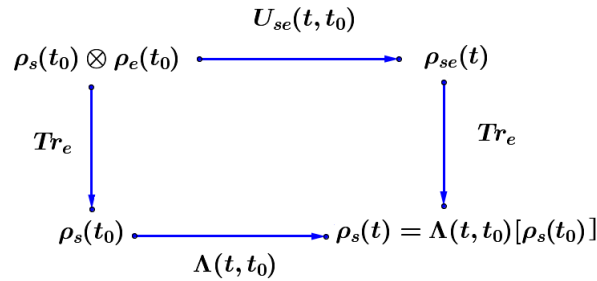


Figura 2.1: Ideia Conceitual em relação aos Mapas CPTP

2.2.2 Concatenação de mapas

Até agora, consideramos uma condição inicial particular que sempre nos permite escrever o mapa da evolução do sistema na forma de Kraus e que sempre nos define um mapa CPTP: *Sistema e Entorno Descorrelacionados entre si*. Uma pergunta importante, contudo, é o que ocorre se quisermos separar a evolução temporal de t_0 a t em dois pedaços: $t_0 \rightarrow t_1$ e $t_1 \rightarrow t$, onde $t_0 < t_1 < t$. Da propriedade de composição de evoluções unitárias, podemos ser levados a crer que essa separação sempre permite concatenar a evolução como a ação de dois mapas consecutivos.

$$\rho_s(t) = \Lambda(t, t_1)[\Lambda(t_1, t_0)\rho_s(t_0)] \quad (2.16)$$

onde ambos sejam CPTP. Note, contudo, que se a primeira parte da evolução temporal global de sistema e entorno $U_{se}(t_1, t_0)$ correlaciona ambos muito fortemente, a condição de completa positividade pode não mais ser verdadeira para a segunda parte da evolução.

Pelo menos, não para mapas que sejam independentes do estado inicial $\rho_s(t_0)$. De fato, para qualquer intervalo de tempo $[t, t']$, é sempre possível escrever um mapa na forma

$$\rho_s(t) = \sum_{ij} K_{ij}(t, t', \rho_s(t_0)) \rho_s(t') K_{ij}^\dagger(t, t', \rho_s(t_0)). \quad (2.17)$$

Essa é a forma mais geral de um mapa que leva o estado de um sistema de um tempo t' para um tempo t como parte de uma evolução temporal que começou no tempo t_0 (para detalhes, ver referência [3], [7], [10]). Para chegar nessa forma, pode-se seguir o mesmo caminho derivado anteriormente mas relaxando agora no formato específico do estado inicial de $S - E$. Para derivar o mapa de Kraus anterior, escolhemos um estado inicial específico em que sistema e entorno estão separados e o entorno está num estado puro (operador densidade dado por um projetor). A soma sobre índices duplos, i, j , aparece se o estado inicial do entorno for diferente de um projetor e a dependência com o estado inicial do sistema aparece se entorno e sistema estiverem inicialmente fortemente correlacionados.

Esses mapas são importantes para nós porque apontam para uma dinâmica não-Markoviana (que guarda memória do estado do sistema), que é o objetivo de estudo dessa dissertação. Nos casos desenvolvidos aqui, o objetivo é justamente descobrir se a evolução temporal pode ser dada em mapas concatenáveis ou não. A seguinte figura 2.2 descreve uma situação geral da dinâmica de um sistema quântico aberto em termos de mapas CPTP

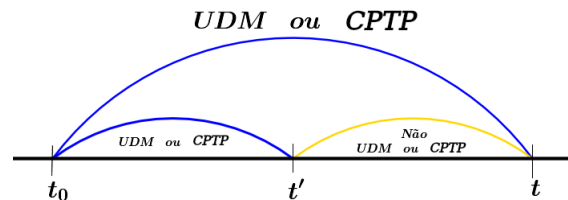


Figura 2.2: Situação Geral de um sistema de interesse S : No tempo t_0 é assumido que o ρ_{se} é fatorizável em produto tensor, mas no tempo t' não pode-se assegurar que ρ_{se} seja fatorizável num produto tensor por causa da interação de S com o entorno E

2.3 Definição de um Processo Markoviano.-

Para ter uma compreensão básica da palavra *Markovianidade*, seguimos o desenvolvimento da referência [7], [9] que diz que: Seja o *Espaço de Probabilidades* o qual tem como sub-espaço os *Processos Estocásticos*. Então, todo processo estocástico é conformado por uma família de variáveis aleatórias X dependentes de algum parâmetro que em nosso caso seria pelo tempo t que pertence a algum conjunto contável n incluído no espaço dos reais \mathcal{R} .-

$$X(t), t \in A \subset \mathcal{R} \quad (2.18)$$

Para que a definição de (2.18) seja um processo de Markov, deve cumprir que a probabilidade P de que X tome o valor de x_n em t_n seja dependente apenas por x_{n-1} em t_{n-1} e não dependa dos valores $x_{n-2}, x_{n-3}, x_{n-4}..$ em $t_{n-2}, t_{n-3}, t_{n-4}..$, respectivamente. Uma forma de expressar tal ideia no campo da informação quântica é :*Um processo de Markov não tem memória da historia dos valores passados de X somente do valor anterior mais imediato.* Lembrando a definição de *Probabilidade Condicional* $P(...|...)$, o dito anteriormente pode ser expressado como

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}; \dots; x_0, t_0) = P(x, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}); \forall t_n \in n \quad (2.19)$$

No caso onde o conjunto n seja contínuo, i.e. t_{n-1} é o instante do tempo infinitamente perto de t_n , então, para qualquer $t > t'$, da definição de *Probabilidade Condicional* (2.19) pode-se derivar a probabilidade conjunta

$$P(x, t; x', t') = P(x, t | x', t') P(x', t') \Rightarrow P(x, t | x', t') = \frac{P(x, t; x', t')}{P(x', t')}. \quad (2.20)$$

Entende-se $P(x, t; x', t')$ como a probabilidade conjunta de que X tome x, x' em t, t' , respectivamente. Integrando encima de todo os valores x' encontramos uma definição que dá a relação entre P não condicionadas

$$P(x, t) = \int P(x, t | x', t') P(x', t') dx' \quad (2.21)$$

Agora, pensando no caso de 3 consecutivos parâmetros temporais $t_3 > t_2 > t_1$, usando a forma da definição (2.20) iterativamente e a definição (2.19) obtemos

$$\begin{aligned} P(x_3, t_3; x_2, t_2; x_1, t_1) &= P(x_3, t_3 | x_2, t_2; x_1, t_1) P(x_2, t_2; x_1, t_1) \\ &= P(x_3, t_3 | x_2, t_2; x_1, t_1) P(x_2, t_2 | x_1, t_1) P(x_1, t_1) \\ &= P(x_3, t_3 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_1, t_1) P(x_1, t_1) \end{aligned}$$

$$\frac{P(x_3, t_3; x_2, t_2; x_1, t_1)}{P(x_1, t_1)} = P(x_3, t_3 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_1, t_1)$$

$$P(x_3, t_3; x_2, t_2 | x_1, t_1) = P(x_3, t_3 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_1, t_1).$$

Integrando encima de todo os valores de X_2 , obtemos a equação chamada *Chapman-Kolgomorov*

$$P(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int P(x_3, t_3 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2. \quad (2.22)$$

Dadas as definições de mapas feitas nas secções anteriores, podemos pensar num $K(x_3, t_3 | x_1, t_1)$ como sendo uma família evolutiva de $P(x_3, t_3 | x_1, t_1)$. Então, K seria como um propagador de evolução temporal que leva $P(x_1, t_1)$ para $P(x_3, t_3)$ e se trocamos em (2.22) o P por K a nova relação seria semelhante à concatenação de mapas $\Lambda(t, t_0) = \Lambda(t, t') \Lambda(t', t_0)$. Portanto, a maneira de relacionar este processo clássico com o quântico seria que $P(a, b)$ tem o papel do operador $\rho(b)$ e o papel de um $P(a, b | c, d)$ seria o de um mapa CPTP $\Lambda(b, d)$. Ou seja, estudar a concatenação de mapas é a versão quântica de estudar processos Markovianos clássicos.

2.4 Medidores de Não-Markovianidade

Dinâmicas não-Markovianas são fáceis de definir mas não necessariamente fáceis de analisar. Afinal de contas, a reconstrução do mapa intermediário para checar a concatenação nem sempre é óbvia. Por isso, ao longo do tempo, foram desenvolvidos medidores de não-Markovianidade, também ditos “testemunhas”. Descrevemos agora alguns desses medidores que serão úteis nos estudos subsequentes.

2.4.1 Divisibilidade de Mapas.-

Este medidor foi proposto por Rivas, Greve e Plenio (RGP); os conceitos a seguir se baseiam totalmente nas referências [15], [16], [27]-[30] que estudam sobre a divisibilidade do mapa quântico envolvido com a dinâmica temporal do sistema quântico de interesse "S". De acordo com o resultado, se o mapa é *Divisível* ou não, pode-se dizer que a dinâmica do "S" está sujeita a um *Processo Markoviano* ou não, respectivamente. Este medidor faz uso da definição de *Mapas CPTP* em que diz que qualquer mapa CPTP Λ é divisível só se puder ser escrito como

$$\Lambda(t + \tau, t_0) = \Lambda(t + \tau, t)\Lambda(t, t_0) \quad (2.23)$$

onde cada parte descrita na descomposição de (2.23) tem que ser *Mapas CPTP* para qualquer $t, \tau > 0$. Então, RHP define um mapa Markoviano se ele atende exatamente (2.23). Seguindo a *lei de composição da teoria de Semigrupos*

$$\Lambda(s, t) = \Lambda(s, u)\Lambda(u, t) \quad (2.24)$$

para qualquer $s \leq u \leq t$ todas as equações são atribuído a uma *Evolução Markoviana*.

No estudo de RHP todo mapa Markoviano cumpre (2.24)

$$\Lambda(t + \tau, t) = \Lambda(t + \tau, t_0)\Lambda^{-1}(t, t_0) \quad (2.25)$$

Outro ponto importante desta medida é que, se o mapa é CPTP, ele satisfaz a Equação Mestra da forma de Lindblad de tempo local que vai ser dada numa secção posterior.

$$\frac{d\Lambda(t, t_0)}{dt} = \mathcal{L}(t)\Lambda(t, t_0) \quad (2.26)$$

onde o *Superoperador* $\mathcal{L}(t)$ é um gerador Markoviano legítimo para qualquer $t \leq t_0$.

2.4.2 Backflow de Informação

Este critério, proposto por Breuer, Laine e Piilo (BLP) está desenvolvido e analisado principalmente nas referências [15], [16], [27]- [30]. De acordo com BLP, uma dinâmica

não-Markoviana é definida como uma evolução temporal para um sistema de interesse S caracterizado por um *Fluxo Temporário* de informação do entorno E voltando para dentro do sistema de interesse S ".

Este *Backflow de Informação* se manifesta como um aumento na *Distancia do Traço* D de um par de estados quânticos iniciais do sistema, evoluindo. D representa uma métrica no espaço de estados $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{\rho_s})$. Como D permite distinguir estados físicos num mesmo espaço também é geralmente nomeado como *Distinguibilidade*. Expressando esta descrição na linguagem matemática, diz-se:

O *Mapa Dinâmico* $\Lambda(t, t_0)$, é não Markoviano, se existe um par de estados iniciais $\rho_{s_1}(t_0), \rho_{s_2}(t_0)$ tal que por algum tempo $t > 0$ a *Distancia do Traço* D entre $\rho_{s_1}(t)$ e $\rho_{s_2}(t)$ aumenta

$$\sigma(t, \rho_{s_1}(t_0), \rho_{s_2}(t_0)) = \frac{d}{dt} D[\rho_{s_1}(t); \rho_{s_2}(t)] > 0 \quad (2.27)$$

onde σ denota a taxa de alteração do D no tempo t correspondente ao par de estados iniciais. Para continuar devemos saber que a distancia do traço é definida como

$$D(\rho_{s_1}(t); \rho_{s_2}(t)) = \frac{1}{2} \|\rho_{s_1}(t) - \rho_{s_2}(t)\| \quad (2.28)$$

onde $\|A\| = \text{Tr}[\sqrt{AA^\dagger}]$. Se A é hermitiano com auto-valores a_i , então, $\|A\| = \sum_i |a_i|$. Na figura 2.3 apresentamos essa ideia de forma pictórica.

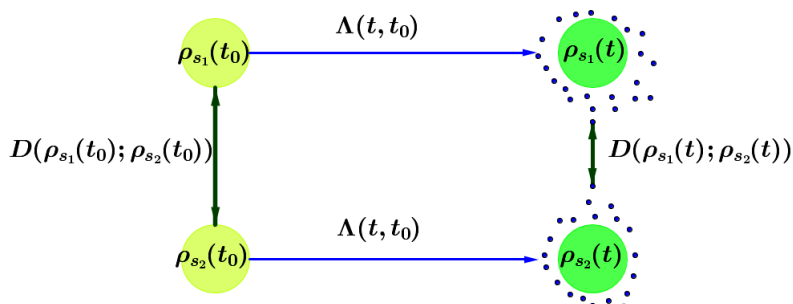


Figura 2.3: Esquema simples de perda de Informação quantificada pela distância de traço entre dois estados do mesmo espaço de Hilbert.

Algumas propriedades matemáticas importantes referentes a D que vou mencionar a seguir podem ser encontradas em [15]

1) D satisfaz

$$0 \leq D(\rho_{s_1}(t); \rho_{s_2}(t)) \leq 1 \quad (2.29)$$

e $D = 0 \Leftrightarrow \rho_{s_1} = \rho_{s_2}$, enquanto, $D = 1 \Leftrightarrow \rho_{s_1}$ e ρ_{s_2} são ortogonais.

2) Se $\rho_{s_1}(t)$, $\rho_{s_2}(t)$ são estados puros dados por $|\phi_{s_1}(t)\rangle$, $|\phi_{s_2}(t)\rangle$, respectivamente, a distância do traço pode ser escrita como

$$D(\rho_{s_1}(t); \rho_{s_2}(t)) = \sqrt{1 - |\langle \phi_{s_1}(t) | \phi_{s_2}(t) \rangle|^2} \quad (2.30)$$

Mas, se estamos num espaço \mathcal{H} de um qubit, então-

$$\begin{aligned} D(\rho_{s_1}(t); \rho_{s_2}(t)) &= \sqrt{a^2 + |b|^2} \\ a &= \rho_{s_1}^{11} - \rho_{s_2}^{11}, \quad b = \rho_{s_1}^{10} - \rho_{s_2}^{10} \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde $\rho_{s_k}^{ij}$ são elementos da matriz de estado correspondente de t .

3) D é invariante sob transformações de operadores unitários temporais $U(t)$

$$D(U(t)\rho_{s_1}(t_0)U^\dagger(t); U(t)\rho_{s_2}(t_0)U^\dagger(t)) = D(\rho_{s_1}(t_0); \rho_{s_2}(t_0)) \quad (2.32)$$

4) (*Propriedade Importante*) Todo mapa CPTP ou operação quântica preservando o traço são contrações monotônicas da métrica da distância do traço

$$D(\Lambda_t \rho_{s_1}(t_0); \Lambda_t \rho_{s_2}(t_0)) = D(\rho_{s_1}(t); \rho_{s_2}(t)) \leq D(\rho_{s_1}(t_0); \rho_{s_2}(t_0)). \quad (2.33)$$

O significado da equação (2.33) é que operações quânticas preservando o traço ou mapas CPTP nunca podem aumentar a distinguibilidade entre dois estados.

Graças à propriedade 4) de D , pode-se saber se o sistema aberto S que está interagindo com o entorno E está passando por dinâmicas temporais Markovianas ou Não-Markovianas. Se D aumentar em algum momento, então a dinâmica tem de ser necessariamente não-Markoviana. Como nota importante que devemos ter em conta, é que existem ótimos pares de estados de um sistema de interesse S na que nossa D possa identificar com maior certeza uma dinâmica não Markoviana, e por isso que o estudo de [31] é uma excelente referencia.

2.5 Equação Mestra (ME) Markoviana

A derivação tradicional da Equação Mestra na forma de Lindblad pode ser encontrada nas referências [8], [9], [11], [12], [29] mas como um resumo desta derivação e considerando $\hbar = 1$, a ideia principal pode ser esboçada na seguinte figura.-

$$\begin{array}{ccc}
 \rho_{se}(t) & \longrightarrow & \frac{d}{dt} \rho_{se}(t) = -i[H_{se}; \rho_{se}(t)] \\
 \text{Tr}_e \downarrow & & \downarrow \text{Tr}_e \\
 \rho_s(t) & \longrightarrow & \frac{d}{dt} \rho_s(t) = -i[H_{si}; \rho_s(t)] + \mathcal{L}[\rho_s(t)]
 \end{array}$$

Figura 2.4: Ideia em base à formulação da ME Lindblad por meio da Equação de Von Neumann do estado total $S - E$

Para efeito dessa dissertação, basta-nos conectar a forma já bem estabelecida a partir do teorema de Lindblad [8] com os mapas de Kraus que definimos anteriormente. Como vimos em seções anteriores, se a dinâmica é divisível para qualquer tempo intermediário, isso tem de ser verdade inclusive para intervalos de tempo pequenos. Ou seja,

$$\rho(t + \Delta t) = \sum_j K_j(\Delta t) \rho(t) K_j^\dagger(\Delta t) \quad (2.34)$$

onde os K não dependem do instante t . Queremos obter a forma geral dos operadores $K_j(\Delta t)$ para uma evolução quando $\Delta t \rightarrow 0$, então, estabelecemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta \rho}{\Delta t} &\approx \frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho(t)] + \mathcal{L}[\rho(t)] = \mathcal{D}[\rho(t)], \quad \hbar = 1 \\
 \rho(t + \Delta t) &\approx \rho(t) + \Delta \rho(t) = \rho(t) + \Delta t \mathcal{D}[\rho(t)]
 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Se definimos $K_j(\Delta t) = \sqrt{\gamma \Delta t} L_j$, onde γ é definido de tal forma que L_j seja um operador adimensional para que ao estender a somatória da expressão (2.34) seja semelhante a (2.35) em relação à ordem de Δt , podemos escrever o lado esquerdo da equação anterior como

$$K_0(\Delta t) \rho(t) K_0^\dagger(\Delta t) + \sum_{j \neq 0} K_j(\Delta t) \rho(t) K_j^\dagger(\Delta t) = \rho(t) + \Delta t \mathcal{D}[\rho(t)]$$

onde

$$K_0 = \mathbb{1} ; K_j = \sqrt{\gamma\Delta t}L_j \quad (2.36)$$

Se os operadores de kraus dessa equação fossem corretos, deveriam cumprir a condição de normalização $\sum_j K_j^\dagger K_j = \mathbb{1}$. Contudo, encontramos uma incongruência porque isso implicaria que $\gamma\Delta t \sum_j L_j^\dagger L_j = 0$, mas temos de cumprir: $\Delta t \neq 0$ e $L_j \neq 0$. O caminho certo é que os operadores de kraus da equação (2.36) devem ter a forma

$$K_0 = \mathbb{1} + G\gamma\Delta t \quad , \quad K_j = \sqrt{\gamma\Delta t}L_j \quad (2.37)$$

onde G, L_j são operadores arbitrários adimensionais. Fazendo uso da condição de normalização obtemos

$$\mathbb{1} = \mathbb{1} + (G + G^\dagger)\gamma\Delta t + \gamma\Delta t \sum_{j \neq 0} L_j^\dagger L_j + \underbrace{\mathcal{O}(\Delta t^2)}_{=0}. \quad (2.38)$$

Como sabemos, o operador G pode ser representado por $G = A - iB$, onde A, B são hermitianos adimensionais. Tendo em conta a forma de G e por meio da equação (2.38) obtemos que

$$A = \frac{1}{2} \sum_{j \neq 0} L_j^\dagger L_j \quad (2.39)$$

Agora, usando (2.39), (2.37) junto com a definição de $G = A - iB$ na expansão de (2.34) obtemos

$$\rho(t + \Delta t) = \rho(t) - i\gamma\Delta t[B; \rho(t)] + \gamma\Delta t \sum_{j \neq 0} \left[L_j \rho L_j^\dagger - \frac{1}{2} \{L_j^\dagger L_j; \rho(t)\} \right] \quad (2.40)$$

Redefinindo (2.40) onde $\gamma B = H$ e por meio do análises da equação (2.35) obtemos a famosa equação mestra na forma de Lindblad

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho(t)] + \mathcal{L}[\rho(t)] = -i[H; \rho(t)] + \sum_j \gamma_j \left[L_j \rho L_j^\dagger - \frac{1}{2} \{L_j^\dagger L_j; \rho(t)\} \right] \quad (2.41)$$

Essa forma de derivar a equação de Lindblad será extensivamente utilizada ao longo da dissertação nos próximos capítulos.

Capítulo 3

Estudo e Descrição de Modelos Colisões (CM)

3.1 Introdução

Sabe-se que um sistema quântico aberto consiste na interação entre um *sistema de interesse* S e seu *entorno* E . Tal interação produz alguns efeitos do entorno E no sistema S , todos incorporados em uma descrição nos termos de uma equação mestra em relação ao operador densidade reduzido do sistema $\rho_s(t)$. Sabe-se que esta equação, que é aproximada, é garantida para um ambiente de *processos Markovianos* e simultaneamente é um gerador de uma *Dinâmica de Semigrupo*, ver referências [19].

As deduções microscópicas de equação mestra encontradas na literatura [8], [9], [11], [12], [15], [16], [29], são baseadas numa série de aproximações tais como a *aproximação de Born* e a *aproximação de Markov*. Tais abordagens não são válidas em diversas situações físicas de interesse e a dinâmica de Semigrupo pode não ser uma descrição precisa [13].

