



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA

Interações Eletrônicas em Filmes Supercondutores

Daniel Niemeyer Lamarão Costa

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

Orientador: Eduardo Cantera Marino

Coorientador: Van Sérgio Alves

Rio de Janeiro

Novembro de 2016

P436 Costa, Daniel Niemeyer Lamarão
Interações Eletrônicas em Filmes Supercondutores / Daniel Niemeyer Lamarão Costa - Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2016.
xiv, 154f.
Orientador: Eduardo Cantera Marino
Coorientador: Van Sérgio Alves
Tese (doutorado) - UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-graduação em Física, 2016.
Referências Bibliográficas: f. 124-145.
1. Confinamento. 2. Defeitos topológicos. 3. Dualidade eletromagnética. 4. Mecanismos de geração de massa. 5. Teorias de calibre. 6. Teorias efetivas. I. Wotzasek, Clóvis José. II. Guimarães, Marcelo Santos. III. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Física. IV. Abordagem de Julia-Toulouse para condensação de correntes topológicas e aplicações.

Resumo

Interações Eletrônicas em Filmes Supercondutores

Daniel Niemeyer Lamarão Costa

Orientador: Eduardo Cantera Marino

Coorientador: Van Sérgio Alves

Resumo da Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

Os efeitos da interação eletromagnética em filmes supercondutores são estudados, utilizando a teoria da pseudo-eletrodinâmica quântica (pQED). Mostra-se que o campo magnético de uma linha de vórtice perpendicular ao filme supercondutor decai com lei de potência $\propto r^{-3}$ em vez do decaimento exponencial que ocorre em supercondutores tridimensionais, o que caracteriza o efeito Meissner.

Por outro lado, empregando-se um tratamento quântico para esses vórtices obtém-se, para a função de correlação, um decaimento exponencial, caracterizando-se assim um efeito Meissner puramente quântico.

Mostra-se também que existe uma frequência de corte proporcional ao *gap* supercondutor na propagação de ondas eletromagnéticas dentro do filme supercondutor. Esta frequência desaparece acima da temperatura crítica reproduzindo o comportamento conhecido em filmes metálicos.

Palavras-chave: Supercondutividade, sistemas bidimensionais, efeito Meissner, teoria quântica de campos, eletromagnetismo, eletrodinâmica quântica.

Abstract

Electronic Interactions in Superconducting Films

Daniel Niemeyer Lamarão Costa

Advisor: Eduardo Cantera Marino

Coadvisor: Van Sérgio Alves

Abstract da Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

The effects of electromagnetic interactions in superconductor films are studied within the pseudo-quantum electrodynamics framework. It is shown that a classical approach leads to a magnetic field decaying as a power law $\propto r^{-3}$ instead of the exponential behavior associated with the Meissner effect.

When a quantum treatment for the vortices is made, an exponential decay appears in the two vortices correlation function which is called here the quantum Meissner effect.

It is also shown the presence of a cutoff frequency associated with the superconductor gap on the electromagnetic waves propagation.

Keywords: Superconductivity, two-dimensional systems, Meissner effect, quantum field theory, electrodynamics, quantum electrodynamics.

Agradecimentos

Listar agradecimentos aqui, inclusive à agência de fomento que concedeu a bolsa de pós-graduação.

Conteúdo

Sumário	vi
Lista de Figuras	vii
1 Introdução	1
1.1 Sistemas Bidimensionais	1
1.1.1 Filmes Supercondutores	2
1.2 Interações Eletromagnéticas em 2D	3
2 Dos Supercondutores à Teoria de Campos	5
2.1 Supercondutores	5
2.1.1 Uma Breve Revisão Histórica	5
2.1.2 Classificação	8
2.1.3 O Modelo BCS	9
2.1.4 Teoria de Landau-Ginzburg	11
2.1.5 Descrição Lagrangiana	14
2.2 A Pseudo Eletrodinâmica Quântica (pQED)	15
2.2.1 Desenvolvimento	16
2.2.2 Aplicações e Resultados	18
3 A pQED aplicada a supercondutores	19
3.1 A pqed em filmes supercondutores e metálicos	19