Por causa disso, modelos de colisão (CM) fornecem vantagens para investigar questões importantes na teoria dos sistemas quânticos abertos, em especial para estudar a diferença de dinâmicas *Markovianas* e *Não-Markovianas*. Em particular, este modelo faz uma descrição da qual se pode obter o estado reduzido do sistema $\rho_s(t)$ sem exigir muitas

aproximações e de forma simples e, a partir do qual, testar se os mapas dinâmicos envolvidos são CPT (ver capítulo 2) o que indica ter o sistema uma dinâmica Markoviana.

Um CM pode ser visto de duas maneiras: uma descrição quântica com *tempo discreto* (representação de Kraus) ou como uma aproximação da dinâmica quântica com *tempo contínuo* (Equação mestra de Lindblad) (sua versão discretizada).

De maneira geral, um CM consiste em um sistema S que interage localmente no tempo com diferentes graus de liberdade do entorno E , de tal maneira que a descrição da dinâmica efetiva do sistema é discretizada no tempo e pode se expressar em termos de mapas

$$\begin{aligned}\Lambda_t : \mathcal{S}(\mathcal{H}_s) &\Rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H}_s) \\ \Lambda_t : \rho_s(t_0) &\rightarrow \rho_s(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

lembrando que ρ_s é o estado do sistema de interesse no tempo t e que $\mathcal{S}(\mathcal{H}_s)$ é o espaço de estados do sistema de interesse S .

3.2 Modelo de Colisão e a Equação Mestre Markoviano

Apresentamos aqui as ideias básicas para o sistema de colisões que será utilizado nesta dissertação. Desenvolvimentos semelhantes se encontram na referências [17]-[20], [23], [24], [28]. Para começar, assumimos um sistema de interesse "S" que está em contacto com um entorno "E" formado por uma longa coleção de *Sub-sistemas* pequenos (por exemplo, qubits), que também podemos chamar de "*Ancillas*", (E_n). Supomos, também, que os subsistemas E_n são todos *idênticos*, preparados no mesmo estado quântico inicial e não interagentes entre si, i.e. não há dinâmica interna no entorno E . O espaço de Hilbert total é $\mathcal{H}_{SE} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$. Num primeiro momento, vamos começar o estudo considerando que o estado inicial do sistema conjunto $S - E$ é :

$$\rho_{se}(t_0) = \rho_s(t_0) \otimes \underbrace{(\omega \otimes \omega \otimes \dots)}_{\rho_e}\tag{3.2}$$

onde t_0 é o tempo inicial e ω é o estado inicial comum para todas as Ancillas " E_n ". Note que, na construção do nosso modelo, o entorno é preparado em um estado inicial sem correlação entre seus constituintes. Para um melhor entendimento podemos expressar ω em sua decomposição espectral:

$$\omega = \sum_m p_m |m\rangle\langle m|, \quad (3.3)$$

e, sem perda de generalidade, vamos assumir que todos os auto-estados de energia $|m\rangle$ de E_n são degenerados. A dinâmica de interação entre " S " e " E " se dá tal que cada ancilla E_n colide sucessivamente e uma única vez, com o sistema " S " por meio de uma interação de curta duração de tempo τ_{se} e entre duas colisões, o sistema evolui livremente por um tempo τ_s . Uma pequena representação gráfica da *Dinâmica do Modelo Colisional* é mostrada na fig 3.1

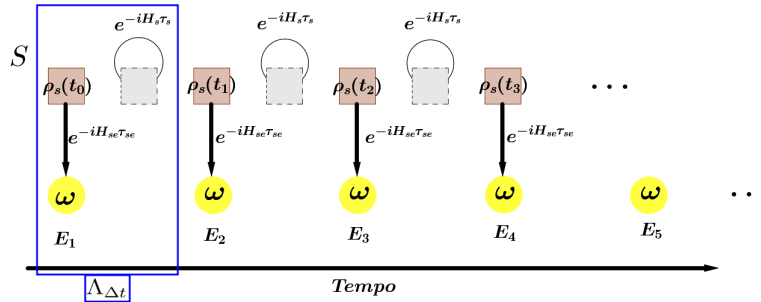


Figura 3.1: Esboço Característico do que acontece num Modelo Colisional Simples

O tempo de duração de cada colisão é o mesmo τ_{se} para cada ancilla, e vamos assumir que o hamiltoniano livre do sistema $H_s = ah_s$, onde a tem dimensão de frequência, h_s é adimensional, $\hbar = 1$, comuta com o hamiltoniano de interação entre sistema e ancilla $H_{se_n} = bh_{se_n}$, onde b tem dimensão de frequência e h_{se_n} é adimensional ($[h_s; h_{se_n}] = 0$). Note que essa não é a condição mais geral possível sobre a interação do sistema com a ancilla mas é suficiente não só para gerar uma dinâmica Markoviana no sistema quanto para levar a uma aproximação por equação mestra e também estudar eventuais desvios não-Markovianos da dinâmica devidos à presença de correlação no estado do entorno, como

veremos adiante. Nessas condições, o operador de evolução unitária U_{se_n} que engloba a “n-ésima” colisão e a evolução livre até a colisão seguinte é sempre dado por

$$U_{se_n} = e^{-i(H_s\tau_s + H_{se_n}\tau_{se})} \quad (3.4)$$

Após n colisões, o estado do sistema global $S - E$, é dado por

$$\rho_{se_n}(t_n) = U_{se_n} \underbrace{\dots U_{se_1} \rho_{se}(t_0) U_{se_1}^\dagger \dots}_{\rho_{se_{n-1}}(t_{n-1})} U_{se_n}^\dagger \quad (3.5)$$

$$t_n = n\Delta t,$$

onde Δt é o intervalo de tempo efetivo que engloba a colisão com uma ancilla e a evolução livre até a colisão seguinte, ver figura 3.1.

Como estamos estudando a dinâmica de S , vamos precisar do estado reduzido correspondente de S num tempo t_n que é obtido através do *traço parcial* (ver ”capítulo 2”) sobre os graus de liberdade da ancilla E_n correspondente em t_n . De (3.5) obtemos:

$$\begin{aligned} \rho_s(t_n) &= Tr_{e_n}[\rho_{se_n}(t_n)] \\ \rho_s(t_n) &= Tr_{e_n}[U_{se_n} \rho_{se_{n-1}}(t_{n-1}) U_{se_n}^\dagger] \\ \rho_s(t_n) &= Tr_{e_n}[U_{se_n}(\rho_s(t_{n-1}) \otimes \omega) U_{se_n}^\dagger] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Lembrando os conceitos de mapas UDM ou CPTP (ver ”capítulo 2 ”), a equação (3.6) pode ser definida como um mapa

$$\rho_s(t_n) = \Lambda_{t_n}[\rho_s(t_{n-1})] \quad (3.7)$$

e lembrando que não há interação entre as ancillas, o estado inicial do entorno não tem correlação, $\rho_{e_n e_{n+1}} = \rho_{e_n} \otimes \rho_{e_{n+1}}$ e a evolução em cada passo é sempre semelhante (mudando apenas o índice da ancilla), podemos fazer para cada tempo local t_n

$$\begin{aligned} \rho_s(t_1) &= \Lambda_t(\rho_s(t_0)) \\ \rho_s(t_2) &= \Lambda_t(\rho_s(t_1)) = \Lambda_t \Lambda_t(\rho_s(t_0)) \\ &\vdots \\ \rho_s(t_n) &= \Lambda_t^n(\rho_s(t_0)) \end{aligned}$$

$$\Lambda_t^n = \Lambda_t \Lambda_t \dots \Lambda_t \text{ (n vezes)} \quad (3.8)$$

A interpretação física de (3.8) indica que, ao menos em relação a intervalos de tempo de tamanho Δt , a dinâmica de S é totalmente *Markoviana*, já que sua evolução de estado para um tempo local t_n depende apenas do estado em t_{n-1} , t_{n-1} depende apenas de t_{n-2} e assim sucessivamente. Com isso, o sistema de interesse S num determinado tempo t_n não tem efeitos de memória de sua história passada, exceto do um passo de tempo meramente anterior t_{n-1} . Essa aproximação indica um modelo discretizado de evolução Markoviana que se aproxima do modelo contínuo no tempo à medida em que $\Delta t \rightarrow 0$. Note, também, que a verificação dessa dinâmica implica na observação do sistema em intervalos de tempo não menores do que Δt . Essa limitação, contudo, não impede de estudar as propriedades da transição entre dinâmicas Markovianas e não-Markovianas como visto em [23], [24]. Esse CM tem uma grande vantagem que é permitir a derivação de uma equação mestra contínua no tempo, o que nos ajudará a entender algumas abordagens do capítulo posterior. Como falamos anteriormente, a duração de cada colisão é o mesmo τ_{se} e a evolução livre até a colisão seguinte é τ_s . Como queremos obter uma equação na aproximação de tempo contínuo, consideramos que ambos os tempos são respectivamente muito menores do que $\frac{1}{b}$ e $\frac{1}{a}$, de modo que, ao usar a expansão em *Série de Taylor* de $U_{se_n}(t)$ só vamos considerar até termos de 2º ordem em relação a cada tempo

$$U_{se_n}(t) \approx \mathbb{1}_s \otimes \mathbb{1}_{e_n} - i(H_s \otimes \mathbb{1}_{e_n} \tau_s + H_{se_n} \tau_{se}) - \frac{(H_s \otimes \mathbb{1}_{e_n} \tau_s + H_{se_n} \tau_{se})^2}{2} \quad (3.9)$$

Queremos, também, evitar que o sistema mude consideravelmente entre uma colisão e a colisão seguinte. Consideramos, então, que

$$a\tau_s \ll b\tau_{se} \quad , \quad (3.10)$$

de modo que possamos descartar o termo quadrático em H_s . Dessa forma, a equação (3.9) se aproxima por

$$U_{se_n}(t) \approx \mathbb{1}_s \otimes \mathbb{1}_{e_n} - i(H_s \otimes \mathbb{1}_{e_n} \tau_s + H_{se_n} \tau_{se}) - \frac{H_{se_n}^2 \tau_{se}^2}{2} \quad (3.11)$$

Voltando ao estado do sistema S de tempo local, a pequena mudança do estado $\rho_s(t_n)$ numa dada variação do tempo pode ser definida como

$$\Delta\rho_s(t_n) = \rho_s(t_{n+1}) - \rho_s(t_n). \quad (3.12)$$

Usando (3.8) podemos expressar a equação (3.12) de uma forma semelhante:

$$\Delta\rho_s(t_n) = (\Lambda_t - \mathcal{I})[\rho_s(t_n)] \quad (3.13)$$

onde \mathcal{I} representa um mapa identidade. Como já definimos $\Delta\rho_s(t_n)$, usando as equações (3.6), (3.7), (3.8), (3.11) em (3.12), obtemos

$$\Delta\rho_s(t_n) = \Lambda_t[\rho_s(t_n)] - \rho_s(t_n) = Tr_{e_n} \left[\underbrace{U_{se_n}(\rho_s(t_n) \otimes \omega) U_{se_n}^\dagger}_Z \right] - \rho_s(t_n). \quad (*)$$

a expansão geral do termo Z é dada por

$$\begin{aligned} Z \approx & \rho_s(t_n) \otimes \omega - i[H_s \tau_s \rho_s(t_n) \otimes \omega + H_{se_n} \tau_{se} (\rho_s(t_n) \otimes \omega)] - \frac{H_{se_n}^2 \tau_{se}^2}{2} (\rho_s(t_n) \otimes \omega) \\ & + i[\rho_s(t_n) H_s \tau_s \otimes \omega + (\rho_s(t_n) \otimes \omega) H_{se_n} \tau_{se}] - (\rho_s(t_n) \otimes \omega) \frac{H_{se_n}^2 \tau_{se}^2}{2} \\ & + [\underbrace{H_s \rho_s(t_n) H_s \tau_s^2 \otimes \omega}_{O(a^2 \tau_s^2 \approx 0)} + \underbrace{H_{se_n} \rho_s(t_n) H_s \tau_s \tau_{se} \otimes \omega}_{O(ab \tau_s \tau_{se} \approx 0)} \\ & + \underbrace{H_s \rho_s(t_n) \otimes \omega H_{se_n}}_{O(ab \tau_s \tau_{se} \approx 0)} + H_{se_n} (\rho_s(t_n) \otimes \omega) H_{se_n} \tau_{se}^2]. \end{aligned} \quad (**)$$

Descartando os termos proporcionais a a^2 e ab , e aplicando o traço parcial sobre a ancilla em Z , obtemos

$$\begin{aligned} \Delta\rho_s(t_n) \approx & -i[H_s, \rho_s(t_n)] \tau_s - i Tr_{e_n} [H_{se_n} (\rho_s(t_n) \otimes \omega) - (\rho_s(t_n) \otimes \omega) H_{se_n}] \tau_{se} \\ & - Tr_{e_n} [H_{se_n}^2 (\rho_s(t_n) \otimes \omega) + (\rho_s(t_n) \otimes \omega) H_{se_n}^2 - 2 H_{se_n} (\rho_s(t_n) \otimes \omega) H_{se_n}] \frac{\tau_{se}^2}{2} \end{aligned} \quad (***)$$

Pode-se demonstrar que o termo proporcional a τ_{se} opera como um hamiltoniano efetivo no sistema. Re-ordenando a equação acima e já substituindo

$$Tr_{e_n} [H_{se_n} (\rho_s(t_n) \otimes \omega) - (\rho_s(t_n) \otimes \omega) H_{se_n}] = [H_{eff}, \rho_s(t_n)]$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta\rho_s(t_n) \approx & -i[H_s\tau_s + H_{eff}\tau_{se}, \rho_s(t_n)] \\ & - Tr_{e_n}[\{H_{se_n}^2, \rho_s(t_n) \otimes \omega\}] \frac{\tau_{se}^2}{2} + 2Tr_{e_n}[H_{se_n}(\rho_s(t_n) \otimes \omega)H_{se_n}] \frac{\tau_{se}^2}{2}, \end{aligned} \quad (****)$$

onde $\{A; B\}$ denota o anti-comutador $AB + BA$ dos operadores inclusos nas chaves. Passando, agora, aos termos proporcionais a τ_{se}^2 , como demonstramos no apêndice A, lembrando que $\omega = \sum p_m |m\rangle\langle m|$, podemos escrever a equação acima como

$$\Delta\rho_s(t_n) \approx -i [H_s\tau_s + H_{eff}\tau_{se}, \rho_s(t_n)] + b^2\tau_{se}^2 \left(\sum_{im} L_{im}\rho_s(t_n)L_{im}^\dagger - \frac{1}{2}\{L_{im}^\dagger L_{im}, \rho_s(t_n)\} \right), \quad (3.14)$$

onde

$$L_{im} = \sqrt{p_m} \langle i|h_{se_n}|m\rangle \quad (3.15)$$

Note que cada termo da equação acima define uma pequena mudança no estado do sistema. Se considerarmos como unidade elementar de tempo o intervalo entre duas colisões, Δt (Ver figura 3.1), podemos redefinir a equação acima fazendo algumas definições:

$$\begin{aligned} \nu\Delta t = a\tau_s, \quad \lambda\Delta t = b\tau_{se}, \quad b^2\tau_{se}^2 = \Gamma\Delta t, \quad H_s = ah_s, \quad H_{se} = bh_{se} \\ \Delta\rho_s(t_n) \approx -i \left[\underbrace{\nu h_s + \lambda h_{eff}}_{\bar{H}}, \rho_s(t_n) \right] \Delta t + \underbrace{\Gamma\Delta t \left(\sum_{im} L_{im}\rho_s(t_n)L_{im}^\dagger - \frac{1}{2}\{L_{im}^\dagger L_{im}, \rho_s(t_n)\} \right)}_{\mathcal{L}[\rho_s(t_n)]} \end{aligned} \quad (3.16)$$

de modo que, finalmente, chegamos a uma equação mestra para a evolução do estado do sistema de interesse entre colisões, dada por

$$\frac{\Delta\rho_s(t_n)}{\Delta t} \approx -i[\bar{H}, \rho_s(t_n)] + \mathcal{L}[\rho_s(t_n)], \quad (3.17)$$

Finalmente, note que todo o estudo feito até agora toma como base a equação (3.2) em que o estado inicial do entorno é não correlacionado. Contudo, se considerarmos $\rho_e \neq \omega \otimes \omega \otimes \dots \otimes \omega$, nada indica que as equações permaneceriam as mesmas. Em particular, já foi demonstrado em diversos trabalhos exemplos em que correlação nas ancillas que

compõem o entorno podem gerar dinâmicas não-Markovianas. A interação entre cada ancilla e o sistema pode correlacioná-los e se as ancillas também estão correlacionadas entre si, o sistema pode se correlacionar com ancillas posteriores antes de interagir com elas. Dessa forma, tal interação pode ter efeito de memória na dinâmica do sistema, i.e. sua história passada afetaria sua futura dinâmica, o que nos levaria para fora do regime Markoviano, onde a equação mestra de Lindblad já não governa a dinâmica do sistema porque não se pode garantir que todos os mapas envolvidos no desenvolvimento da dinâmica sejam CP, o que faria do mapa dinâmico resultante CP-indivisível.

3.3 Uso do CM

3.3.1 Exemplo 1

Nesta seção apresentamos como exemplo de CM, os cálculos desenvolvidos na referência [23], onde os autores mostram transitividade de regime Markoviano ao não-Markoviano para mapas unitais, i.e. mapas em que os operadores de Kraus K_i respeitam $K_i^\dagger K_i \propto \mathbb{1}$.

O sistema de interesse S é um qubit com estado inicial $\rho_s(t_0)$ que interage com um entorno E composto por dois qubits em um estado ρ_e que tanto pode ser correlacionado quanto não-correlacionado e tal que para $t_0 = 0$,

$$\rho_{se}(0) = \rho_s(0) \otimes \rho_e(0) \quad (3.18)$$

A interação entre S e cada qubit “n” do entorno é dada por $H_{se_n}/\hbar = -\lambda_n(\sigma_s^x \otimes |0\rangle\langle 0|_{e_n} + \sigma_s^y \otimes |1\rangle\langle 1|_{e_n})$, tal que o operador unitário global de evolução pode ser escrito como

$$U_{se_n}(t) = e^{i\eta_n\sigma_s^x} \otimes |0\rangle\langle 0|_{e_n} + e^{i\eta_n\sigma_s^y} \otimes |1\rangle\langle 1|_{e_n}, \quad n = 1, 2 \quad (3.19)$$

onde $\eta_n = \lambda_n\delta t$ e δt é sempre o mesmo para cada colisão. O estado geral do entorno será dado por

$$\rho_{e_1e_2}(0) = \frac{q}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) + \frac{1-q}{2}(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|), \quad (3.20)$$

onde o parâmetro “q” ($0 \leq q \leq 1$) regula a correlação dos qubits que o compõem e também vai determinar o regime de evolução do sistema, como mostramos a seguir.

$$q = 1 \Rightarrow e_1, e_2 \quad \text{Totalmente correlacionados}$$

$$q = 0 \Rightarrow e_1, e_2 \quad \text{Totalmente anticorrelacionados}$$

$$q = 1/2 \Rightarrow e_1, e_2 \quad \text{Totalmente Descorrelacionados}$$

Para calcular o estado do sistema depois da primeira colisão basta verificar que a partir do estado acima

$$\rho_{e_1}(0) = \frac{1}{2} |0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2} |1\rangle\langle 1| \quad (3.21)$$

e, seguindo os cálculos anteriormente desenvolvidos, é fácil verificar que

$$\rho_s(t) = \frac{1}{2} \left[e^{i\eta_1\sigma_s^x} \rho_s(0) e^{-i\eta_1\sigma_s^x} + e^{i\eta_1\sigma_s^y} \rho_s(0) e^{-i\eta_1\sigma_s^y} \right] = \Lambda_1(t, 0)[\rho_s(0)]. \quad (3.22)$$

O passo seguinte é encontrar o estado de S para a segunda colisão, dado por

$$\begin{aligned} \rho_s(2t)_{corre} &= Tr_{e_2e_1} [U_{se_2}(t) U_{se_1}(t) (\rho_s(0) \otimes \rho_{e_2_{corre}}(0)) U_{se_1}^\dagger(t) U_{se_2}^\dagger(t)] \\ \rho_s(2t)_{corre} &= \Lambda_2(2t, 0)[\rho_s(0)] \end{aligned} \quad (3.23)$$

e após simples operações de álgebra, chegamos a:

$$\begin{aligned} \rho_s(2t)_{corre} &= \\ & \frac{q}{2} \left[e^{i\eta_2\sigma_s^x} e^{i\eta_1\sigma_s^x} \rho_s(0) e^{-i\eta_1\sigma_s^x} e^{-i\eta_2\sigma_s^x} + e^{i\eta_2\sigma_s^y} e^{i\eta_1\sigma_s^y} \rho_s(0) e^{-i\eta_1\sigma_s^y} e^{-i\eta_2\sigma_s^y} \right] \\ & \frac{1-q}{2} \left[e^{i\eta_2\sigma_s^y} e^{i\eta_1\sigma_s^x} \rho_s(0) e^{-i\eta_1\sigma_s^x} e^{-i\eta_2\sigma_s^y} + e^{i\eta_2\sigma_s^x} e^{i\eta_1\sigma_s^y} \rho_s(0) e^{-i\eta_1\sigma_s^y} e^{-i\eta_2\sigma_s^x} \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Por fim, consideramos que cada interação tem a mesma intensidade de acoplamento com S , i.e. que $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ e que $\eta < 0.1$ para assim podermos aproximar os termo exponenciais por meio da serie de Taylor

$$e^{i\eta\sigma_s^x \text{ ou } y} \approx 1 + i\eta\sigma_s^x \text{ ou } y \quad (3.25)$$

Para testemunhar o regime não-Markoviano, os autores da referência [23] utilizaram a *Distancia do Traço D* (ver capítulo 2), que se sabe ter comportamento monotônico decrescente para dinâmicas Markovianas. Portanto, uma vez calculada D após uma e

duas colisões, se houver aumento após a segunda colisão, serve de indicador de não-Markovianidade. Tomando como estados iniciais do sistema

$$\rho_{s_1}(0) = |0\rangle\langle 0| \quad e \quad \rho_{s_2}(0) = |1\rangle\langle 1| \quad (3.26)$$

calcula-se a evolução temporal para cada um e, em seguida, o valor de D entre os estados evoluídos no tempo. Os resultados das distâncias correspondente são os seguintes:

$$D(\rho_{s_1}(t), \rho_{s_2}(t)) = \frac{1}{2} \sqrt{3 + \cos(4\eta)} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} D(\rho_{s_1}(2t)_{corre}, \rho_{s_2}(2t)_{corre}) &= \frac{1}{2} \{ 16[\cos\eta \sin\eta (\cos^2\eta - q\sin^2\eta)]^2 \\ &\quad + [(q+1)\cos 4\eta - q + 1]^2 \\ &\quad + 4\sin^2\eta \cos^2\eta [(q+1)\cos 2\eta - q + 1]^2 \}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

e, expandindo para tempo curto de interação $\eta \ll 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta D &= D(\rho_{s_1}(2t)_{corre}, \rho_{s_2}(2t)_{corre}) - D(\rho_{s_1}(t), \rho_{s_2}(t)) \\ \Delta D &= (1 - 4q)\eta^2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde se verifica dinâmica não-Markoviana para $q < \frac{1}{4}$.

3.3.2 Exemplo 2

O exemplo anterior segue o tipo de modelo colisional descrito no capítulo em que o limite para pequenas perturbações no estado do sistema está codificado no curto tempo de interação entre o sistema e cada ancilla que compõe entorno. Na referência [24], os autores descrevem um outro tipo de CM no qual a interação com cada componente do entorno se dá em tempo fixo e finito e a perturbação do sistema é codificada no estado do entorno.

Novamente, o sistema interage com cada ancilla do entorno uma única vez e sequencialmente, só que, dessa vez, o entorno é composto por qudits, cada qual num estado reduzido dado por

$$\rho_e = \left(1 - \sum_i^{d-1} \mathcal{E}_i \right) |0\rangle\langle 0| + \sum_i^{d-1} \mathcal{E}_i |i\rangle\langle i| \quad (3.30)$$

onde $0 \leq \mathcal{E}_i \leq 1$ e $0 \leq \sum_i^{d-1} \mathcal{E}_i \leq 1$ e o hamiltoniano de interação entre sistema e cada qudit do entorno é dado por

$$H_{se_n} = \eta \left(\mathbb{1}_s \otimes |0\rangle\langle 0|_{e_n} + \sum_i^{d-1} \sigma_s^i \otimes |i\rangle\langle i|_{e_n} \right) \quad (3.31)$$

onde σ_s^i é um operador unitário que cumpre $\sigma_s^{i\dagger} = \sigma_s^i$, $\sigma_s^{i^2} = \mathbb{1}$ e η independe da ancilla. Para determinar o estado do sistema depois da primeira colisão, basta verificar que o operador de evolução temporal da colisão $U_{se_1} = e^{-iH_{se_1}\tau}$ pode ser escrito como:

$$U_{se_1}(\tau) = \cos(\eta\tau) \otimes \mathbb{1}_{se_1} - i \frac{H_{se_1}}{\eta} \sin(\eta\tau). \quad (3.32)$$

Se escolhermos $\tau = \frac{\pi}{2\eta}$, e usarmos novamente a regra de construção dos mapas dinâmicos

$$\rho_s(t_0 + \tau) = Tr_{e_1}[U_{se_1}(\tau)(\rho_s(t_0) \otimes \rho_{e_1})U_{se_1}^\dagger(\tau)] \quad (3.33)$$

chegamos ao estado do sistema depois da primeira colisão:

$$\rho_s(t_0 + t) = \left(1 - \sum_{i=0}^{d-1} \mathcal{E}_i \right) \rho_s(t_0) + \sum_{i=0}^{d-1} \mathcal{E}_i \sigma_i \rho_s(t_0) \sigma_i \quad (3.34)$$

onde t deve ser entendido como um contador de colisões. Note que esse mapa, para $\epsilon \ll 1$ e se definirmos $\epsilon_i = \gamma_i \Delta t$, descreve uma equação mestra na forma de Lindblad

$$\rho_s(t + \Delta t) = \rho_s(t) + \Delta t \sum_{i=0}^{d-1} \gamma_i \rho_s(t) + \Delta t \sum_{i=0}^{d-1} \gamma_i \sigma_i \rho_s(t) \sigma_i \quad (3.35)$$

De fato, o modelo é construído de modo que, para entornos descorrelacionados, a evolução do sistema após cada colisão seja sempre dada por essa equação. A transição para o regime não-Markoviano se dá quando o estado global do entorno não é mais definido pelo produto tensorial de estados do tipo (3.30). Em particular, na referência [24], os autores testam um estado emaranhado na forma

$$\rho_{e_2} = |E_2\rangle\langle E_2|,$$

onde

$$\begin{aligned}
|E_2\rangle = & (1 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) |00\rangle + \sqrt{1 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2} (\sqrt{\mathcal{E}_1} |01\rangle + \mathcal{E}_1 |02\rangle) \\
& + \sqrt{\mathcal{E}_1} \sqrt{1 - 2[q\mathcal{E}_1 + (1 - q)\mathcal{E}_2]} |10\rangle \\
& + \sqrt{\mathcal{E}_2} \sqrt{1 - 2[q\mathcal{E}_2 + (1 - q)\mathcal{E}_1]} |20\rangle \\
& + \sqrt{2(1 - q)\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2} (|12\rangle + |21\rangle) + \sqrt{2q} (\mathcal{E}_1 |11\rangle + \mathcal{E}_2 |22\rangle)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

e $0 \leq q \leq 1$ define o grau de correlação do entorno. A equação para o estado reduzido do Quibt após a segunda colisão é, novamente, obtida a partir de

$$\rho_s(t_0 + 2t)_{corre} = Tr_{e_1 e_2} [U_{se_2}(\tau) U_{se_1}(\tau) (\rho_s(t_0) \otimes \rho_{e_2}) U_{se_1}^\dagger(\tau) U_{se_2}^\dagger(\tau)],$$

resultando em

$$\begin{aligned}
\rho_s(t_0 + 2t)_{corre} = & \rho_s(t_0 + t) + \mathcal{E}_1 \mathcal{L}_1 \rho_s(t_0 + t) + \mathcal{E}_2 \mathcal{L}_2 \rho_s(t_0 + t) \\
& + Q \{ (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) [\mathcal{E}_1 \mathcal{L}_1 \rho_s(t_0) - \mathcal{E}_2 \mathcal{L}_2 \rho_s(t_0)] \\
& + \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 [2\rho_s(t_0) - \sigma_1 \sigma_2 \rho_s(t_0) \sigma_2 \sigma_1 - \sigma_2 \sigma_1 \rho_s(t_0) \sigma_1 \sigma_2] \},
\end{aligned} \tag{3.37}$$

onde

$$\mathcal{L}_i \rho = -\rho + \sigma_i \rho \sigma_i$$

e $Q = (2q - 1)$. Rápida inspeção dessa equação mostra que há combinações de parâmetros que levam a dinâmicas não-Markovianas. Por exemplo, se $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$ e $Q > 0$ ($q > 1/2$), o termo proporcional a \mathcal{E}^2 está na forma de Lindblad mas com sinal trocado, uma das assinaturas de efeito de memória. Em [24], os autores aprofundam a análise dos diferentes casos mas tal análise foge do escopo dessa dissertação. A ideia de apresentar esses exemplos é mostrar dois casos simples em que correlação no entorno provoca transição de dinâmica Markoviana para não-Markoviana com reservatórios tipo “matrizes de Pauli”, fato que nos inspirou a buscar semelhante efeito para reservatórios de decaimento espontâneo à temperatura finita.

Capítulo 4

Estudo Da Dinâmica de Sistema de 2 Níveis

Com base no *Modelo Colisional CM* simples que foi descrito no capítulo 3, passamos a estudar a dinâmica de um *Sistema de 2 Níveis (Spin 1/2)*, que será nosso sistema de interesse S em interação com um conjunto de outros sistemas de dois níveis, que serão considerados nosso *Entorno*. Num primeiro momento, veremos como se dá a interação entre S e um único qubit do entorno, E_1 . Estamos interessados em analisar dinâmicas que representem decaimento espontâneo a temperaturas finitas para o sistema de interesse. Demonstramos a seguir que podemos obter tal dinâmicas a partir da interação do sistema com qubits do entorno conforme o seguinte *Hamiltoniano de Interação*

$$H_{se_1} = \hbar\eta (\sigma_s^+ \otimes \sigma_{e_1}^- + \sigma_s^- \otimes \sigma_{e_1}^+), \quad (4.1)$$

onde σ_s^\pm são os *Operadores de Escadas*, já definidos no capítulo 2. O Hamiltoniano (4.1) também pode ser escrito como

$$H_{se_1} = \hbar\eta [|10\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10|] \quad (4.2)$$

em notação matricial onde $|XY\rangle$ representa um vetor de estado do sistema total $S - E_1$ tal que "X" se refere ao sistema S e "Y" ao entorno E_1 .

Como desejamos estudar a dinâmica do sistema S , seguimos a análise realizada no capítulo anterior e buscaremos a mudança no estado reduzido do sistema uma vez tomado o traço parcial sobre o entorno a partir da evolução unitária global governada por (4.2). O operador de evolução temporal é dado por $U_{se_1}(t, t_0) = e^{-iH_{se_1}(t-t_0)}$. Fazendo a expansão em série de Taylor do mesmo e considerando que $t_0 = 0$, obtemos

$$U_{se_1}(t, 0) = U_{se_1}(t) \approx \mathbb{1}_{4 \times 4} - iH_{se_1}t - \frac{H_{se_1}^2 t^2}{2} + \frac{(-iH_{se_1}t)^3}{3!} + \frac{(-iH_{se_1}t)^4}{4!} + \frac{(-iH_{se_1}t)^5}{5!} + \dots \quad (4.3)$$

Tal qual no capítulo anterior, estamos interessados em colisões de curta duração, curta significando que $\eta t \ll 1$. Sendo assim, vamos, novamente, limitar a expansão até termos de segunda ordem em ηt ,

$$\mathcal{O}(t^3) \approx 0 \quad (4.4)$$

$$U_{se_1}(t) \approx \mathbb{1}_{4 \times 4} - iH_{se_1}t - \frac{H_{se_1}^2 t^2}{2}. \quad (4.5)$$

De (4.2), temos que $H_{se_1}^2 = H_{se_1} \cdot H_{se_1}$ pode ser escrito como

$$H_{se_1}^2 = \hbar^2 \eta^2 (|10\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 01|) \quad (4.6)$$

Assumindo que sistema e entorno estão inicialmente descorrelacionados, podemos usar a equação da representação de Kraus (ver capítulo 2) para determinar o estado do sistema S após a interação com E_1

$$\rho_s(t) = Tr_{e_1} \{ U_{se_1}(t) [\rho_s(t_0 = 0) \otimes \rho_{e_1}(t_0 = 0)] U_{se_1}^\dagger(t) \} \quad (4.7)$$

Considerando que o estado inicial da ancilla E_1 é dado por

$$\rho_{e_1}(t_0 = 0) = P_0 |0\rangle\langle 0| + P_1 |1\rangle\langle 1| ; P_0 + P_1 = 1, \quad (4.8)$$

inserindo (4.8) na equação (4.7) e tomando o traço parcial sobre o entorno E_1 , obtemos

$$\begin{aligned} \rho_s(t) = & P_0 [\langle 0|U_{se_1}(t)|0\rangle \rho_s(t) \langle 0|U_{se_1}^\dagger(t)|0\rangle + \langle 1|U_{se_1}(t)|0\rangle \rho_s(t) \langle 0|U_{se_1}^\dagger(t)|1\rangle] + \\ & P_1 [\langle 0|U_{se_1}(t)|1\rangle \rho_s(t) \langle 1|U_{se_1}^\dagger(t)|0\rangle + \langle 1|U_{se_1}(t)|1\rangle \rho_s(t) \langle 1|U_{se_1}^\dagger(t)|1\rangle]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para resolver a equação (4.9), vamos apresentá-la da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\rho_s(t) = & \underbrace{\{\sqrt{P_0} \langle 0|U_{se_1}(t)|0\rangle\}}_{K_1} \rho_s(t) \underbrace{\{\sqrt{P_0} \langle 0|U_{se_1}^\dagger(t)|0\rangle\}}_{K_1^\dagger} + \\
& \underbrace{\{\sqrt{P_0} \langle 1|U_{se_1}(t)|0\rangle\}}_{K_2} \rho_s(t) \underbrace{\{\sqrt{P_0} \langle 0|U_{se_1}^\dagger(t)|1\rangle\}}_{K_2^\dagger} + \\
& \underbrace{\{\sqrt{P_1} \langle 0|U_{se_1}(t)|1\rangle\}}_{K_3} \rho_s(t) \underbrace{\{\sqrt{P_1} \langle 1|U_{se_1}^\dagger(t)|0\rangle\}}_{K_3^\dagger} + \\
& \underbrace{\{\sqrt{P_1} \langle 1|U_{se_1}(t)|1\rangle\}}_{K_4} \rho_s(t) \underbrace{\{\sqrt{P_1} \langle 1|U_{se_1}^\dagger(t)|1\rangle\}}_{K_4^\dagger}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

em que o estado quântico do sistema depois da interação é modificado por um mapa de Kraus $\rho(t) = \sum_\alpha K_\alpha(t)\rho(t_0)K_\alpha^\dagger$ onde, a partir das equações (4.2) , (4.5) , (4.6), os operadores de Kraus de (4.10) são dados por

$$\begin{aligned}
K_1(t) &= \sqrt{P_0} \left(\mathbb{1}_{2 \times 2} - \frac{\eta^2 t^2}{2} |1\rangle\langle 1| \right), \quad K_1^\dagger(t) = \sqrt{P_0} \left(\mathbb{1}_{2 \times 2} - \frac{\eta^2 t^2}{2} |1\rangle\langle 1| \right) \\
K_2(t) &= \sqrt{P_0} (-i\eta t |0\rangle\langle 1|), \quad K_2^\dagger(t) = \sqrt{P_0} (i\eta t |1\rangle\langle 0|) \\
K_3(t) &= \sqrt{P_1} (-i\eta t |1\rangle\langle 0|), \quad K_3^\dagger(t) = \sqrt{P_1} (i\eta t |0\rangle\langle 1|) \\
K_4(t) &= \sqrt{P_1} \left(\mathbb{1}_{2 \times 2} - \frac{\eta^2 t^2}{2} |0\rangle\langle 0| \right), \quad K_4^\dagger(t) = \sqrt{P_1} \left(\mathbb{1}_{2 \times 2} - \frac{\eta^2 t^2}{2} |0\rangle\langle 0| \right)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Note que esse mapa respeita a condição de positividade e preservação do traço $\sum_\alpha K_\alpha^\dagger(t)K_\alpha(t) = \mathbb{1}$ desde que nos lembremos da aproximação que despreza os termos de ordem superior a $\eta^2 t^2$. Tendo em conta o dito anteriormente e substituindo (4.11) em (4.10) obtemos

$$\begin{aligned}
\rho_s(t) = & \rho_s(0) - \frac{\eta^2 t^2}{2} [P_0 \{\sigma_s^+ \sigma_s^-, \rho_s(0)\} + P_1 \{\sigma_s^- \sigma_s^+, \rho_s(0)\}] \\
& + \eta^2 t^2 (P_0 \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ + P_1 \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^-)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Se identificarmos $\eta t = \Gamma \Delta t$ (tal qual no capítulo anterior), e fizermos

$$\frac{P_0}{P_1} = Tr(e^{\beta H}) = \frac{\bar{n} + 1}{\bar{n}}$$

a equação (4.12) nos dá exatamente a evolução temporal de um Qubit em contacto com

um reservatório térmico de decaimento a temperatura $T = \frac{1}{K_B\beta}$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_s(\Delta t) - \rho_s(0)}{\Delta t} = & -\Gamma(\bar{n} + 1)\{\sigma_s^+ \sigma_s^-, \rho_s(0)\} + \Gamma\bar{n}\{\sigma_s^- \sigma_s^+, \rho_s(0)\} \\ & + \Gamma(\bar{n} + 1)\sigma_s^- \rho_s(0)\sigma_s^+ + \Gamma\bar{n}\sigma_s^+ \rho_s(0)\sigma_s^- \end{aligned} \quad (4.13)$$

Podemos considerar, também, que nosso sistema de interesse tem uma dinâmica interna. Por exemplo, vamos assumir que ele está sujeito à interação com um outro sistema externo tal que seu hamiltoniano livre é dado por $H_s = \hbar\lambda\sigma_s^y$ e o hamiltoniano total considerando a colisão é dado por

$$\begin{aligned} H_{se_1} &= \hbar\lambda\sigma_s^y \otimes \mathbb{1}_{e_1} + \hbar\eta(\sigma_s^+ \otimes \sigma_{e_1}^- + \sigma_s^- \otimes \sigma_{e_1}^+) \\ \hbar = 1 \quad \Rightarrow \quad H_{se_1} &= \lambda\sigma_s^y \otimes \mathbb{1}_{e_1} + \eta(\sigma_s^+ \otimes \sigma_{e_1}^- + \sigma_s^- \otimes \sigma_{e_1}^+) \end{aligned} \quad (4.14)$$

que, escrito em forma matricial, vale

$$\begin{aligned} H_{se_1} &= -\lambda i(|11\rangle\langle 01| - |01\rangle\langle 11| + |10\rangle\langle 00| - |00\rangle\langle 10|) \\ &\quad + \eta(|01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01|) \\ H_{se_1}^2 &= \lambda^2 \mathbb{1}_s \otimes \mathbb{1}_{e_1} - \lambda\eta i(|11\rangle\langle 10| - |00\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 00| - |10\rangle\langle 11|) \\ &\quad + \eta^2(|10\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 01|) \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde

$$\mathbb{1}_s \otimes \mathbb{1}_{e_1} = |11\rangle\langle 11| + |00\rangle\langle 00| + |10\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 01|$$

Agora, para encontrar $\rho_s(t)$ fazemos da mesma maneira que foi feito para a equação (4.12) já que estamos usando o mesmo estado inicial para o entorno, somente estamos variando a forma de H_{se_n} . temos:

$$\begin{aligned} K_1(t) &= \sqrt{P_0} \left(\mathbb{1}_{2x2} - \lambda t(|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|) - \frac{\lambda^2 t^2}{2} \mathbb{1}_{2x2} - \frac{\eta^2 t^2}{2} |1\rangle\langle 1| \right) \\ K_1^\dagger(t) &= \sqrt{P_0} \left(\mathbb{1}_{2x2} - \lambda t(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|) - \frac{\lambda^2 t^2}{2} \mathbb{1}_{2x2} - \frac{\eta^2 t^2}{2} |1\rangle\langle 1| \right) \\ K_2(t) &= \sqrt{P_0} \left(-i\eta t |0\rangle\langle 1| + \frac{\lambda\eta t^2}{2} i\mathbb{1}_{2x2} \right) \\ K_2^\dagger(t) &= \sqrt{P_0} \left(i\eta t |1\rangle\langle 0| - \frac{\lambda\eta t^2}{2} i\mathbb{1}_{2x2} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
K_3(t) &= \sqrt{P_1} \left(-i\eta t |1\rangle\langle 0| + \frac{\lambda\eta t^2}{2} i\mathbb{1}_{2x2} \right) \\
K_3^\dagger(t) &= \sqrt{P_1} \left(i\eta t |0\rangle\langle 1| - \frac{\lambda\eta t^2}{2} i\mathbb{1}_{2x2} \right) \\
K_4(t) &= \sqrt{P_1} \left(\mathbb{1}_{2x2} - \lambda t (|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|) - \frac{\lambda^2 t^2}{2} \mathbb{1}_{2x2} - \frac{\eta^2 t^2}{2} |0\rangle\langle 0| \right) \\
K_4^\dagger(t) &= \sqrt{P_1} \left(\mathbb{1}_{2x2} - \lambda t (|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|) - \frac{\lambda^2 t^2}{2} \mathbb{1}_{2x2} - \frac{\eta^2 t^2}{2} |0\rangle\langle 0| \right)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

O seguinte passo é usar novamente a forma da equação (4.10) e assim poder obter a equação dinâmica correspondente do sistema S após a colisão com a ancilla E_1 .

$$\begin{aligned}
\rho_s(t) &= (\mathbb{1}_s - i\lambda t \sigma_s^y - \lambda^2 t^2) \rho_s(0) \\
&\quad - \frac{\eta^2 t^2}{2} [P_0 \{\sigma_s^+ \sigma_s^-; \rho_s(0)\} + P_1 \{\sigma_s^- \sigma_s^+; \rho_s(0)\}] \\
&\quad + P_0 \eta^2 t^2 \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ + P_1 \eta^2 t^2 \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- \\
&\quad + \lambda^2 t^2 \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^y + i\lambda t \rho_s(0) \sigma_s^y
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Para simplificar os cálculos e sem perda de generalidade para o modelo em análise, faremos agora uma outra consideração, desta vez sobre o termo adicionado que dá a dinâmica interna do sistema. Vamos considerar que o sistema evolui muito pouco por conta desse termo durante a colisão, ou seja, vamos assumir que $\lambda \ll \eta$ tal que guardaremos apenas termos lineares em λt mas ainda assim manteremos os termos quadráticos proporcionais a $\eta^2 t^2$. Assim, obtemos finalmente a evolução do sistema por causa de uma colisão, dada por

$$\begin{aligned}
\rho_s(t) &= \rho_s(0) - i\lambda t [\sigma_s^y, \rho_s(0)] \\
&\quad - \frac{\eta^2 t^2}{2} [P_0 \{\sigma_s^+ \sigma_s^-, \rho_s(0)\} + P_1 \{\sigma_s^- \sigma_s^+, \rho_s(0)\}] \\
&\quad + \eta^2 t^2 [P_0 \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ + P_1 \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^-]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Da forma das equações obtidas nessa secção, vemos que o modelo proposto fornece uma dinâmica Markoviana para um Qubit em contato com um reservatório térmico a temperatura finita e sujeito a uma evolução livre não trivial. Os cálculos estão feitos para apenas

uma colisão mas, como vimos no capítulo anterior, sucessivas colisões gerarão a mesma dinâmica, desde que o estado do entorno seja dado por um produto tensorial de estados iguais para cada constituinte. A partir da próxima secção estudaremos as modificações dessa dinâmica que são geradas por correlações no estado do entorno.