3.1.1	Formalismo	19
3.1.2	Resultados	22
3.2	Teoria não relativística	27
3.2.1	Teoria não relativística para um campo escalar	27
3.2.2	Filmes supercondutores	28
4	Efeito Meissner Quântico	32
4.1	O operador quântico de vórtices e suas funções de correlação	32
4.1.1	A teoria quântica dos vórtices	32
4.2	Aplicação aos filmes supercondutores	34
4.2.1	A função de correlação em filmes supercondutores	35
5	Considerações Finais	39
A	Função de correlação de dois vórtices	42
A.1	Cálculo de $\Lambda(x, y; L)$	42
	Referências Bibliográficas	45

Lista de Figuras

2.1	Comportamento físico dos supercondutores do tipo 1 e tipo 2.	9
3.1	Campo magnético em um filme supercondutor para vários valores M referentes à densidades de pares de Cooper diferentes.	24
3.2	Potencial das quasipartículas em um filme supercondutor	25

Capítulo 1

Introdução

O objetivo central desta tese é estudar os efeitos das interações eletromagnéticas em sistemas supercondutores em duas dimensões espaciais. Estes sistemas são de grande interesse tecnológico, e, embora existam vários estudos e experimentos mostrando como a forma, o tamanho e o número de camadas influenciam as propriedades desses filmes supercondutores [14, 24, 12, 29], pouco se sabe sobre como a interação eletromagnéticas afeta o sistema.

1.1 Sistemas Bidimensionais

Entende-se como bidimensionais quaisquer sistemas físicos que dependem apenas dos graus de liberdade do plano. [6].

Existe toda uma área voltada aos chamados filmes finos que são materiais usualmente com espessura da ordem de nanômetros e que possuem interessantes aplicações tecnológicas, onde principalmente filmes semicondutores são usados para aplicações em ótica (células solares, revestimento refletores para espelhos, filmes antireflexivos), em dispositivos magnéticos (SQUIDS, fitas de áudio e vídeo), dispositivos elétricos (filmes isolantes e condutores), eletrônicos (transistores). Filmes semicondutores tem muitas aplicações

em computação [6]. Um apanhado mais geral de aplicações de filmes bidimensionais pode ser encontrado em [27].

Um dos sistemas bidimensionais de grande interesse atual é o grafeno, que é um filme produzido a partir de carbono e que possui espessura atômica. O grafeno foi obtido pela primeira vez em laboratório no ano de 2004 [21]. O grafeno não apresenta uma fase supercondutora.

O interesse nesse material se dá por conta de algumas propriedades muito interessantes, pois se trata de um material muito leve, extremamente resistente e que possui alta condução térmica e elétrica. Muitas dessas propriedades e das aplicações podem ser encontradas em [1], e um estudo mais detalhado sobre as propriedades e demais aspectos do grafeno, neste review [13]. Quanto às aplicações em eletrônica e fotônica podem ser vistas em [8].

1.1.1 Filmes Supercondutores

Desde a década de 1960 tem-se estudado com bastante interesse os filmes supercondutores. Observa-se que as propriedades supercondutoras dos materiais podem diferir bastante conforme se muda a espessura dos objetos [12] e também foi observado em [24] que para uma folha de chumbo, a temperatura da transição para fase supercondutora sofre uma oscilação conforme se muda a espessura do filme. Este aspecto levanta a possibilidade de modificar a característica supercondutora e outras propriedades físicas por meio de um controle preciso dos aspectos físicos do material uma vez que elas são bastante alteradas por conta de mudanças na espessura e tamanho.

Mais recentemente, vem se estudando a transição de fase supercondutor-isolante [29] em sistemas de filmes finos de materiais como $Nb_{0.15}Si_{0.85}$, $MoGe$, entre outros e também para filmes que apresentam supercondutividade a altas temperaturas como TiN . Novamente observa-se que a mudança da espessura do filme, bem como a presença ou não de

desordens no sistema alteram as características da transição como a temperatura em que ela ocorre. Contudo, um aspecto que não é muito estudado é a influência das interações eletromagnéticas nesses filmes.