4.1 Entorno Correlacionado

No trabalho [24] verificou-se que a introdução de correlação simples no entorno era suficiente para levar uma dinâmica Markoviana a não-Markoviana. No estudo dessa dissertação, vamos tentar o mesmo para os modelos de decaimento com reservatório térmico desenvolvidos até o momento. A nova tarefa é que nosso sistema de interesse S não interaja apenas com um entorno composto de um único qubit, E_1 (*Sistema de 2 Níveis*), mas sim com um entorno composto de várias ancillas, cada uma de dimensão 2. Sabe-se que se as ancillas não estão correlacionadas, o modelo é construído tal que a dinâmica do sistema é Markoviana e dada por uma equação mestra de Lindblad com taxas constantes. Então, para que possivelmente tenhamos uma *Dinâmica não Markoviana* vamos fazer que nosso sistema de interesse S interaja com um entorno correlacionado como pode-se ver na figura 4.1.-

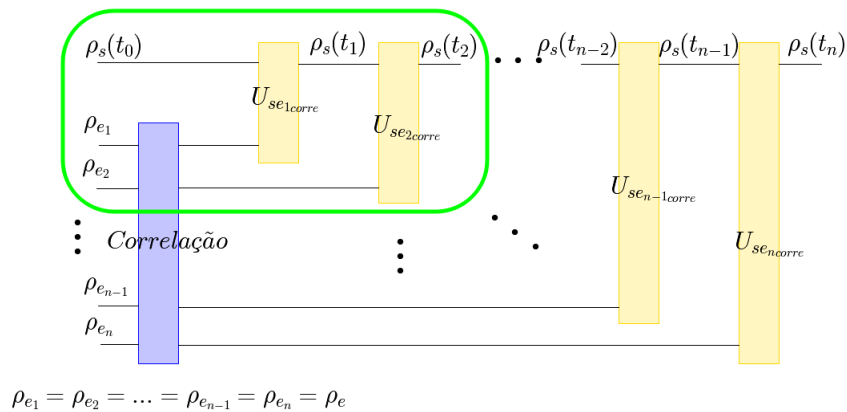


Figura 4.1: Ideia do CM com correlações no E

o estado de cada ancilla é dado por

$$\rho_{e_n}(0) = P_0 \underbrace{|000\dots 000\rangle\langle 000\dots 000|}_n + P_1 \underbrace{|111\dots 111\rangle\langle 111\dots 111|}_n. \quad (4.19)$$

Note que este entorno produz, para cada Qubit, o mesmo estado quântico de E_1 (quando tomamos o traço sobre as demais ancillas). Isso indica que, exceto pela correlação, a dinâmica do sistema deveria ser a mesma anterior. Ou seja, qualquer diferença tem de vir exclusivamente pelo efeito da correlação entre as ancillas. Começamos o estudo para um entorno de duas ancillas, $n = 2$, cujo estado é

$$\rho_{e_1e_2}(0) = P_0 |00\rangle\langle 00| + P_1 |11\rangle\langle 11| ; P_0 + P_1 = 1. \quad (4.20)$$

Justamente porque o traço sobre E_2 produz o mesmo estado de E_1 que tínhamos anteriormente, já conhecemos o estado do sistema depois da primeira colisão. O passo seguinte, portanto, é encontrar a equação dinâmica de nosso sistema reduzido S imediatamente depois da segunda interação. A metodologia dos cálculos é muito similar à que foi usada para calcular $\rho_s(t)$ (4.18), partindo da equação mapas dinâmicos ou representação de Kraus (Ver capítulo 2) mas para o caso da interação da segunda ancilla

$$\rho_s(2t)_{corre} = Tr_{e_2e_1} \{ U_{se_2e_1}(2t) [\rho_s(0) \otimes \rho_{e_1e_2}(0)] U_{se_2e_1}^\dagger(2t) \} \quad (4.21)$$

$$U_{se_2e_1}(2t) = U_{se_2}(t) U_{se_1}(t)$$

$$\rho_s(2t)_{corre} = Tr_{e_2e_1} \{ U_{se_2}(t) U_{se_1}(t) [\rho_s(0) \otimes \rho_{e_1e_2}(0)] U_{se_1}^\dagger(t) U_{se_2}^\dagger(t) \} \quad (4.22)$$

Note que $U_{se_2e_1}(2t)$ pode ser escrito em um produto $U_{se_2}(t)U_{se_1}(t)$ porque cada U_{se_n} atua em espaço de Hilbert ortogonal aos demais. Lembremos as equações (4.5), (4.14) e a equação (4.15) para facilitar cálculos posteriores

$$\begin{aligned}
U_{se_n}(t) &= \mathbb{1}_s \otimes \mathbb{1}_{e_n} - iH_{se_n}t - \frac{H_{se_n}^2 t^2}{2} \\
H_{se_n} &= \lambda \sigma_s^y \otimes \mathbb{1}_{e_n} + \eta (\sigma_s^+ \otimes \sigma_{e_n}^- + \sigma_s^- \otimes \sigma_{e_n}^+) \\
H_{se_n}^2 &= \lambda^2 \mathbb{1}_s \otimes \mathbb{1}_{e_n} - \eta \lambda i [\mathbb{1}_s \otimes (\sigma^+ - \sigma^-)_{e_n}] \\
&\quad + \eta^2 [\sigma^- \sigma^+_s \otimes \sigma^+ \sigma^-_{e_n} + \sigma^+ \sigma^-_s \otimes \sigma^- \sigma^+_{e_n}]
\end{aligned} \tag{4.23}$$

onde n significa qual partícula do entorno está interagindo nesse instante com o sistema. Calculamos a seguir o termo $U_{se_2}(t)U_{se_1}(t)$, mantendo a aproximação feita até o momento, leia-se, vamos desprezar termos de ordem superior a t^2 :

$$\begin{aligned}
U_{se_2e_1}(2t) &= \mathbb{1}_s \otimes \mathbb{1}_{e_1} \otimes \mathbb{1}_{e_2} - it [H_{e_2} \cdot (\mathbb{1}_s \otimes \mathbb{1}_{e_1}) + (\mathbb{1}_s \otimes \mathbb{1}_{e_2}) \cdot H_{e_1}] \\
&\quad - \frac{t^2}{2} [H_{e_2}^2 \cdot (\mathbb{1}_s \otimes \mathbb{1}_{e_1}) + (\mathbb{1}_s \otimes \mathbb{1}_{e_2}) \cdot H_{e_1}^2] - t^2 H_{e_2} \cdot H_{e_1}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Agora, substituindo a equação (4.20) em (4.21), podemos expressá-la da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\rho_s(2t)_{corre} &= P_0 \underbrace{\sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \langle kl | U_{se_2e_1}(2t) | 00 \rangle \rho_s(0) \langle 00 | U_{se_2e_1}^\dagger(2t) | kl \rangle}_{T_1} + \\
&\quad P_1 \underbrace{\sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \langle kl | U_{se_2e_1}(2t) | 11 \rangle \rho_s(0) \langle 11 | U_{se_2e_1}^\dagger(2t) | kl \rangle}_{T_2}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\rho_s(2t)_{corre} = P_0 T_1 + P_1 T_2 \tag{4.26}$$

onde os graus de liberdade são.-

$$\sum_k \sum_l \langle kl | = \langle 10 | + \langle 00 | + \langle 01 | + \langle 11 | . \tag{4.27}$$

Como foi desenvolvido na equação (4.9) e (4.10), a forma de nosso $\rho_s(2t)_{corre}$ ((4.25)) seria

a seguinte considerando os graus de liberdade (4.27).-

$$\begin{aligned}
\rho_s(2t)_{corre} = & P_0 \left\{ \underbrace{\langle 10 | U_{se_2e_1}(2t) | 00 \rangle}_{K_1} \rho_s(0) \underbrace{\langle 00 | U_{se_2e_1}^\dagger(2t) | 10 \rangle}_{K_1^\dagger} + \right. \\
& \underbrace{\langle 00 | U_{se_2e_1}(2t) | 00 \rangle}_{K_2} \rho_s(0) \underbrace{\langle 00 | U_{se_2e_1}^\dagger(2t) | 00 \rangle}_{K_2^\dagger} + \\
& \underbrace{\langle 01 | U_{se_2e_1}(2t) | 00 \rangle}_{K_3} \rho_s(0) \underbrace{\langle 00 | U_{se_2e_1}^\dagger(2t) | 01 \rangle}_{K_3^\dagger} + \\
& \left. \underbrace{\langle 11 | U_{se_2e_1}(2t) | 00 \rangle}_{K_4} \rho_s(0) \underbrace{\langle 00 | U_{se_2e_1}^\dagger(2t) | 11 \rangle}_{K_4^\dagger} \right\} + \\
& P_1 \left\{ \underbrace{\langle 10 | U_{se_2e_1}(2t) | 11 \rangle}_{K_5} \rho_s(0) \underbrace{\langle 11 | U_{se_2e_1}^\dagger(2t) | 10 \rangle}_{K_5^\dagger} + \right. \\
& \underbrace{\langle 00 | U_{se_2e_1}(2t) | 11 \rangle}_{K_6} \rho_s(0) \underbrace{\langle 11 | U_{se_2e_1}^\dagger(2t) | 00 \rangle}_{K_6^\dagger} + \\
& \underbrace{\langle 01 | U_{se_2e_1}(2t) | 11 \rangle}_{K_7} \rho_s(0) \underbrace{\langle 11 | U_{se_2e_1}^\dagger(2t) | 01 \rangle}_{K_7^\dagger} + \\
& \left. \underbrace{\langle 11 | U_{se_2e_1}(2t) | 11 \rangle}_{K_8} \rho_s(0) \underbrace{\langle 11 | U_{se_2e_1}^\dagger(2t) | 11 \rangle}_{K_8^\dagger} \right\}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

a partir da qual podemos encontrar os novos operadores de Kraus da dinâmica de S usando (4.24), dados por

$$\begin{aligned}
K_1(t) &= \sqrt{P_0} \left[-it\eta\sigma_s^- - t^2\lambda\eta\sigma_s^- \sigma_s^y + \frac{t^2}{2}\eta\lambda i\mathbb{1}_s \right] \\
K_1^\dagger(t) &= \sqrt{P_0} \left[it\eta\sigma_s^+ - t^2\lambda\eta\sigma_s^y \sigma_s^+ - \frac{t^2}{2}\eta\lambda i\mathbb{1}_s \right] \\
K_2(t) &= \sqrt{P_0} \left[(1 - 2\lambda^2 t^2)\mathbb{1}_s - 2\lambda i\sigma_s^y t - \eta^2 t^2 \sigma^+ \sigma^- \right] \\
K_2^\dagger(t) &= \sqrt{P_0} \left[(1 - 2\lambda^2 t^2)\mathbb{1}_s + 2\lambda i\sigma_s^y t - \eta^2 t^2 \sigma^+ \sigma^- \right] \\
K_3(t) &= \sqrt{P_0} \left[-it\eta\sigma_s^- - t^2\eta\lambda\sigma_s^y \sigma_s^- - \frac{t^2}{2}\eta\lambda i\mathbb{1}_s \right] \\
K_3^\dagger(t) &= \sqrt{P_0} \left[it\eta\sigma_s^+ - t^2\eta\lambda\sigma_s^y \sigma_s^+ + \frac{t^2}{2}\eta\lambda i\mathbb{1}_s \right] \\
K_4(t) &= K_4^\dagger(t) = 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
K_5(t) &= \sqrt{P_1}[-it\eta\sigma_s^+ - t^2\lambda\eta\sigma_s^y\sigma_s^+ - \frac{t^2}{2}\eta\lambda i\mathbb{1}_s] \\
K_5^\dagger(t) &= \sqrt{P_1}[it\eta\sigma_s^- - t^2\lambda\eta\sigma_s^- \sigma_s^y + \frac{t^2}{2}\eta\lambda i\mathbb{1}_s] \\
K_6(t) &= K_6^\dagger(t) = 0 \\
K_7(t) &= \sqrt{P_1}[-it\eta\sigma_s^+ - t^2\eta\lambda\sigma_s^+\sigma_s^y - \frac{t^2}{2}\eta\lambda i\mathbb{1}_s] \\
K_7^\dagger(t) &= \sqrt{P_1}[it\eta\sigma_s^- - t^2\eta\lambda\sigma_s^y\sigma_s^- + \frac{t^2}{2}\eta\lambda i\mathbb{1}_s] \\
K_8(t) &= \sqrt{P_1}[(1 - 2\lambda^2 t^2)\mathbb{1}_s - 2it\lambda\sigma_s^y - \eta^2 t^2 \sigma_s^- \sigma_s^+] \\
K_8^\dagger(t) &= \sqrt{P_1}[(1 - 2\lambda^2 t^2)\mathbb{1}_s + 2it\lambda\sigma_s^y - \eta^2 t^2 \sigma_s^- \sigma_s^+]
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Aplicando esses operadores na equação (4.28), temos finalmente a equação de evolução temporal do sistema após a segunda colisão:

$$\begin{aligned}
\rho_s(2t)_{corre} &= \rho_s(0) - 2i\lambda [\sigma_s^y; \rho_s(0)] \\
&\quad - \eta^2 t^2 [P_0\{\sigma_s^+\sigma_s^-; \rho_s(0)\} + P_1\{\sigma_s^-\sigma_s^+; \rho_s(0)\}] \\
&\quad + 2\eta^2 t^2 [P_0\sigma_s^- \rho_s(0)\sigma_s^+ + P_1\sigma_s^+ \rho_s(0)\sigma_s^-]
\end{aligned} \tag{4.30}$$

A equação acima informa como o estado do sistema evolui após duas colisões. Para testar se a evolução é Markoviana ou não, podemos ou checar como $\rho_s(2t)_{corre}$ depende de $\rho_s(t)$ ou conferir quanto vale $\rho_s(2t)_{nao\ corre}$ no caso descorrelacionado que já estabelecemos tratar-se de uma dinâmica Markoviana. Então, calculamos para o caso descorrelacionado onde o estado das duas ancillas estão dadas por .-

$$\begin{aligned}
\rho_{e_1}(0) \otimes \rho_{e_2}(0) &= (P_0|0\rangle\langle 0| + P_1|1\rangle\langle 1|) \otimes (P_0|0\rangle\langle 0| + P_1|1\rangle\langle 1|) \\
\rho_{e_1}(0) \otimes \rho_{e_2}(0) &= P_0^2|00\rangle\langle 00| + P_1^2|11\rangle\langle 11| + P_0P_1|01\rangle\langle 01| + P_1P_0|10\rangle\langle 10|
\end{aligned} \tag{4.31}$$

partindo novamente da representação de kraus como no caso correlacionado, mas está vez definida da seguinte maneira.-

$$\rho_s(2t)_{nao\ corre} = Tr_{e_2e_1}\{U_{se_2e_1}(2t)[\rho_s(0) \otimes (\rho_{e_1}(0) \otimes \rho_{e_2}(0))]U_{se_2e_1}^\dagger(2t)\} \tag{4.32}$$

usando os graus de liberdade do entorno $\sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \langle kl|$, a equação (4.31) por meio de

(4.32) pode ser expressado como.-

$$\begin{aligned}
\rho_{s_{nao\text{corre}}}(2t) = & \underbrace{P_0^2 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \langle kl|U_{se_2e_1}(2t)|00\rangle \rho_s(0) \langle 00|U_{se_2e_1}^\dagger(2t)|kl\rangle}_{T_1} + \\
& \underbrace{P_1^2 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \langle kl|U_{se_2e_1}(2t)|11\rangle \rho_s(0) \langle 11|U_{se_2e_1}^\dagger(2t)|kl\rangle}_{T_2} + \\
& \underbrace{P_0P_1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \langle kl|U_{se_2e_1}(2t)|01\rangle \rho_s(0) \langle 01|U_{se_2e_1}^\dagger(2t)|kl\rangle}_{T_3} + \\
& \underbrace{P_1P_0 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \langle kl|U_{se_2e_1}(2t)|10\rangle \rho_s(0) \langle 10|U_{se_2e_1}^\dagger(2t)|kl\rangle}_{T_4}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

uma forma mais reduzida seria usando $P_0 + P_1 = 1$ onde vamos obter uma relação entre a expressão da parte descorrelacionada com a correlacionada.-

$$\rho_{s_{nao\text{corre}}}(2t) = P_0^2\{T_1\} + P_1^2\{T_2\} + P_0P_1\{T_3\} + P_1P_0\{T_4\}$$

$$\rho_{s_{nao\text{corre}}}(2t) = P_0(1 - P_1)T_1 + P_1(1 - P_0)T_2 + P_0P_1T_3 + P_1P_0T_4$$

usando a equação (4.26)

$$\rho_{s_{nao\text{corre}}}(2t) = \underbrace{P_0\{T_1\} + P_1\{T_2\}}_{\rho_{s\text{corre}}(2t)} \underbrace{- P_0P_1\{T_1 + T_2 - T_3 - T_4\}}_{\rho_{\text{adicional}}} \tag{4.34}$$

da equação anterior, podemos ver um termo novo cuja existência, estaríamos na presença de algum efeito de memória em nosso sistema de interesse Qubit S devido à correlação entre as ancillas do entorno E . Agora, precisamos dos termos T onde tenho que dizer que os termos T_1, T_2 que baseando-se entre as equações (4.25) ao (4.28), a forma de T_1 é por meio dos operadores K_1, K_2, K_3 e K_4 de (4.29), no caso de T_2 são com os operadores K_5, K_6, K_7 e K_8 de (4.29), cujas formas finais são as seguintes.-

$$T_1 = \rho_s(0) - 2i\lambda t[\sigma_s^y; \rho_s(0)] - \eta^2 t^2 \{ \sigma_s^+ \sigma_s^-; \rho_s(0) \} + 2\eta^2 t^2 \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ \tag{4.35}$$

$$T_2 = \rho_s(0) - 2i\lambda t[\sigma_s^y; \rho_s(0)] - \eta^2 t^2 \{ \sigma_s^- \sigma_s^+; \rho_s(0) \} + 2\eta^2 t^2 \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- \tag{4.36}$$

em relação aos termos T_3, T_4 devemos encontrar os operadores de Kraus restantes relacionados com o termo P_0P_1 e P_1P_0 por meio de (4.24) e a expressão expandida de (4.33) como foi feito na expansão de (4.28), os operadores de Kraus correspondente são.-

$$\begin{aligned}
K_9(t) &= K_9^\dagger(t) = -\sqrt{P_0P_1}\eta^2t^2 (\sigma_s^- \sigma_s^+) \\
K_{10}(t) &= \sqrt{P_0P_1} \left(-i\eta t \sigma_s^+ + i\eta\lambda \frac{t^2}{2} \mathbb{1}_s - \lambda\eta t^2 \sigma_s^y \sigma_s^+ \right) \\
K_{10}^\dagger(t) &= \sqrt{P_0P_1} \left(i\eta t \sigma_s^- - i\eta\lambda \frac{t^2}{2} \mathbb{1}_s - \lambda\eta t^2 \sigma_s^- \sigma_s^y \right) \\
K_{11}(t) &= \sqrt{P_0P_1} \left(\mathbb{1}_s - 2i\lambda t \sigma_s^y - \frac{\eta^2 t^2}{2} \mathbb{1}_s - 2\lambda^2 t^2 \mathbb{1}_s \right) \\
K_{11}^\dagger(t) &= \sqrt{P_0P_1} \left(\mathbb{1}_s + 2i\lambda t \sigma_s^y - \frac{\eta^2 t^2}{2} \mathbb{1}_s - 2\lambda^2 t^2 \mathbb{1}_s \right) \\
K_{12}(t) &= \sqrt{P_0P_1} \left(-it\eta \sigma_s^- + i\frac{\lambda\eta t^2}{2} \mathbb{1}_s - \lambda\eta t^2 \sigma_s^- \sigma_s^y \right) \\
K_{12}^\dagger(t) &= \sqrt{P_0P_1} \left(it\eta \sigma_s^+ - i\frac{\lambda\eta t^2}{2} \mathbb{1}_s - \lambda\eta t^2 \sigma_s^y \sigma_s^+ \right) \\
K_{13}(t) &= K_{13}^\dagger(t) = -\sqrt{P_1P_0}\eta^2t^2 (\sigma_s^+ \sigma_s^-) \\
K_{14}(t) &= \sqrt{P_1P_0} \left(-i\eta t \sigma_s^+ - i\eta\lambda \frac{t^2}{2} \mathbb{1}_s - \lambda\eta t^2 \sigma_s^+ \sigma_s^y \right) \\
K_{14}^\dagger(t) &= \sqrt{P_1P_0} \left(i\eta t \sigma_s^- + i\eta\lambda \frac{t^2}{2} \mathbb{1}_s - \lambda\eta t^2 \sigma_s^y \sigma_s^- \right) \\
K_{15}(t) &= \sqrt{P_1P_0} \left(\mathbb{1}_s - 2i\lambda t \sigma_s^y - \frac{\eta^2 t^2}{2} \mathbb{1}_s - 2\lambda^2 t^2 \mathbb{1}_s \right) \\
K_{15}^\dagger(t) &= \sqrt{P_1P_0} \left(\mathbb{1}_s + 2i\lambda t \sigma_s^y - \frac{\eta^2 t^2}{2} \mathbb{1}_s - 2\lambda^2 t^2 \mathbb{1}_s \right) \\
K_{16}(t) &= \sqrt{P_1P_0} \left(-it\eta \sigma_s^- + i\frac{\lambda\eta t^2}{2} \mathbb{1}_s - \lambda\eta t^2 \sigma_s^y \sigma_s^- \right) \\
K_{16}^\dagger(t) &= \sqrt{P_1P_0} \left(it\eta \sigma_s^+ - i\frac{\lambda\eta t^2}{2} \mathbb{1}_s - \lambda\eta t^2 \sigma_s^+ \sigma_s^y \right)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Tendo já os operadores necessários, T_3 é por meio de $K_9, K_{10}, K_{11}, K_{12}$ e T_4 é por meio de $K_{13}, K_{14}, K_{15}, K_{16}$ que inserindo na parte correspondente da equação (4.33) estendida como foi no caso de T_1 e T_2 , mas sempre considerando nossas aproximações definidas no começo, finalmente obtemos as formas de T_3 e T_4 que são .-

$$T_3 = (1 - \eta^2 t^2) \rho_s(0) - 2i\lambda t [\sigma_s^y; \rho_s(0)] + \eta^2 t^2 (\sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- + \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+) \tag{4.38}$$

$$T_4 = (1 - \eta^2 t^2) \rho_s(0) - 2i\lambda t [\sigma_s^y; \rho_s(0)] + \eta^2 t^2 (\sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- + \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+) \quad (4.39)$$

inserindo as equações (4.35), (4.36), (4.38) e (4.39) em (4.34), demonstramos que não há existência de um termo adicional e que as equações após da segunda colisão tanto para ancillas correlacionadas como não correlacionadas têm a mesma equação de estado reduzido.-

$$\rho_{adicional} = 0 \Rightarrow \rho_s(2t)_{nao\ corre} = \rho_s(2t)_{corre} \quad (4.40)$$

devido aos resultados anteriores, dizemos que ao menos dentro das aproximações que consideramos, o operador densidade do sistema após duas colisões é o mesmo tanto para a evolução com um entorno correlacionado quanto para um entorno descorrelacionado. Trata-se, portanto, de uma dinâmica Markoviana.

4.2 Entorno correlacionado - além da aproximação de segunda ordem no tempo.

Como vimos, nossa primeira tentativa de observar dinâmica não-Markoviana não teve sucesso. A previsão era que já na segunda colisão teríamos alguma condição de não Markovianidade por conta da correlação no reservatório, mas a natureza peculiar do mapa de decaimento à temperatura finita acaba por não gerar tal dinâmica. Contudo, uma hipótese que precisa ser testada é se os termos de memória existem mas foram descartados por conta das aproximações temporais que fizemos. Devido a isso, vamos variar as aproximações que foram feitas anteriormente já que possivelmente tal característica não Markoviana estaria presente em termos que foram desprezados. Em particular, vamos considerar os seguintes valores para os acoplamentos, já em função de suas unidades fundamentais: $\lambda \approx 1$, $\eta \approx 10^3$ e $t \approx 10^{-6}$, e vamos manter os termos durante o desenvolvimento dos cálculos até o ordem de 10^{-12} tanto no desenvolvimento dos operadores de evolução temporal, produto de operadores de evolução, obtenção de operadores de kraus e finalmente na equações dinâmicas para as colisões respectivas.

Como primeiro passo encontraremos o operador U_{se_n} . Estendendo a expansão da série de Taylor até a nova ordem desejada, obtemos:

$$U_{se_n}(t, 0) = U_{se_n}(t) \approx \mathbb{1}_{4 \times 4} - iH_{se_n}t - \frac{H_{se_n}^2 t^2}{2} + \frac{(-iH_{se_n}t)^3}{3!} + \frac{(-iH_{se_n}t)^4}{4!}. \quad (4.41)$$

Calculamos, então, as potências de H_{se_n}

$$\begin{aligned} H_{se_n} &= \lambda \sigma_s^y \otimes \mathbb{1}_{e_n} + \eta(\sigma_s^- \otimes \sigma_{e_n}^+ + \sigma_s^+ \otimes \sigma_{e_n}^-) \\ H_{se_n}^2 &= \lambda^2 \mathbb{1}_s \otimes \mathbb{1}_{e_n} + \eta \lambda [\mathbb{1}_s \otimes \sigma_{e_n}^y] \\ &\quad + \eta^2 [\sigma_s^- \sigma_s^+ \otimes \sigma_{e_n}^+ \sigma_{e_n}^- + \sigma_s^+ \sigma_s^- \otimes \sigma_{e_n}^- \sigma_{e_n}^+] \\ H_{se_n}^3 &= \lambda^3 \sigma_s^y \otimes \mathbb{1}_{e_n} \\ &\quad + \lambda^2 \eta (2\sigma_s^+ \otimes \sigma_{e_n}^- + 2\sigma_s^- \otimes \sigma_{e_n}^+ - \sigma_s^- \otimes \sigma_{e_n}^- - \sigma_s^+ \otimes \sigma_{e_n}^+) \\ &\quad + \lambda \eta^2 \sigma_s^y \otimes \mathbb{1}_{e_n} + \eta^3 (\sigma_s^- \otimes \sigma_{e_n}^+ + \sigma_s^+ \otimes \sigma_{e_n}^-) \\ H_{se_n}^4 &= \lambda^4 \mathbb{1}_s \otimes \mathbb{1}_{e_n} + 2\lambda^3 \eta \mathbb{1}_s \otimes \sigma_{e_n}^y + \lambda \eta^3 \mathbb{1}_s \otimes \sigma_{e_n}^y \\ &\quad + \eta^4 (\sigma_s^+ \sigma_s^- \otimes \sigma_{e_n}^- \sigma_{e_n}^+ + \sigma_s^- \sigma_s^+ \otimes \sigma_{e_n}^+ \sigma_{e_n}^-) \\ &\quad + \lambda^2 \eta^2 (2\sigma_s^+ \sigma_s^- \otimes \sigma_{e_n}^- \sigma_{e_n}^+ + 2\sigma_s^- \sigma_s^+ \otimes \sigma_{e_n}^+ \sigma_{e_n}^- + \mathbb{1}_s \otimes \mathbb{1}_{e_n}) \end{aligned} \quad (4.42)$$

as quais, substituindo na equação (4.42) nos permitem expressar o operador de evolução temporal da seguinte maneira

$$\begin{aligned} U_{se_n} &= \underbrace{\mathbb{1}_s \otimes \mathbb{1}_{e_n}}_A \underbrace{-it[\lambda \sigma_s^y \otimes \mathbb{1}_{e_n} + \eta(\sigma_s^- \otimes \sigma_{e_n}^+ + \sigma_s^+ \otimes \sigma_{e_n}^-)]}_B \\ &\quad - \underbrace{\frac{t^2}{2}[\lambda^2 \mathbb{1}_s \otimes \mathbb{1}_{e_n} + \lambda \eta \mathbb{1}_s \otimes \sigma_{e_n}^y + \eta^2(\sigma_s^+ \sigma_s^- \otimes \sigma_{e_n}^- \sigma_{e_n}^+ + \sigma_s^- \sigma_s^+ \otimes \sigma_{e_n}^+ \sigma_{e_n}^-)]}_C \\ &\quad + \underbrace{\frac{it^3}{6}[\lambda \eta^2 \sigma_s^y \otimes \mathbb{1}_{e_n} + \eta^3(\sigma_s^- \otimes \sigma_{e_n}^+ + \sigma_s^+ \otimes \sigma_{e_n}^-)]}_D \\ &\quad + \underbrace{\frac{\eta^4 t^4}{24}[\sigma_s^+ \sigma_s^- \otimes \sigma_{e_n}^- \sigma_{e_n}^+ + \sigma_s^- \sigma_s^+ \otimes \sigma_{e_n}^+ \sigma_{e_n}^-]}_F \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde já desprezamos os termos de ordem superior a 10^{-12} , tais como $\lambda^3 t^3 \sim 10^{-18}$. Como na secção anterior, o termo n indica as equações para a interação de S com uma ancilla

E_n . Como estamos calculando para o caso da primeira interação e sabe-se que não há correlação entre sistema S com E_n inicialmente nem entre cada ancilla do entorno E , então, a equação dinâmica para essa colisão é dada pela equação (4.9) e a forma dos operadores de Kraus é dada por (4.10) mas agora usaremos (4.43) em (4.10) para assim encontrar as formas dos operadores de Kraus considerando a nova consideração nesta tentativa

$$\begin{aligned}
K_1(t) &= \sqrt{P_0} \left[\mathbb{1}_s - i\lambda t \sigma_s^y - \frac{\lambda^2 t^2}{2} \mathbb{1}_s - \frac{\eta^2 t^2}{2} \sigma_s^+ \sigma_s^- + \frac{i\lambda \eta^2 t^3}{6} \sigma_s^y + \frac{\eta^4 t^4}{24} \sigma_s^+ \sigma_s^- \right] \\
K_1^\dagger(t) &= \sqrt{P_0} \left[\mathbb{1}_s + i\lambda t \sigma_s^y - \frac{\lambda^2 t^2}{2} \mathbb{1}_s - \frac{\eta^2 t^2}{2} \sigma_s^+ \sigma_s^- - \frac{i\lambda \eta^2 t^3}{6} \sigma_s^y + \frac{\eta^4 t^4}{24} \sigma_s^+ \sigma_s^- \right] \\
K_2(t) &= \sqrt{P_0} i \left[-t \eta \sigma_s^- + \frac{\lambda \eta t^2}{2} \mathbb{1}_s + \frac{\eta^3 t^3}{6} \sigma_s^- \right] \\
K_2^\dagger(t) &= -\sqrt{P_0} i \left[-t \eta \sigma_s^+ + \frac{\lambda \eta t^2}{2} \mathbb{1}_s + \frac{\eta^3 t^3}{6} \sigma_s^+ \right]
\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}
K_3(t) &= \sqrt{P_1} i \left[-t \eta \sigma_s^+ - \frac{\lambda \eta t^2}{2} \mathbb{1}_s + \frac{\eta^3 t^3}{6} \sigma_s^+ \right] \\
K_3^\dagger(t) &= -\sqrt{P_1} i \left[-t \eta \sigma_s^- - \frac{\lambda \eta t^2}{2} \mathbb{1}_s + \frac{\eta^3 t^3}{6} \sigma_s^- \right] \\
K_4(t) &= \sqrt{P_1} \left[\mathbb{1}_s - i\lambda t \sigma_s^y - \frac{\lambda^2 t^2}{2} \mathbb{1}_s - \frac{\eta^2 t^2}{2} \sigma_s^- \sigma_s^+ + \frac{i\lambda \eta^2 t^3}{6} \sigma_s^y + \frac{\eta^4 t^4}{24} \sigma_s^- \sigma_s^+ \right] \\
K_4^\dagger(t) &= \sqrt{P_1} \left[\mathbb{1}_s + i\lambda t \sigma_s^y - \frac{\lambda^2 t^2}{2} \mathbb{1}_s - \frac{\eta^2 t^2}{2} \sigma_s^- \sigma_s^+ - \frac{i\lambda \eta^2 t^3}{6} \sigma_s^y + \frac{\eta^4 t^4}{24} \sigma_s^- \sigma_s^+ \right]
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Uma rápida inspeção confirma que tais operadores seguem respeitando a condição CPTP.

Usando esses operadores, a equação dinâmica após a primeira colisão se reduz a

$$\begin{aligned}
\rho_s(t) = & (1 - \lambda^2 t^2) \rho_s(0) - i\lambda t \left(1 - \frac{\eta^2 t^2}{6}\right) [\sigma_s^y; \rho_s(0)] \\
& - \frac{\eta^2 t^2}{2} \left(1 - \frac{\eta^2 t^2}{12}\right) [P_0 \{\sigma_s^+ \sigma_s^-; \rho_s(0)\} + P_1 \{\sigma_s^- \sigma_s^+; \rho_s(0)\}] \\
& + \frac{\eta^4 t^4}{4} (P_0 \sigma_s^+ \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ \sigma_s^- + P_1 \sigma_s^- \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- \sigma_s^+) + \lambda^2 t^2 \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^y \\
& + \eta^2 t^2 \left(1 - \frac{\eta^2 t^2}{3}\right) [P_0 \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ + P_1 \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^-] \\
& - \frac{\lambda \eta^2 t^3}{2} [P_0 (\rho_s(0) \sigma_s^+ + \sigma_s^- \rho_s(0)) - P_1 (\rho_s(0) \sigma_s^- + \sigma_s^+ \rho_s(0))] \\
& - \frac{i\lambda \eta^2 t^3}{2} [P_0 (\sigma_s^+ \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^y - \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^+ \sigma_s^-) + P_1 (\sigma_s^- \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^y - \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^- \sigma_s^+)].
\end{aligned} \tag{4.45}$$

De posse de $\rho_s(t)$ (após a primeira colisão), passamos aos cálculos para a segunda colisão, novamente considerando dois casos para o entorno: *Correlacionado e Não-Correlacionado*. Calculamos primeiro o operador $U_{se_2e_1}(2t) = U_{se_2}(t)U_{se_1}(t)$ usando a equação (4.43) onde obtemos uma equação semelhante a

$$U_{se_2e_1}(2t) = (A + B + C + D + F).(A' + B' + C' + D' + F') \tag{4.46}$$

onde os termos A, B, C, D, F estão relacionados com o operador $U_{se_2}(t)$ e os termos A', B', C', D', F' com o operador $U_{se_1}(t)$. Podemos, então, usando o resultado de (4.46) e (4.28), escrever a forma dos operadores de Kraus para o caso correlacionado:

$$\begin{aligned}
K_1(t) &= \sqrt{P_0} \left[-it\eta\sigma_s^- + i\eta\lambda\frac{t^2}{2}\mathbb{1}_s + i\frac{2}{3}\eta^3 t^3 \sigma_s^- + i\lambda\eta t^2 \sigma_s^- \sigma_s^+ \right] \\
K_1^\dagger(t) &= \sqrt{P_0} \left[it\eta\sigma_s^+ - i\eta\lambda\frac{t^2}{2}\mathbb{1}_s - i\frac{2}{3}\eta^3 t^3 \sigma_s^+ - i\lambda\eta t^2 \sigma_s^- \sigma_s^+ \right] \\
K_2(t) &= \sqrt{P_0} \left[(1 - 2\lambda^2 t^2)\mathbb{1}_s - 2i\lambda t \sigma_s^y + \frac{\eta^4 t^4}{3} \sigma_s^+ \sigma_s^- - \eta^2 t^2 \sigma_s^+ \sigma_s^- + i\lambda \frac{\eta^2 t^3}{3} \sigma_s^y + i\lambda \frac{\eta^2 t^3}{2} \sigma_s^y \right] \\
K_2^\dagger(t) &= \sqrt{P_0} \left[(1 - 2\lambda^2 t^2)\mathbb{1}_s + 2i\lambda t \sigma_s^y + \frac{\eta^4 t^4}{3} \sigma_s^+ \sigma_s^- - \eta^2 t^2 \sigma_s^+ \sigma_s^- - i\lambda \frac{\eta^2 t^3}{3} \sigma_s^y - i\lambda \frac{\eta^2 t^3}{2} \sigma_s^y \right]
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
K_3(t) &= \sqrt{P_0} \left[-i\eta t \sigma_s^- + i\lambda \eta t^2 \sigma_s^+ \sigma_s^- + i\lambda \eta \frac{t^2}{2} \mathbb{1}_s + i \frac{\eta^3 t^3}{6} \sigma_s^- \right] \\
K_3^\dagger(t) &= \sqrt{P_0} \left[i\eta t \sigma_s^+ - i\lambda \eta t^2 \sigma_s^+ \sigma_s^- - i\lambda \eta \frac{t^2}{2} \mathbb{1}_s - i \frac{\eta^3 t^3}{6} \sigma_s^+ \right]
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
K_4(t) &= \sqrt{P_0} \left[\lambda \eta^2 t^3 \sigma_s^- \right] \\
K_4^\dagger(t) &= \sqrt{P_0} \left[\lambda \eta^2 t^3 \sigma_s^+ \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_5(t) &= \sqrt{P_1} \left[-i\eta t \sigma_s^+ - i\lambda \eta t^2 \sigma_s^- \sigma_s^+ - i\lambda \eta \frac{t^2}{2} \mathbb{1}_s + i \frac{\eta^3 t^3}{6} \sigma_s^+ \right] \\
K_5^\dagger(t) &= \sqrt{P_1} \left[i\eta t \sigma_s^- + i\lambda \eta t^2 \sigma_s^- \sigma_s^+ + i\lambda \eta \frac{t^2}{2} \mathbb{1}_s - i \frac{\eta^3 t^3}{6} \sigma_s^- \right]
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
K_6(t) &= \sqrt{P_1} \left[-\lambda \eta^2 t^3 \sigma_s^+ \right] \\
K_6^\dagger(t) &= \sqrt{P_1} \left[-\lambda \eta^2 t^3 \sigma_s^- \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_7(t) &= \sqrt{P_1} \left[-i\eta t \sigma_s^+ - i\eta \lambda \frac{t^2}{2} \mathbb{1}_s + i \frac{2}{3} \eta^3 t^3 \sigma_s^+ - i\lambda \eta t^2 \sigma_s^+ \sigma_s^- \right] \\
K_7^\dagger(t) &= \sqrt{P_1} \left[i\eta t \sigma_s^- + i\eta \lambda \frac{t^2}{2} \mathbb{1}_s - i \frac{2}{3} \eta^3 t^3 \sigma_s^- + i\lambda \eta t^2 \sigma_s^+ \sigma_s^- \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_8(t) &= \sqrt{P_1} \left[(1 - 2\lambda^2 t^2) \mathbb{1}_s - 2i\lambda t \sigma_s^y + \frac{\eta^4 t^4}{3} \sigma_s^- \sigma_s^+ - \eta^2 t^2 \sigma_s^- \sigma_s^+ + i\lambda \frac{\eta^2 t^3}{3} \sigma_s^y + i\lambda \frac{\eta^2 t^3}{2} \sigma_s^y \right] \\
K_8^\dagger(t) &= \sqrt{P_1} \left[(1 - 2\lambda^2 t^2) \mathbb{1}_s + 2i\lambda t \sigma_s^y + \frac{\eta^4 t^4}{3} \sigma_s^- \sigma_s^+ - \eta^2 t^2 \sigma_s^- \sigma_s^+ - i\lambda \frac{\eta^2 t^3}{2} \sigma_s^y - i\lambda \frac{\eta^2 t^3}{3} \sigma_s^y \right]
\end{aligned} \tag{4.47}$$

A partir desses operadores (4.47), o estado do sistema após duas colisões com um entorno correlacionado é dado por equação (4.26).-

$$\rho_s(2t)_{corre} = P_0 T_1 + P_1 T_2 \tag{4.48}$$

onde as expressões de T_1 e T_2 foram obtidas por os operadores de Kraus (4.47) junto com as equações (4.25) e (4.28)

$$\begin{aligned}
T_1 = & \eta^2 t^2 \left(2 - \frac{5}{3} \eta^2 t^2 \right) \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ - i \lambda t \left(2 - \frac{5}{6} \eta^2 t^2 \right) [\sigma_s^y; \rho_s(0)] \\
& + (1 - 4\lambda^2 t^2) \rho_s(0) - \eta^2 t^2 \left(1 - \frac{\eta^2 t^2}{3} \right) \{ \sigma_s^+ \sigma_s^-; \rho_s(0) \} \\
& + \eta^4 t^4 \sigma_s^+ \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ \sigma_s^- + 4\lambda^2 t^2 \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^y \\
& - 2\lambda \eta^2 t^3 (\rho_s(0) \sigma_s^+ + \sigma_s^- \rho_s(0)) \\
& - 2i\lambda \eta^2 t^3 (\sigma_s^+ \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^y - \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^+ \sigma_s^-)
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
T_2 = & \eta^2 t^2 \left(2 - \frac{5}{3} \eta^2 t^2 \right) \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- - i \lambda t \left(2 - \frac{5}{6} \eta^2 t^2 \right) [\sigma_s^y; \rho_s(0)] \\
& + (1 - 4\lambda^2 t^2) \rho_s(0) - \eta^2 t^2 \left(1 - \frac{\eta^2 t^2}{3} \right) \{ \sigma_s^- \sigma_s^+; \rho_s(0) \} \\
& + \eta^4 t^4 \sigma_s^- \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- \sigma_s^+ + 4\lambda^2 t^2 \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^y \\
& + 2\lambda \eta^2 t^3 (\rho_s(0) \sigma_s^- + \sigma_s^+ \rho_s(0)) \\
& - 2i\lambda \eta^2 t^3 (\sigma_s^- \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^y - \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^- \sigma_s^+)
\end{aligned} \tag{4.50}$$

com o anterior a equação de estado de nosso Qubit após da segunda colisão é determinada inserindo (4.49), (4.50) em (4.48).-

$$\begin{aligned}
\rho_{s_{corre}}(2t) = & (1 - 4\lambda^2 t^2) \rho_s(0) - i \lambda t \left(2 - \frac{5\eta^2 t^2}{6} \right) [\sigma_s^y; \rho_s(0)] \\
& - \eta^2 t^2 \left(1 - \frac{\eta^2 t^2}{3} \right) [P_0 \{ \sigma_s^+ \sigma_s^-; \rho_s(0) \} + P_1 \{ \sigma_s^- \sigma_s^+; \rho_s(0) \}] \\
& + \eta^2 t^2 \left(2 - \frac{5\eta^2 t^2}{3} \right) [P_0 \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ + P_1 \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^-] \\
& + 4\lambda^2 t^2 \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^y \\
& + \eta^4 t^4 (P_0 \sigma_s^+ \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ \sigma_s^- + P_1 \sigma_s^- \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- \sigma_s^+) \\
& - 2\lambda \eta^2 t^3 [P_0 (\rho_s(0) \sigma_s^+ + \sigma_s^- \rho_s(0)) - P_1 (\rho_s(0) \sigma_s^- + \sigma_s^+ \rho_s(0))] \\
& - 2i\lambda \eta^2 t^3 [P_0 (\sigma_s^+ \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^y - \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^+ \sigma_s^-) + P_1 (\sigma_s^- \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^y - \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^- \sigma_s^+)]
\end{aligned} \tag{4.51}$$

O passo seguinte é encontrar o estado de $\rho_s(2t)$ quando o entorno não está correlacionado. Neste desenvolvimento, usamos o seguinte estado descorrelacionado das duas primeiras ancillas:

$$\begin{aligned}\rho_{e_1}(0) \otimes \rho_{e_2}(0) &= (P_0 |0\rangle\langle 0| + P_1 |1\rangle\langle 1|) \otimes (P_0 |0\rangle\langle 0| + P_1 |1\rangle\langle 1|) \\ \rho_{e_1}(0) \otimes \rho_{e_2}(0) &= P_0^2 |00\rangle\langle 00| + P_1^2 |11\rangle\langle 11| + P_0 P_1 |01\rangle\langle 01| + P_1 P_0 |10\rangle\langle 10|\end{aligned}\tag{4.52}$$

Note que, tal qual no caso correlacionado, tomando o traço parcial sobre uma ancilla, encontramos sempre o mesmo estado quântico para a outra. Ou seja, qualquer efeito não-Markoviano tem de vir exclusivamente da correlação entre as ancillas. Levando em conta o novo estado do entorno, calculamos os correspondentes operadores de Kraus e, usando a representação de Kraus, obtemos a equação dinâmica de $\rho_{snao\text{corre}}(2t)$ dada por

$$\begin{aligned}\rho_{snao\text{corre}}(2t) &= Tr_{e_2 e_1} \{ U_{se_2}(t) U_{se_1}(t) [\rho_s(0) \otimes (\rho_{e_1}(0) \otimes \rho_{e_2}(0))] U_{se_1}^\dagger(t) U_{se_2}^\dagger(t) \} \\ \rho_{snao\text{corre}}(2t) &= P_0^2 \underbrace{\sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \langle kl | U_{se_2 e_1}(2t) | 00 \rangle \rho_s(0) \langle 00 | U_{se_2 e_1}^\dagger(2t) | kl \rangle}_{T_1} + \\ & P_1^2 \underbrace{\sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \langle kl | U_{se_2 e_1}(2t) | 11 \rangle \rho_s(0) \langle 11 | U_{se_2 e_1}^\dagger(2t) | kl \rangle}_{T_2} + \\ & P_0 P_1 \underbrace{\sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \langle kl | U_{se_2 e_1}(2t) | 01 \rangle \rho_s(0) \langle 01 | U_{se_2 e_1}^\dagger(2t) | kl \rangle}_{T_3} + \\ & P_1 P_0 \underbrace{\sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \langle kl | U_{se_2 e_1}(2t) | 10 \rangle \rho_s(0) \langle 10 | U_{se_2 e_1}^\dagger(2t) | kl \rangle}_{T_4}\end{aligned}\tag{4.53}$$

baseando-se no desenvolvimento de (4.33) ao (4.40) podemos lembrar que a forma estendida da equação (4.53) tem 16 operadores de Kraus, dos quais os 8 primeiros são da mesma forma que na equação (4.47) apenas trocando os fatores $\sqrt{P_0}, \sqrt{P_1}$ respectivamente por

P_0, P_1 . Os demais operadores de Kraus que surgem são

$$\begin{aligned}
K_9(t) &= \sqrt{P_0 P_1} \left[-\eta^2 t^2 \sigma_s^- \sigma_s^+ + i \frac{\lambda \eta^2 t^3}{2} \sigma_s^y + \frac{\eta^4 t^4}{3} \sigma_s^- \sigma_s^+ \right] \\
K_9^\dagger(t) &= \sqrt{P_0 P_1} \left[-\eta^2 t^2 \sigma_s^- \sigma_s^+ - i \frac{\lambda \eta^2 t^3}{2} \sigma_s^y + \frac{\eta^4 t^4}{3} \sigma_s^- \sigma_s^+ \right] \\
K_{10}(t) &= \sqrt{P_0 P_1} \left[-i \eta t \sigma_s^+ - i \lambda \eta t^2 \sigma_s^- \sigma_s^+ - i \lambda \eta \frac{t^2}{2} \mathbb{1}_s + \frac{2}{3} i \eta^3 t^3 \sigma_s^+ \right] \\
K_{10}^\dagger(t) &= \sqrt{P_0 P_1} \left[i \eta t \sigma_s^- + i \lambda \eta t^2 \sigma_s^- \sigma_s^+ + i \lambda \eta \frac{t^2}{2} \mathbb{1}_s - \frac{2}{3} i \eta^3 t^3 \sigma_s^- \right] \\
K_{11}(t) &= \sqrt{P_0 P_1} \left[(1 - 2\lambda^2 t^2) \mathbb{1}_s - 2i \lambda t \sigma_s^y - \frac{\eta^2 t^2}{2} \mathbb{1}_s + i \frac{\lambda \eta^2 t^3}{3} \sigma_s^y + \lambda \eta^2 t^3 \sigma_s^+ + \frac{\eta^4 t^4}{24} \mathbb{1}_s \right] \\
K_{11}^\dagger(t) &= \sqrt{P_0 P_1} \left[(1 - 2\lambda^2 t^2) \mathbb{1}_s + 2i \lambda t \sigma_s^y - \frac{\eta^2 t^2}{2} \mathbb{1}_s - i \frac{\lambda \eta^2 t^3}{3} \sigma_s^y + \lambda \eta^2 t^3 \sigma_s^- + \frac{\eta^4 t^4}{24} \mathbb{1}_s \right] \\
K_{12}(t) &= \sqrt{P_0 P_1} \left[-i \eta t \sigma_s^- + i \frac{\lambda \eta t^2}{2} \mathbb{1}_s + i \frac{\eta^3 t^3}{6} \sigma_s^- + i \lambda \eta t^2 \sigma_s^- \sigma_s^+ \right] \\
K_{12}^\dagger(t) &= \sqrt{P_0 P_1} \left[i \eta t \sigma_s^+ - i \frac{\lambda \eta t^2}{2} \mathbb{1}_s - i \frac{\eta^3 t^3}{6} \sigma_s^+ - i \lambda \eta t^2 \sigma_s^- \sigma_s^+ \right] \\
K_{13}(t) &= \sqrt{P_1 P_0} \left[(1 - 2\lambda^2 t^2) \mathbb{1}_s - 2i \lambda t \sigma_s^y - \frac{\eta^2 t^2}{2} \mathbb{1}_s + i \frac{\lambda \eta^2 t^3}{3} \sigma_s^y - \lambda \eta^2 t^3 \sigma_s^- + \frac{\eta^4 t^4}{24} \mathbb{1}_s \right] \\
K_{13}^\dagger(t) &= \sqrt{P_1 P_0} \left[(1 - 2\lambda^2 t^2) \mathbb{1}_s + 2i \lambda t \sigma_s^y - \frac{\eta^2 t^2}{2} \mathbb{1}_s - i \frac{\lambda \eta^2 t^3}{3} \sigma_s^y - \lambda \eta^2 t^3 \sigma_s^+ + \frac{\eta^4 t^4}{24} \mathbb{1}_s \right] \\
K_{14}(t) &= \sqrt{P_1 P_0} \left[-i \eta t \sigma_s^+ - i \frac{\lambda \eta t^2}{2} \mathbb{1}_s + i \frac{\eta^3 t^3}{6} \sigma_s^+ - i \lambda \eta t^2 \sigma_s^+ \sigma_s^- \right] \\
K_{14}^\dagger(t) &= \sqrt{P_1 P_0} \left[i \eta t \sigma_s^- + i \frac{\lambda \eta t^2}{2} \mathbb{1}_s - i \frac{\eta^3 t^3}{6} \sigma_s^- + i \lambda \eta t^2 \sigma_s^+ \sigma_s^- \right] \\
K_{15}(t) &= \sqrt{P_1 P_0} \left[-\eta^2 t^2 \sigma_s^+ \sigma_s^- + i \frac{\lambda \eta^2 t^3}{2} \sigma_s^y + \frac{\eta^4 t^4}{3} \sigma_s^+ \sigma_s^- \right] \\
K_{15}^\dagger(t) &= \sqrt{P_1 P_0} \left[-\eta^2 t^2 \sigma_s^+ \sigma_s^- - i \frac{\lambda \eta^2 t^3}{2} \sigma_s^y + \frac{\eta^4 t^4}{3} \sigma_s^+ \sigma_s^- \right] \\
K_{16}(t) &= \sqrt{P_1 P_0} \left[-i \eta t \sigma_s^- + i \lambda \eta t^2 \sigma_s^+ \sigma_s^- + i \lambda \eta \frac{t^2}{2} \mathbb{1}_s + \frac{2}{3} i \eta^3 t^3 \sigma_s^- \right] \\
K_{16}^\dagger(t) &= \sqrt{P_1 P_0} \left[i \eta t \sigma_s^+ - i \lambda \eta t^2 \sigma_s^+ \sigma_s^- - i \lambda \eta \frac{t^2}{2} \mathbb{1}_s - \frac{2}{3} i \eta^3 t^3 \sigma_s^+ \right]
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Como estamos interessados em verificar a eventual diferença entre os casos correlacionado e não-correlacionado e como o segundo caso é semelhante ao primeiro exceto por uma decomposição de Kraus mais extensa, podemos escrever a equação dinâmica de $\rho_{s_{nao_{corre}}}(2t)$ como a soma de dois termos, $\rho_{s_{corre}}(2t) + \rho_{adicional}$ onde, o segundo termo indicaria a possibilidade de uma componente não-Markoviana na dinâmica do sistema. Para poder conferir se existe o termo $\rho_{adicional}$, partimos de (4.53) onde fizemos algumas definições (T_1, T_2, T_3, T_4) para poder fazer as contas o mais simples possível e usando $P_0 + P_1 = 1$ para ter um entendimento dos seguintes passos.-

$$\begin{aligned}\rho_{s_{nao_{corre}}}(2t) &= P_0^2\{T_1\} + P_1^2\{T_2\} + P_0P_1\{T_3\} + P_1P_0\{T_4\} \\ \rho_{s_{nao_{corre}}}(2t) &= P_0(1 - P_1)T_1 + P_1(1 - P_0)T_2 + P_0P_1T_3 + P_1P_0T_4 \\ \rho_{s_{nao_{corre}}}(2t) &= \underbrace{P_0\{T_1\} + P_1\{T_2\}}_{\rho_{s_{corre}}(2t)} \underbrace{- P_0P_1\{T_1 + T_2 - T_3 - T_4\}}_{\rho_{adicional}}\end{aligned}\quad (4.55)$$

as respectivas relações de T_1, T_2 foram expressados em (4.49), (4.50), entanto T_3 e T_4 que foram obtidas da mesma maneira como se calculo T_1, T_2 mas usando os operadores de Kraus definidos anteriormente na equação (4.54) são.-

$$\begin{aligned}T_3 &= \eta^2 t^2 \left(1 - \frac{1}{3} \eta^2 t^2 \right) \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ + \eta^2 t^2 \left(1 - \frac{4}{3} \eta^2 t^2 \right) \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- \\ &\quad - 2i\lambda t \left(1 - \frac{2}{3} \eta^2 t^2 \right) [\sigma_s^y; \rho_s(0)] + (1 - 4\lambda^2 t^2) \rho_s(0) \\ &\quad + \eta^4 t^4 \sigma_s^- \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- \sigma_s^+ + 4\lambda^2 t^2 \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^y - \eta^2 t^2 \left(1 - \frac{1}{3} \eta^2 t^2 \right) \rho_s(0) \\ &\quad - \frac{\lambda \eta^2 t^3}{2} (\rho_s(0) \sigma_s^+ + \sigma_s^- \rho_s(0)) + \frac{\lambda \eta^2 t^3}{2} (\rho_s(0) \sigma_s^- + \sigma_s^+ \rho_s(0)) \\ &\quad - \lambda \eta^2 t^3 (\sigma_s^- \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^+ + \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^- \sigma_s^+) \\ &\quad + \lambda \eta^2 t^3 (\sigma_s^- \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- + \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- \sigma_s^+) \\ &\quad + \lambda \eta^2 t^3 (\sigma_s^+ \rho_s(0) + \rho_s(0) \sigma_s^-)\end{aligned}\quad (4.56)$$

$$\begin{aligned}
T_4 = & \eta^2 t^2 \left(1 - \frac{1}{3} \eta^2 t^2 \right) \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- + \eta^2 t^2 \left(1 - \frac{4}{3} \eta^2 t^2 \right) \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ \\
& - 2i\lambda t \left(1 - \frac{2}{3} \eta^2 t^2 \right) [\sigma_s^y; \rho_s(0)] + (1 - 4\lambda^2 t^2) \rho_s(0) \\
& + \eta^4 t^4 \sigma_s^+ \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ \sigma_s^- + 4\lambda^2 t^2 \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^y - \eta^2 t^2 \left(1 - \frac{1}{3} \eta^2 t^2 \right) \rho_s(0) \\
& - \frac{\lambda \eta^2 t^3}{2} (\rho_s(0) \sigma_s^+ + \sigma_s^- \rho_s(0)) + \frac{\lambda \eta^2 t^3}{2} (\rho_s(0) \sigma_s^- + \sigma_s^+ \rho_s(0)) \\
& - \lambda \eta^2 t^3 (\sigma_s^+ \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ + \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ \sigma_s^-) \\
& + \lambda \eta^2 t^3 (\sigma_s^+ \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^- + \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^+ \sigma_s^-) \\
& - \lambda \eta^2 t^3 (\sigma_s^- \rho_s(0) + \rho_s(0) \sigma_s^+)
\end{aligned} \tag{4.57}$$

inserindo as (4.49), (4.50), (4.56), (4.57) em (4.55) verificamos novamente como na primeira tentativa que .-

$$\rho_{adicional} = 0 \tag{4.58}$$

o que significa que, novamente, e mesmo estendendo a série de Taylor da evolução temporal, temos que

$$\rho_{s_{naocorre}}(2t) = \rho_{s_{corre}}(2t) \tag{4.59}$$

o que significa que a dinâmica do sistema é Markoviana, dentro das nossas aproximações e não depende da presença da correlação que introduzimos no entorno.

4.3 Colisões intermediadas por transformações unitárias locais no sistema

Nos casos anteriores, o sistema evoluía muito pouco entre uma colisão e a seguinte e essa poderia ser a causa do não aparecimento de dinâmica não-Markoviana. Para testar essa hipótese, modificamos a evolução para incluir uma transformação unitária arbitrária M_s no sistema entre cada colisão. O estado do sistema após a primeira colisão segue sendo

$$\rho_s(t) = Tr_{e_1}[U_{se_1}(t)(\rho_s(0) \otimes \rho_{e_1}(0))U_{se_1}^\dagger(t)]. \tag{4.60}$$

Contudo, ao contrário dos casos anteriores, o estado do sistema após a segunda colisão é dado por

$$\rho_s(2t) = Tr_{e_2e_1}[U_{se_2}(t) M_s U_{se_1}(t)(\rho_s(0) \otimes \rho_{e_1e_2}(0))U_{se_1}^\dagger(t) M_s^\dagger U_{se_2}^\dagger(t)]. \quad (4.61)$$

A única mudança para os casos anteriormente estudados é a presença da unitária intermediária. O estado inicial do sistema e entorno segue sendo o mesmo e, novamente, estudaremos ambos os casos: entorno descorrelacionado (4.52) e classicamente correlacionado (4.20) para a segunda ancilla, respectivamente.

Estabelecendo que

$$U_{se_i}(t) = e^{-i\eta \underbrace{(\sigma_s^- \otimes \sigma_{e_i}^+ + \sigma_s^+ \otimes \sigma_{e_i}^-)}_{H_{se_i}} t} \quad (4.62)$$

vemos que, se definirmos os operadores $B_i = (\sigma_s^- \otimes \sigma_{e_i}^+ + \sigma_s^+ \otimes \sigma_{e_i}^-)$ e $A_i = \frac{1 - \sigma_s^z \otimes \sigma_{e_i}^z}{2}$ e percebermos que

$$A_i = B_i^2, \quad A_i^2 = A_i, \quad A_i B_i = B_i \text{ e } B_i^{2n} = A_i \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.63)$$

podemos escrever a expansão em série de Taylor do operador $U_{se_i}(t)$ como

$$U_{se_i}(t) = 1 - A_i + A_i \cos(\eta t) - i B_i \sin(\eta t). \quad (4.64)$$

Essa forma de escrever o operador de colisão facilita os cálculos para a dinâmica de duas colisões, como veremos a seguir. Usando a forma acima, escrevemos a primeira colisão como

$$U_{se_1}(t) = \frac{1}{2} \left[\underbrace{(\mathbb{1}_s \otimes \mathbb{1}_{e_1} + \sigma_s^z \otimes \sigma_{e_1}^z)}_x + \underbrace{(\mathbb{1}_s \otimes \mathbb{1}_{e_1} - \sigma_s^z \otimes \sigma_{e_1}^z)}_y a - \underbrace{2i(\sigma_s^- \otimes \sigma_{e_1}^+ + \sigma_s^+ \otimes \sigma_{e_1}^-)}_z b \right]. \quad (4.65)$$

onde $a = \cos(\eta t)eb = \sin(\eta t)$. A forma de U_{se_1} vai ser útil para fazer as contas para o caso da segunda colisão. Com isso a equação dinâmica da primeira colisão foi determinado pelo mesmo procedimento feito no começo do capítulo, no caso desta primeira colisão fizemos

uso da (4.9) cujo resultado foi.-

$$\begin{aligned} \rho_s(t) = & \frac{1}{4} [(1+a)^2 \rho_s(0) + (1-a)^2 \sigma_s^z \rho_s(0) \sigma_s^z - (1-a^2)(P_0 - P_1) \{ \sigma_s^z; \rho_s(0) \}] \\ & + b^2 (P_0 \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ + P_1 \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^-) \end{aligned} \quad (4.66)$$

os operadores de Kraus necessários para as contas da equação (4.66) foram obtidos por meio da equação (4.10) onde foi inserido (4.65), os quais são para este caso.-

$$\begin{aligned} K_1(t) &= \sqrt{P_0} \left\{ \frac{1}{2} [(\mathbb{1}_s - \sigma_s^z) + a(\mathbb{1}_s + \sigma_s^z)] \right\}, & K_1^\dagger(t) &= \sqrt{P_0} \left\{ \frac{1}{2} [(\mathbb{1}_s - \sigma_s^z) + a(\mathbb{1}_s + \sigma_s^z)] \right\} \\ K_2(t) &= \sqrt{P_0} \{ -ib\sigma_s^- \}, & K_2^\dagger(t) &= \sqrt{P_0} \{ ib\sigma_s^+ \} \\ K_3(t) &= \sqrt{P_1} \{ -ib\sigma_s^+ \}, & K_3^\dagger(t) &= \sqrt{P_1} \{ ib\sigma_s^- \} \\ K_4(t) &= \sqrt{P_1} \left\{ \frac{1}{2} [(\mathbb{1}_s + \sigma_s^z) + a(\mathbb{1}_s - \sigma_s^z)] \right\}, & K_4^\dagger(t) &= \sqrt{P_1} \left\{ \frac{1}{2} [(\mathbb{1}_s + \sigma_s^z) + a(\mathbb{1}_s - \sigma_s^z)] \right\} \end{aligned} \quad (4.67)$$

Novamente, pode-se verificar que $Tr\rho_s(t) = 1$ e $\sum_{j=1}^4 K_j^\dagger K_j = \mathbb{1}$, como deveria ser. O próximo passo é calcular a dinâmica da segunda colisão, dessa vez incluindo uma unitária arbitrária entre as colisões. Queremos conhecer, portanto, $U_{se_2} M_s U_{se_1}$. Usando a forma da equação (4.65), podemos expressar esse termo da seguinte maneira:

$$U_{se_2} M_s U_{se_1} = \frac{1}{4} [(x' + y' + z') M_s (x + y + z)], \quad (4.68)$$

onde (x', y', z') têm a mesma forma que (x, y, z) mas cada um atua numa ancilla diferente, e_2 e e_1 , respetivamente. Começamos pelo cálculo do caso correlacionado. Calculamos os novos operadores de Kraus, os passos que usamos foram os mesmos que na primeira e segunda tentativa, onde tomamos como base a equação (4.28) para determinar os operadores de Kraus correspondentes para este caso mas está vez considerando a unitária extra realizada no sistema como pode-se ver na equação (4.68) ao qual somente inserimos

(4.65), com isso os operadores de Kraus são.-

$$\begin{aligned}
K_1(t) &= \sqrt{P_0} \left\{ \frac{-ib}{2} [(1+a)\sigma_s^- M_s + (a-1)\sigma_s^- M_s \sigma_s^z] \right\} \\
K_1^\dagger(t) &= \sqrt{P_0} \left\{ \frac{ib}{2} [(1+a)M_s^\dagger \sigma_s^+ + (a-1)\sigma_s^z M_s^\dagger \sigma_s^+] \right\} \\
K_2(t) &= \sqrt{P_0} \left\{ \frac{1}{4} [(1+a^2)M_s + (1-a^2)\sigma_s^z M_s \sigma_s^z + (a^2-1)\sigma_s^z M_s + (a^2-1)M_s \sigma_s^z] \right\} \\
K_2^\dagger(t) &= \sqrt{P_0} \left\{ \frac{1}{4} [(1+a^2)M_s^\dagger + (1-a^2)\sigma_s^z M_s^\dagger \sigma_s^z + (a^2-1)M_s^\dagger \sigma_s^z + (a^2-1)\sigma_s^z M_s^\dagger] \right\} \\
K_3(t) &= \sqrt{P_0} \left\{ \frac{-ib}{2} [(1+a)M_s \sigma_s^- + (a-1)\sigma_s^z M_s \sigma_s^-] \right\} \\
K_3^\dagger(t) &= \sqrt{P_0} \left\{ \frac{ib}{2} [(1+a)\sigma_s^+ M_s^\dagger + (a-1)\sigma_s^+ M_s^\dagger \sigma_s^z] \right\} \\
K_4(t) &= \sqrt{P_0} \left\{ -b^2 \sigma_s^- M_s \sigma_s^- \right\} \\
K_4^\dagger(t) &= \sqrt{P_0} \left\{ -b^2 \sigma_s^+ M_s^\dagger \sigma_s^+ \right\}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}
K_5(t) &= \sqrt{P_1} \left\{ \frac{-ib}{2} [(1+a)M_s \sigma_s^+ + (1-a)\sigma_s^z M_s \sigma_s^+] \right\} \\
K_5^\dagger(t) &= \sqrt{P_1} \left\{ \frac{ib}{2} [(1+a)\sigma_s^- M_s^\dagger + (1-a)\sigma_s^- M_s^\dagger \sigma_s^z] \right\} \\
K_6(t) &= \sqrt{P_1} \left\{ -b^2 \sigma_s^+ M_s \sigma_s^+ \right\} \\
K_6^\dagger(t) &= \sqrt{P_1} \left\{ -b^2 \sigma_s^- M_s^\dagger \sigma_s^- \right\} \\
K_7(0) &= \sqrt{P_1} \left\{ \frac{-ib}{2} [(1+a)\sigma_s^+ M_s + (1-a)\sigma_s^+ M_s \sigma_s^z] \right\} \\
K_7^\dagger(0) &= \sqrt{P_1} \left\{ \frac{ib}{2} [(1+a)M_s^\dagger \sigma_s^- + (1-a)\sigma_s^z M_s^\dagger \sigma_s^-] \right\} \\
K_8(t) &= \sqrt{P_1} \left\{ \frac{1}{4} [(1+a^2)M_s + (1-a^2)\sigma_s^z M_s \sigma_s^z + (1-a^2)\sigma_s^z M_s + (1-a^2)M_s \sigma_s^z] \right\} \\
K_8^\dagger(t) &= \sqrt{P_1} \left\{ \frac{1}{4} [(1+a^2)M_s^\dagger + (1-a^2)\sigma_s^z M_s^\dagger \sigma_s^z + (1-a^2)M_s^\dagger \sigma_s^z + (1-a^2)\sigma_s^z M_s^\dagger] \right\}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Note que a expansão acima nos permite não só inserir qualquer unitária no sistema entre as colisões mas também considerar o tempo de colisão que quisermos. Nas secções anteriores, estávamos restritos a colisões de tempo curto, correspondentes a expandir as

funções temporais $\sin(\eta t)$ e $\cos(\eta t)$ e guardando apenas os primeiros termos da expansão. Nesse novo formato, temos o estado após cada colisão para qualquer tempo de colisão que quisermos. Pode-se verificar, também, que o novo mapa se reduz aos casos anteriores nas aproximações adequadas ($M_s = 1$ e $\eta t \ll 1$). Passamos agora a procurar regimes não-Markovianos em função de M_s . Testamos, primeiro, $M_s = \sigma_s^y$ que gera a seguinte dinâmica para duas colisões:

$$\begin{aligned}
\rho_{s_{corre}}(2t) = & a^2 \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^y \\
& + a^2 b^2 (P_0 \sigma_s^+ \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ \sigma_s^- + P_1 \sigma_s^- \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- \sigma_s^+) \\
& + b^2 (P_0 \sigma_s^- \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- \sigma_s^+ + P_1 \sigma_s^+ \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ \sigma_s^-) \\
& + b^4 (P_0 \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ + P_1 \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^-)
\end{aligned} \tag{4.70}$$

o procedimento feito para o calculo de (4.70) foi da mesma maneira que na primeira e segunda tentativa que pode-se principalmente ver nas equações (4.25) ao (4.30) com os correspondentes operadores de Kraus de (4.69) para $M_s = \sigma_s^y$

$$\begin{aligned}
K_1(t) = K_1^\dagger(t) = \sqrt{P_0} b \sigma_s^- \sigma_s^+ & , K_2(t) = K_2^\dagger(t) = \sqrt{P_0} a \sigma_s^y \\
K_3(t) = K_3^\dagger(t) = -ab \sqrt{P_0} \sigma_s^+ \sigma_s^- & , K_4(t) = ib^2 \sqrt{P_0} \sigma_s^- , K_4^\dagger(t) = -ib^2 \sqrt{P_1} \sigma_s^+ , \\
K_5(t) = K_5^\dagger(t) = \sqrt{P_1} ab \sigma_s^- \sigma_s^+ & , K_6(t) = -ib^2 \sqrt{P_1} \sigma_s^+ , K_6^\dagger(t) = ib^2 \sqrt{P_1} \sigma_s^- \\
K_7(t) = K_7^\dagger(t) = \sqrt{P_1} b \sigma_s^+ \sigma_s^- & , K_8(t) = K_8^\dagger(t) = \sqrt{P_1} a \sigma_s^y
\end{aligned} \tag{4.71}$$

e os respectivos valores de T_1 e T_2 cujas definições estão em (4.25) e (4.28), obtemos.-

$$T_1 = b^4 \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ + b^2 \sigma_s^- \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- \sigma_s^+ + a^2 b^2 \sigma_s^+ \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ \sigma_s^- + a^2 \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^y \tag{4.72}$$

$$T_2 = b^4 \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- + b^2 \sigma_s^+ \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ \sigma_s^- + a^2 b^2 \sigma_s^- \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- \sigma_s^+ + a^2 \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^y \tag{4.73}$$

das equações (4.70) e (4.71) se cumpre as condições de CPTP.

Uma forma rápida para ter noção de que se já estamos no regime Markoviano, é por meio da distancia do traço, para isso fazemos uso da teoria feita no capitulo 2. Então, o

primeiro será estabelecer dois estados iniciais ótimos para tal medição que serão.-

$$\rho_s^0(0) = |0\rangle\langle 0|, \rho_s^1(0) = |1\rangle\langle 1| \quad (4.74)$$

agora, somente substituímos (4.74) em (4.66) e (4.70), respectivamente, que são os estados da primeira e segunda colisão correlacionado já que supostamente deveríamos gerar dinâmica não Markoviana com entorno(ancillas) correlacionado que são os estados da primeira e segunda colisão.-

$$\begin{aligned} \rho_s^1(t) &= [1 - b^2 P_0] \sigma_s^+ \sigma_s^- + b^2 P_0 \sigma_s^- \sigma_s^+ \\ \rho_s^0(t) &= [a^2 + b^2 P_0] \sigma_s^- \sigma_s^+ + b^2 P_1 \sigma_s^+ \sigma_s^- \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} \rho_s^1(2t)_{corre} &= [a^2 + b^4 P_0] \sigma_s^- \sigma_s^+ + b^2 [1 - b^2 P_0] \sigma_s^+ \sigma_s^- \\ \rho_s^0(2t)_{corre} &= b^2 [1 - b^2 P_1] \sigma_s^- \sigma_s^+ + [a^2 + b^4 P_1] \sigma_s^+ \sigma_s^- \end{aligned} \quad (4.76)$$

Tendo os estados de cada colisão $t, 2t$ para cada estado inicial dado por (4.74), determinamos a distancia entre estados de uma mesma colisão definida por.-

$$D(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} Tr[|\rho - \sigma|] = \frac{1}{2} \sqrt{(\rho - \sigma)^2} = \frac{1}{2} \sum_k \lambda_k \quad (4.77)$$

a (4.77) é valida somente se ρ, σ são operadores hermitianos e que λ_k são os autovalores do operador $(\rho - \sigma)$, de acordo com está definição a distancia para as colisões são as seguintes já que segundo (4.75) e (4.76) são hermitianos.-

$$\begin{aligned} D(\rho_s^1(t), \rho_s^0(t)) &= a^2 \\ D(\rho_s^1(2t)_{corre}, \rho_s^0(2t)_{corre}) &= a^4 \end{aligned} \quad (4.78)$$

usando a teoria feita no capitulo 2 e como pode-se ver na referencia [29] que se a variação entre as distancias entre dois instantes de tempo decresce estaríamos no regime Markoviano, do contrario, estaríamos no regime não Markoviano.-

$$\begin{aligned} \Delta D &= D(\rho_s^1(2t)_{corre}, \rho_s^0(2t)_{corre}) - D(\rho_s^1(t), \rho_s^0(t)) = a^2(a^2 - 1) \\ a &= \cos \eta t, \quad -1 \leq \cos \leq 1 \Rightarrow \Delta D \leq 0 \end{aligned} \quad (4.79)$$

segundo (4.79) verificou-se que estamos dentro de um regime Markoviano. Então, Tendo uma ideia de que possivelmente estamos ainda no regime markoviano. Vamos continuar o mesmo procedimento feito nas tentativas anteriores para assim ter uma maior certeza em relação à markovianidade.

De posse de obter $\rho_{s_{corre}}(2t)$, o passo seguinte é encontrar $\rho_{s_{naocorre}}(2t)$ para compará-los. Novamente, então, baseando-se desde as equações (4.32) ao (4.40) para um correto entendimento de como foi feito as seguintes equações. Tendo em conta o dito, os 8 primeiros operadores de Kraus são da mesma forma que na (4.71) apenas trocando-se $\sqrt{P_0}, \sqrt{P_1}$ por P_0, P_1 . Os operadores restantes foram obtidos da mesma forma que na primeira e segunda tentativa, é dizer por exemplo usando (4.33) estendida como em (4.28) mas agora usando (4.68)

$$\begin{aligned}
K_9(t) &= \sqrt{P_0 P_1} \{ -b^2 \sigma_s^- M_s \sigma_s^+ \} \\
K_9^\dagger(t) &= \sqrt{P_0 P_1} \{ -b^2 \sigma_s^- M_s^\dagger \sigma_s^+ \} \\
K_{10}(t) &= \sqrt{P_0 P_1} \left\{ \frac{-ib}{2} [(1+a) M_s \sigma_s^+ + (a-1) \sigma_s^z M_s \sigma_s^+] \right\} \\
K_{10}(t)^\dagger &= \sqrt{P_0 P_1} \left\{ \frac{ib}{2} [(1+a) \sigma_s^- M_s^\dagger + (a-1) \sigma_s^- M_s^\dagger \sigma_s^z] \right\} \\
K_{11}(t) &= \sqrt{P_0 P_1} \left\{ \frac{1}{4} [(1+a^2) M_s - (1-a^2) \sigma_s^z M_s \sigma_s^z + (a^2-1) \sigma_s^z M_s + (1-a^2) M_s \sigma_s^z] \right\} \\
K_{11}^\dagger(t) &= \sqrt{P_0 P_1} \left\{ \frac{1}{4} [(1+a^2) M_s^\dagger - (1-a^2) \sigma_s^z M_s^\dagger \sigma_s^z + (a^2-1) M_s^\dagger \sigma_s^z + (1-a^2) \sigma_s^z M_s^\dagger] \right\} \\
K_{12}(t) &= \sqrt{P_0 P_1} \left\{ \frac{-ib}{2} [(1+a) \sigma_s^- M_s + (1-a) \sigma_s^- M_s \sigma_s^z] \right\} \\
K_{12}^\dagger(t) &= \sqrt{P_0 P_1} \left\{ \frac{ib}{2} [(1+a) M_s^\dagger \sigma_s^+ + (1-a) \sigma_s^z M_s^\dagger \sigma_s^+] \right\} \\
K_{13}(t) &= \sqrt{P_1 P_0} \left\{ \frac{1}{4} [(1+a^2) M_s - (1-a^2) \sigma_s^z M_s \sigma_s^z + (1-a^2) \sigma_s^z M_s - (1-a^2) M_s \sigma_s^z] \right\} \\
K_{13}^\dagger(t) &= \sqrt{P_1 P_0} \left\{ \frac{1}{4} [(1+a^2) M_s^\dagger - (1-a^2) \sigma_s^z M_s^\dagger \sigma_s^z + (1-a^2) M_s^\dagger \sigma_s^z - (1-a^2) \sigma_s^z M_s^\dagger] \right\} \\
K_{14}(0) &= \sqrt{P_1 P_0} \left\{ \frac{-ib}{2} [(1+a) \sigma_s^+ M_s - (1-a) \sigma_s^+ M_s \sigma_s^z] \right\} \\
K_{14}^\dagger(0) &= \sqrt{P_1 P_0} \left\{ \frac{ib}{2} [(1+a) M_s^\dagger \sigma_s^- - (1-a) \sigma_s^z M_s^\dagger \sigma_s^-] \right\}
\end{aligned} \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned}
K_{15}(t) &= \sqrt{P_1 P_0} \{ -b^2 \sigma_s^+ M_s \sigma_s^- \} \\
K_{15}^\dagger(t) &= \sqrt{P_1 P_0} \{ -b^2 \sigma_s^+ M_s^\dagger \sigma_s^- \} \\
K_{16}(t) &= \sqrt{P_1 P_0} \left\{ \frac{-ib}{2} [(1+a) M_s \sigma_s^- + (1-a) \sigma_s^z M_s \sigma_s^-] \right\} \\
K_{16}^\dagger(t) &= \sqrt{P_1 P_0} \left\{ \frac{ib}{2} [(1+a) \sigma_s^+ M_s^\dagger + (1-a) \sigma_s^+ M_s^\dagger \sigma_s^z] \right\}
\end{aligned} \tag{4.80}$$

substituindo $M_s = \sigma_s^y$ em (4.80) obtemos os operadores restantes, já que os primeiros operadores de Kraus foram obtidos anteriormente, e que juntando ambos obtemos os operadores de kraus correspondentes para este caso de descorrelação.-

$$\begin{aligned}
K_1(t) &= K_1^\dagger(t) = P_0 b \sigma_s^- \sigma_s^+ & , K_2(t) &= K_2^\dagger(t) = P_0 a \sigma_s^y \\
K_3(t) &= K_3^\dagger(t) = -ab P_0 \sigma_s^+ \sigma_s^- & , K_4(t) &= ib^2 P_0 \sigma_s^- , K_4^\dagger(t) = -ib^2 P_1 \sigma_s^+ \\
K_5(t) &= K_5^\dagger(t) = P_1 a b \sigma_s^- \sigma_s^+ & , K_6(t) &= -ib^2 P_1 \sigma_s^+ , K_6^\dagger(t) = ib^2 P_1 \sigma_s^- \\
K_7(t) &= K_7^\dagger(t) = P_1 b \sigma_s^+ \sigma_s^- & , K_8(t) &= K_8^\dagger(t) = P_1 a \sigma_s^y \\
K_9(t) &= K_9^\dagger(t) = 0 \\
K_{10}(t) &= K_{10}^\dagger(t) = \sqrt{P_0 P_1} b \sigma^- \sigma^+ \\
K_{11}(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{P_0 P_1} [(1+a^2) \sigma_s^y + (1-a^2) i \sigma_s^x] \\
K_{11}^\dagger(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{P_0 P_1} [(1+a^2) \sigma_s^y - (1-a^2) i \sigma_s^x] \\
K_{12}(t) &= K_{12}^\dagger(t) = -ab \sqrt{P_0 P_1} \sigma^- \sigma^+ \\
K_{13}(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{P_1 P_0} [(1+a^2) \sigma_s^y - (1-a^2) i \sigma_s^x] , & K_{13}^\dagger(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{P_1 P_0} [(1+a^2) \sigma_s^y + (1-a^2) i \sigma_s^x] \\
K_{14}(t) &= K_{14}^\dagger(t) = ab \sqrt{P_1 P_0} \sigma^+ \sigma^- \\
K_{15}(t) &= K_{15}^\dagger(t) = 0 \\
K_{16}(t) &= K_{16}^\dagger(t) = -b \sqrt{P_1 P_0} \sigma^+ \sigma^-
\end{aligned} \tag{4.81}$$

para calcular o estado $\rho_s(2t)_{nao\ corre}$ fazemos uso de (4.34) que é.-

$$\rho_{s_{nao\ corre}}(2t) = \underbrace{P_0 \{T_1\} + P_1 \{T_2\}}_{\rho_{s_{corre}}(2t)} \underbrace{- P_0 P_1 \{T_1 + T_2 - T_3 - T_4\}}_{\rho_{adicional}} \tag{4.82}$$

precisamos de T_3, T_4 mais para isso o desenvolvilvimento é o mesmo que em (4.38) e (4.39) onde praticamente usamos os operadores de Kraus de (4.81), com todo o falado, temos que .-

$$T_3 = a^2 b^2 \sigma_s^+ \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ \sigma_s^- + b^2 \sigma_s^+ \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ \sigma_s^- + \frac{1}{4} [(1+a^2)^2 \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^y - (1-a^4) i \sigma_s^x \rho_s(0) \sigma_s^y + (1-a^4) i \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^x + (1-a^2)^2 \sigma_s^x \rho_s(0) \sigma_s^x] \quad (4.83)$$

$$T_4 = a^2 b^2 \sigma_s^- \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- \sigma_s^+ + b^2 \sigma_s^- \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- \sigma_s^+ + \frac{1}{4} [(1+a^2)^2 \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^y + (1-a^4) i \sigma_s^x \rho_s(0) \sigma_s^y - (1-a^4) i \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^x + (1-a^2)^2 \sigma_s^x \rho_s(0) \sigma_s^x] \quad (4.84)$$

inserindo (4.72), (4.73), (4.83), e (4.84) em (4.82) obtemos que o estado reduzido do sistema após duas colisões não correlacionadas:

$$\rho_{snaocorre}(2t) = \rho_{scorre}(2t) + \underbrace{-P_0 P_1 \{ b^4 \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ + b^4 \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- + 2a^2 \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^y - \frac{1}{2} [(1+a^2)^2 \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^y + (1-a^2)^2 \sigma_s^x \rho_s(0) \sigma_s^x] \}}_{\rho_{adicional}} \quad (4.85)$$

mas se fazemos uso de (2.7), nosso termo $\rho_{adicional} = 0$ novamente. Então, ainda nos presença-mos dinâmica não Markoviana, uma verificação adicional é que ao aplicar o traço na equação (4.60) obtemos que $Tr \rho_{adicional} = 0 \Rightarrow Tr \rho_{snaocorre}(2t) = 1 = \rho_{scorre}(2t)$ que pode-se dizer que ainda estamos cumprindo a preservação do traço em todas nossas equações reduzidas ate agora. Antes de encerrar, testamos ainda uma outra forma para a unitária local intermediária:

$$M_s = \frac{\mathbb{1} + i \sigma_s^y}{\sqrt{2}} \quad (4.86)$$

A equação dinâmica para a primeira colisão $\rho_s(t)$ não depende de M_s , portanto vale o resultado já obtido anteriormente. Novamente, olhando para o caso de duas colisões, podemos comparar a evolução com e sem correlação no entorno. Os passos são exatamente

os mesmos, e obtemos

$$\begin{aligned}
\rho_{s_{corre}}(2t) = & \frac{(1+a^2)^2}{8}\rho_s(0) + \frac{ia(1+a^2)}{4}[\sigma_s^y; \rho_s(0)] - \frac{(1-a^4)}{8}(P_0 - P_1)\{\sigma_s^z; \rho_s(0)\} \\
& + \frac{a^2}{2}\sigma_s^y\rho_s(0)\sigma_s^y + \frac{1}{8}b^4\sigma_s^z\rho_s(0)\sigma_s^z + \frac{iab^2}{4}[\sigma_s^z\rho_s(0)\sigma_s^y - \sigma_s^y\rho_s(0)\sigma_s^z](P_0 - P_1) \\
& + \frac{b^4}{2}(P_0\sigma_s^-\rho_s(0)\sigma_s^+ + P_1\sigma_s^+\rho_s(0)\sigma_s^-) \\
& + \frac{b^2}{2}\{a^2[P_0(\sigma_s^+\sigma_s^-\rho_s(0)\sigma_s^+\sigma_s^- + \sigma_s^-\rho_s(0)\sigma_s^+) + P_1(\sigma_s^-\sigma_s^+\rho_s(0)\sigma_s^-\sigma_s^+ + \sigma_s^+\rho_s(0)\sigma_s^-)] + \\
& \quad a[P_0(\rho_s(0)\sigma_s^+ + \sigma_s^-\rho_s(0)) - P_1(\rho_s(0)\sigma_s^- + \sigma_s^+\rho_s(0))] + \\
& \quad [P_0(\sigma_s^-\sigma_s^+\rho_s(0)\sigma_s^-\sigma_s^+ + \sigma_s^-\rho_s(0)\sigma_s^+) + P_1(\sigma_s^+\sigma_s^-\rho_s(0)\sigma_s^+\sigma_s^- + \sigma_s^+\rho_s(0)\sigma_s^-)]\} \\
& \quad \quad \quad (4.87)
\end{aligned}$$

cujos operadores de kraus são.-

$$\begin{aligned}
K_1(t) &= \sqrt{P_0}\frac{-ib}{\sqrt{2}}(a\sigma_s^- + \sigma_s^-\sigma_s^+) & , K_1^\dagger(t) &= \sqrt{P_0}\frac{ib}{\sqrt{2}}(a\sigma_s^+ + \sigma_s^-\sigma_s^+) \\
K_2(t) &= \sqrt{P_0}\frac{1}{2\sqrt{2}}[(1+a^2)\mathbb{1}_s + 2ia\sigma_s^y + (a^2-1)\sigma_s^z] \\
K_2^\dagger(t) &= \sqrt{P_0}\frac{1}{2\sqrt{2}}[(1+a^2)\mathbb{1}_s - 2ia\sigma_s^y + (a^2-1)\sigma_s^z] \\
K_3(t) &= \sqrt{P_0}\frac{-ib}{\sqrt{2}}(\sigma_s^- + a\sigma_s^+\sigma_s^-) & , K_3^\dagger(t) &= \sqrt{P_0}\frac{ib}{\sqrt{2}}(\sigma_s^+ + a\sigma_s^+\sigma_s^-) \\
K_4(t) &= -\sqrt{P_0}b^2\frac{\sigma_s^-}{\sqrt{2}} & , K_4^\dagger(t) &= -\sqrt{P_0}b^2\frac{\sigma_s^+}{\sqrt{2}} \\
K_5(t) &= \frac{-ib}{\sqrt{2}}\sqrt{P_1}(\sigma_s^+ - a\sigma_s^-\sigma_s^+) & , K_5^\dagger(t) &= \frac{ib}{\sqrt{2}}\sqrt{P_1}(\sigma_s^- - a\sigma_s^-\sigma_s^+) \\
K_6(t) &= \sqrt{P_1}b^2\frac{\sigma_s^+}{\sqrt{2}} & , K_6^\dagger(t) &= \sqrt{P_1}b^2\frac{\sigma_s^-}{\sqrt{2}} \\
K_7(t) &= \frac{-ib}{\sqrt{2}}\sqrt{P_1}(a\sigma_s^+ - \sigma_s^+\sigma_s^-) & , K_7^\dagger(t) &= \frac{ib}{\sqrt{2}}\sqrt{P_1}(a\sigma_s^- - \sigma_s^+\sigma_s^-) \\
K_8(t) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{P_1}[(1+a^2)\mathbb{1}_s + 2ia\sigma_s^y + (1-a^2)\sigma_s^z] \\
K_8^\dagger(t) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{P_1}[(1+a^2)\mathbb{1}_s - 2ia\sigma_s^y + (1-a^2)\sigma_s^z] \\
& \quad \quad \quad (4.88)
\end{aligned}$$

De fato, fazemos uso novamente da distancia do traço como foi feito no caso meramente anterior de $M_s = \sigma_s^y$, usando (4.74) para assim calcular a distancia para o estado após de

duas colisões correlacionados dada em (4.87), obtemos.-

$$\begin{aligned} \rho_s^0(2t)_{corre} = & \left[\frac{a^2}{2} + b^2 P_0 \right] \sigma_s^- \sigma_s^+ + \left[\frac{a}{2} - ab^2 P_1 \right] \sigma_s^- \\ & + \left[\frac{a}{2} - ab^2 P_1 \right] \sigma_s^+ + \left[\frac{a^2}{2} + b^2 P_1 \right] \sigma_s^+ \sigma_s^- \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} \rho_s^1(2t)_{corre} = & \left[\frac{a^2}{2} + b^2 P_0 \right] \sigma_s^- \sigma_s^+ + \left[-\frac{a}{2} + ab^2 P_0 \right] \sigma_s^- \\ & + \left[-\frac{a}{2} + ab^2 P_0 \right] \sigma_s^+ + \left[\frac{a^2}{2} + b^2 P_1 \right] \sigma_s^+ \sigma_s^- \end{aligned} \quad (4.90)$$

como $\rho_s^1(2t)_{corre}, \rho_s^0(2t)_{corre}$ são hermitianos, então, novamente usamos (4.77).-

$$D(\rho_s^1(2t)_{corre}, \rho_s^0(2t)_{corre}) = a^3 \quad (4.91)$$

e encontrando a diferença com a distância para a primeira colisão dada em (4.78) junto com (4.91).-

$$\Delta D = D(\rho_s^1(2t)_{corre}, \rho_s^0(2t)_{corre}) - D(\rho_s^1(t), \rho_s^0(t))$$

$$\Delta D = a^2(a - 1)$$

$$a = \cos \eta t, \quad -1 \leq \cos \leq 1 \Rightarrow \Delta D \leq 0 \quad (4.92)$$

com o resultado anterior podemos esperar novamente que estamos ainda no regime Markoviano. De modo que, continuamos com a mesma metodologia feita até momento a qual é encontrar $\rho_{adicional}$ para esta tentativa.

Como já temos para o caso correlacionado (4.87), procuramos para o caso não correlacionado da mesma forma como foi feito na tentativa anterior, temos:

$$\begin{aligned} \rho_{snao_{corre}}(2t) = & \rho_{s_{corre}}(2t) + \\ & P_1 P_0 \frac{b^4}{2} \left\{ \frac{1}{2} [-\rho_s(0) + \sigma_s^x \rho_s(0) \sigma_s^x + \sigma_s^y \rho_s(0) \sigma_s^y - \sigma_s^z \rho_s(0) \sigma_s^z] \right. \\ & + (\sigma_s^- \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^- \sigma_s^+ + \sigma_s^+ \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ \sigma_s^- \\ & \left. - \sigma_s^- \rho_s(0) \sigma_s^+ - \sigma_s^+ \rho_s(0) \sigma_s^-] \right\} \end{aligned} \quad (4.93)$$

os operadores de kraus como sabe-se são da equação (4.88) trocando $\sqrt{P_0}\sqrt{P_1} \rightarrow P_0, P_1$, e os operadores restantes .-

$$\begin{aligned}
K_9(t) &= K_9^\dagger(t) = \frac{-b^2}{\sqrt{2}} \sqrt{P_0 P_1} \sigma_s^- \sigma_s^+ \\
K_{10}(t) &= \frac{-ib}{\sqrt{2}} \sqrt{P_0 P_1} (a \sigma_s^+ - \sigma_s^- \sigma_s^+) \quad , K_{10}^\dagger(t) = \frac{ib}{\sqrt{2}} \sqrt{P_0 P_1} (a \sigma_s^- - \sigma_s^- \sigma_s^+) \\
K_{11}(t) &= \sqrt{P_0 P_1} \frac{1}{2\sqrt{2}} [2a \mathbb{1}_s + (1 + a^2) i \sigma_s^y + (a^2 - 1) \sigma_s^x] \\
K_{11}^\dagger(t) &= \sqrt{P_0 P_1} \frac{1}{2\sqrt{2}} [2a \mathbb{1}_s - (1 + a^2) i \sigma_s^y + (a^2 - 1) \sigma_s^x] \\
K_{12}(t) &= \frac{-ib}{\sqrt{2}} \sqrt{P_0 P_1} [\sigma_s^- + a \sigma_s^- \sigma_s^+] \quad , K_{12}^\dagger(t) = \frac{ib}{\sqrt{2}} \sqrt{P_0 P_1} [\sigma_s^+ + a \sigma_s^- \sigma_s^+] \\
K_{13}(t) &= \sqrt{P_1 P_0} \frac{1}{2\sqrt{2}} [2a \mathbb{1}_s + (1 + a^2) i \sigma_s^y + (1 - a^2) \sigma_s^x] \\
K_{13}^\dagger(t) &= \sqrt{P_1 P_0} \frac{1}{2\sqrt{2}} [2a \mathbb{1}_s - (1 + a^2) i \sigma_s^y + (1 - a^2) \sigma_s^x] \\
K_{14}(t) &= \frac{-ib}{\sqrt{2}} \sqrt{P_1 P_0} [\sigma_s^+ - a \sigma_s^+ \sigma_s^-] \quad , K_{14}^\dagger(t) = \frac{ib}{\sqrt{2}} \sqrt{P_1 P_0} [\sigma_s^- - a \sigma_s^+ \sigma_s^-] \\
K_{15}(t) &= K_{15}^\dagger(t) = \frac{-b^2}{\sqrt{2}} \sqrt{P_1 P_0} \sigma_s^+ \sigma_s^- \\
K_{16}(t) &= \frac{-ib}{\sqrt{2}} \sqrt{P_1 P_0} [a \sigma_s^- + \sigma_s^+ \sigma_s^-] \quad , K_{16}^\dagger(t) = \frac{ib}{\sqrt{2}} \sqrt{P_1 P_0} [a \sigma_s^+ + \sigma_s^+ \sigma_s^-]
\end{aligned} \tag{4.94}$$

novamente ao aplicar o traço à equação (4.93) ainda é preservado $Tr \rho_{s_{naocorre}}(2t) = 1$ e que ao substituir (2.7) na parte complementar de (4.93) obtemos que.-

$$\rho_{s_{naocorre}}(2t) = \rho_{s_{corre}}(2t) \tag{4.95}$$

com o anterior ainda estamos no regime Markoviano.

Capítulo 5

Considerações Finais

Nesta dissertação, concentramos nosso estudo na transição de uma dinâmica Markoviana de um Qubit para um regime não-Markoviano através de um modelo colisional (CM) cujo ambiente está formado por ancillas. O sistema de interesse era um qubit assim como as ancillas que formavam o entorno. Nós levantamos em nosso CM todas as considerações mínimas para assim mostrar que podemos gerar uma dinâmica Markoviana representada por uma equação mestra na forma de Lindblad e que pode ser comparada com a dinâmica de um sistema de 2 níveis dentro de um banho em equilíbrio térmico. Com esta comparação, estabelecemos a relevância de nosso modelo que permite o controle da dinâmica simulada a partir da mudança de poucos parâmetros, tais como o estado inicial das ancillas.

A ideia principal era obter a transição dessa dinâmica básica Markoviana para um regime não Markoviano através da hipótese de que apenas correlações no ambiente produzam efeitos de memória no sistema de interesse já na interação com a segunda ancilla do ambiente. Esse efeito foi observado em exemplos anteriores da literatura [23] e [24]. É por essa razão que, para o desenvolvimento de nossa hipótese, definimos um estado correlacionado entre as duas primeiras ancillas a interagir com o sistema, tal que, ao aplicarmos o traço sobre os graus de liberdade da segunda ancilla, não mudássemos a dinâmica Markoviana gerada pela primeira ancilla mas, no momento da segunda interação, a correlação

entre elas pudesse gerar algo que indicasse não Markovianidade. Buscávamos, portanto, uma situação em que o estado gerado no sistema após a segunda colisão fosse igual ao caso decorrelacionado mais um termo extra devido à correlação e que significasse refluxo de informação para o sistema. Nosso procedimento foi encontrar o termo adicional por meio do tratamento de mapas dinâmicos na representação de Kraus, o que está totalmente detalhado na parte teórica do CM.

Fizemos 4 tentativas, das quais as duas primeiras foram baseadas no fato de que o respectivo operador de evolução temporal considerou uma escala de tempo de interação curta enquanto as duas restantes foram feitas de tal forma que o operador de evolução temporal considerasse um tempo qualquer de interação entre sistema e ancillas. Mas sempre sem alterar a característica de nosso modelo que era a comparação com a dinâmica de um sistema de 2 níveis dentro de um banho em equilíbrio térmico. Com as tentativas já definidas e procedimentos feitos, nós não conseguimos chegar à obtenção do termo adicional concluindo que, ao contrário do caso anterior para dinâmicas de spin-flip e defasagem, o tipo de correlação das ancillas que definimos não gera efeitos de memória no sistema. Como perspectiva futura, podemos testar outros tipos de correlações e procurar entender qual a diferença caso apareçam efeitos não Markovianos.

Referências Bibliográficas

- [1] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press , 405 (2010). 1, 2, 6, 7, 8
- [2] Cohen-Tannoudji C., Diu B., Laloe F., *Quantum mechanics. Volume I* , Wiley,(1977). 2
- [3] H.P. Breuer and F.Petruccione, *Theory of Open Quantum Systems*, Adv. in Phys. **44**, 405 (1995). 12
- [4] Giuliano Strini, Giuliano Benenti and Giulio Casati, *Principles of Quantum Computation and Information. Volume I: Basic Concepts* , World Scientific.(2004). 8
- [5] Michel Le Bellac, *Quantum Physics*,Cambridge University Press .(2006).
- [6] E. B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Academic Press, London (1976),. 10
- [7] Ángel Rivas, Susana F. Huelga, *Open Quantum Systems. An Introduction*, Springer Heidelberg Dordrecht London New York (2012). 10, 12, 13
- [8] Giuliano Strini, Giuliano Benenti and Giulio Casati, *Principles of Quantum Computation and Information. Volume II: Basic Tools and Special Topics*, World Scientific.(2007). 18, 20
- [9] Maximilian Schlosshauer, *Decoherence and The Quantum to Classical Transition*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.(2007). 6, 7, 8, 13, 18, 20

- [10] R. Alicki and K.Lendi, *Quantum Dynamical Semigroups and Applications*, Lect. Notes Phys. 286, Springer, Berlin, 1987. 1, 12
- [11] Mohan Sarovar, *Lecture: Open Quantum Systems: Hamiltonian Formulation and Master Equation*, (2014). 2, 18, 20
- [12] Carole Addis, *Teses de Doutorado :Non-Markovian Dynamics Of Open Quantum Systems*, Institute of Photonics and Quantum Sciences School of Engineering and Physical Sciences Heriot-Watt University. (2016). 18, 20
- [13] B. M. Garraway, *Decay of an atom coupled strongly to a reservoir*, Phys. Rev. A **55**, 4636 (1997). 20
- [14] Pieter Kok, Brendon W. Lovett, *Introduction To Optical Quantum Information Processing*, Cambridge University Press, (2010).
- [15] Heinz-Peter Breuer, Elsi-Mari Laine, Jyrki Piilo, and Bassano Vacchini, *Colloquium: Non-Markovian dynamics in open quantum systems*, Rev. Mod. Phys. **88**, 021002 (2016). 15, 16, 20
- [16] Elsi Mari Laine, *Dissertação de Mestrado: Memory Effects in the Dynamics of Open Quantum Systems*, University Of Turku, (2013). 2, 15, 20
- [17] Salvatore Lorenzo, Francesco Ciccarello, G. Massimo Palma , *Composite quantum collision models*, Phys.Rev.A**96**, 032107.(2017). 3, 21
- [18] András Bodor, Lajos Diósi, Zsófia Kallus, and Thomas Konrad, *Structural features of non-Markovian open quantum systems using quantum chains*, Phys.Rev.A **87**, 052113.(2013).
- [19] Silvan Kretschmer, Kimmo Luoma, and Walter T. Strunz, *Collision model for non-Markovian quantum dynamics*, Phys. Rev. A **94**, 012106 (2016). 20

- [20] M.Pezutto, M.Paternostro and Y.Omar *Implications of Non-Markovian dynamics for the Landauer bound*, New J. Phys. **18**, 123018 (2016). 3, 21
- [21] Howard Carmichael, *Lecture:An Open Systems Approach to Quantum Optics*, Université Libre de Bruxelles,(1991). 3
- [22] Lajos Diosi, *A Short Course in Quantum Information Theory* , Springer,(2007). 3
- [23] Nadja K. Bernardes, John P. S. Peterson, Roberto S. Sarthour, Alexandre M. Souza, C. H. Monken, Itzhak Roditi, Ivan S. Oliveira, Marcelo F. Santos , *High Resolution non-Markovianity in NMR*, Scientific Reports volume **6**, Article number: 33945.(2016). 3, 21, 24, 27, 28, 65
- [24] N.K.Bernardes, A.R.R. Carvalho, C.H. Monken, M.F.Santos, *Environmental correlations and Markovian to non-Markovian transitions in collisional models*, Physical Review A. **90**, (2014). 3, 21, 24, 29, 30, 31, 37, 65
- [25] Jonas Maziero *A representação de Kraus para a Dinâmica de Sistemas Quânticos Abertos*, Revista Brasileira de Ensino de Física, **38**, nº2 , e2307 (2016). 3, 10
- [26] Mohan Sarovar, *Lecture: Open Quantum Systems: Quantum Process Formulation*, (2014). 10
- [27] Dariusz Chruściński, Andrzej Kossakowski, Ángel Rivas, *On measures of non-Markovianity: divisibility vs. backflow of information*, Phys.Rev.Lett.A **83**, 052128(2011). 15
- [28] Elsi-Mari Laine, Jyrki Piilo, Heinz-Peter Breuer, *Measure for the Non-Markovianity of Quantum Processes*, Phys. Rev. A. **81**,062115 (2010). 21
- [29] H.-P. Breuer, E.-M. Laine, J. Piilo, *Measure for the Degree of Non-Markovian Behavior of Quantum Processes in Open Systems*, Phys.Rev.Lett. **103**, 210401(2009). 18, 20

- [30] Á. Rivas, S.F. Huelga, and M.B. Plenio, *Entanglement and Non-Markovianity of Quantum Evolutions*, Phys.Rev.Lett. **105**, 050403(2010). 15
- [31] Steffen Wissmann, Antti Karlsson, Elsi-Mari Laine, Jyrki Piilo, Heinz-Peter Breuer, *Optimal State Pairs for Non-Markovian Quantum Dynamics*, Phys.Rev.A **86**, 062108.(2012). 3, 17

Apêndice A

Passos Intermediários dentro do CM para a obtenção de uma equação próxima à ME Lindblad

Para obter a expressão:

$$\Delta\rho_s(t_n) \approx -i[H_s\tau_s + H_{eff}\tau_{se}, \rho_s(t_n)] - \underbrace{Tr_{en}[\{H_{sen}^2, \rho_s(t_n) \otimes \omega\}]}_Y \frac{\tau_{se}^2}{2} + \underbrace{2Tr_{en}[H_{sen}(\rho_s(t_n) \otimes \omega)H_{sen}]}_X \frac{\tau_{se}^2}{2} \quad (A.1)$$

somente lembrando $H_s = ah_s$ e $H_{se} = bh_{se}$ junto com propriedades da operação traço, temos:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{b^2\tau_{se}^2}{2} Tr_{en}[h_{sen}^2(\rho_s(t_n) \otimes \omega) + (\rho_s(t_n) \otimes \omega)h_{sen}^2] \\ &= \frac{b^2\tau_{se}^2}{2} \sum_i [\langle i|h_{sen}^2(\rho_s(t_n) \otimes \omega)|i\rangle + \langle i|h_{sen}^2(\rho_s(t_n) \otimes \omega)|i\rangle], \end{aligned}$$

onde $|i\rangle$ pertence aos graus e liberdade do espaço \mathcal{H}_{e_n} . Usando a equação (3.3) e a regra da completeza

$$\begin{aligned} Y &= \frac{b^2\tau_{se}^2}{2} \sum_{im} [\langle i|h_{sen}h_{sen}(\rho_s(t_n) \otimes p_m|m\rangle\langle m|)|i\rangle + \langle i|(\rho_s(t_n) \otimes p_m|m\rangle\langle m|)h_{sen}h_{sen}|i\rangle] \\ &= \frac{b^2\tau_{se}^2}{2} \sum_{im} [\langle i|h_{sen}h_{sen}\sqrt{p_m}\sqrt{p_m}|m\rangle\rho_s(t_n)\langle m|i\rangle + \langle i|m\rangle\rho_s(t_n)\langle m|\sqrt{p_m}\sqrt{p_m}h_{sen}h_{sen}|i\rangle] \\ &= \frac{b^2\tau_{se}^2}{2} \sum_{in} \sqrt{p_i}\langle i|h_{sen}|n\rangle\sqrt{p_i}\langle i|h_{sen}|n\rangle\rho_s(t_n) + \rho_s(t_n)\sqrt{p_i}\langle i|h_{sen}|n\rangle\sqrt{p_i}\langle i|h_{sen}|n\rangle \\ &= \frac{b^2\tau_{se}^2}{2} \sum_{in} L_{in}L_{in}^\dagger\rho_s(t_n) + \rho_s(t_n)L_{in}L_{in} \end{aligned}$$

$$Y = \frac{b^2 \tau_{se}^2}{2} \sum_{in} \{L_{in} L_{in}^\dagger; \rho_s(t_n)\} \quad (\text{A.2})$$

fazendo agora para $X = \tau_{se}^2 \text{Tr}_{e_n} [H_{se_n}(\rho_s(t_n) \otimes \omega) H_{se_n}]$ temos que .-

$$\begin{aligned} X &= b^2 \tau_{se}^2 \sum_i \langle i | h_{se_n}(\rho_s(t_n) \otimes \underbrace{\omega}_{\sum_m p_m |m\rangle\langle m|}) h_{se_n} | i \rangle \\ &= b^2 \tau_{se}^2 \sum_{im} \sqrt{p_m} \langle i | h_{se_n} | m \rangle \rho_s(t_n) \sqrt{p_m} \langle m | h_{se_n}^\dagger | i \rangle \\ X &= b^2 \tau_{se}^2 \sum_{im} L_{im} \rho_s(t_n) L_{im}^\dagger \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

substituindo em (A.1) as relaoes (A.2), (A.3) obtemos:

$$\Delta \rho_s(t_n) \approx -i [H_s \tau_s + H_{eff} \tau_{se}, \rho_s(t_n)] + b^2 \tau_{se}^2 \left(\sum_{im} L_{im} \rho_s(t_n) L_{im}^\dagger - \frac{1}{2} \{L_{im}^\dagger L_{im}, \rho_s(t_n)\} \right), \quad (\text{A.4})$$

onde

$$L_{im} = \sqrt{p_m} \langle i | h_{se_n} | m \rangle \quad (\text{A.5})$$