1.2 Interações Eletromagnéticas em 2D

Para estudar tais sistemas, costuma-se utilizar, como abordagem inicial, as equações de Maxwell para duas dimensões espaciais. Porém, esta forma de estudar os sistemas apresenta um problema que está relacionado ao fato de o campo eletromagnético (EM) também acabar confinado a estas duas dimensões espaciais neste formalismo. O que não corresponde à realidade.

A quantização desta teoria de Maxwell bidimensional leva naturalmente à chamada eletrodinâmica quântica em $(2 + 1)$ dimensões (QED_{2+1}). Contudo, esta teoria não representa a verdadeira interação eletromagnética do sistema, uma vez que na mesma o campo eletromagnético também encontra-se restrito às duas dimensões espaciais (uma vez que parte de uma teoria clássica com esse aspecto), assim como as partículas, o que não ocorre de fato. Isto apresenta algumas consequências importantes. Por exemplo, o potencial eletrostático produzido por uma partícula passa a ser logarítmico em vez do usual potencial coulombiano $\frac{1}{r}$. Além disso, a função de Green do sistema não é mais uma delta de Dirac, como seria esperado, isso tem como consequência o fato de que o sistema deixe de obedecer ao Princípio de Huygens [26].

Faz-se então necessária uma teoria que descreva corretamente o comportamento entre as partículas e o campo EM, isto é, uma teoria que descreva sistemas em que somente essas estão confinadas à duas dimensões espaciais, enquanto este encontra-se em todo o espaço $(3 + 1)D$.

A teoria efetiva que será apresentada nesse trabalho que possui esse aspecto chama-se pseudo eletrodinâmica quântica (pQED) [32], ou seja, é uma teoria que descreve um

sistema onde as partículas estão confinadas a um plano, enquanto o campo EM permeia todo o espaço tridimensional. Desta forma, a teoria visa descrever a interação real eletromagnética em sistemas bidimensionais, isto é, as características como, por exemplo, a interação coulombiana experimentada por partículas carregadas em repouso é recuperada no âmbito da pQED.

Embora existam algumas abordagens para estudar as interações eletromagnéticas em sistemas $(2+1)D$ que supõem que esta se dá de forma estática, isto é, como se as partículas estivessem em repouso durante a interação* (potencial coulombiano), há indícios [5, 38] da existência de fenômenos que não podem ser descritos utilizando apenas o potencial coulombiano, isto é, a interação não pode ser usada assumindo-se que as partículas estão em repouso e a interação eletromagnética “completa” faz-se necessária.

*Isto costuma ser feito pois $v_F \ll c$, sendo v_F a velocidade de propagação dos elétrons em materiais e c a velocidade da interação EM.

Capítulo 2

Dos Supercondutores à Teoria de Campos

2.1 Supercondutores

Na maioria dos condutores metálicos como o cobre, por exemplo, a condutividade elétrica é limitada por impurezas e defeitos na estrutura e mesmo próximo do zero absoluto, ainda se observa alguma resistência elétrica. Em contrapartida, observa-se que em alguns materiais a resistência elétrica cai a zero abruptamente quando são atingidas temperaturas inferiores a uma determinada temperatura crítica. Como efeito, também acontece a expulsão de qualquer campo magnético do interior desses materiais, efeito este que recebe o nome de efeito Meissner. Materiais com essas propriedades são chamados de supercondutores, pois permitem a condução perfeita de corrente elétrica.

2.1.1 Uma Breve Revisão Histórica

A possibilidade da observação desse tipo de comportamento em materiais se deu por conta da tecnologia de baixíssimo resfriamento que foram desenvolvidas e aprimoradas ao longo do século XIX. No início do século XX, foi relatada pela primeira vez a supercondutividade pelo físico holandês Kamerlingh Onnes. Em 1911, três anos após conseguir

liquefazer hélio, Onnes estudou o comportamento da resistência elétrica em um fio de mercúrio e sua dependência com a temperatura. Por volta de $4,2\text{ K}$, foi observado que a resistência simplesmente desaparecia. Onnes então chegou à seguinte conclusão sobre o fato:

O mercúrio havia passado para um novo estado e, que em virtude das suas extraordinárias propriedades elétricas, deveria ser chamado de estado supercondutor.

Esta foi a primeira vez que o termo **supercondutor** foi usado e, por sua descoberta, e em reconhecimento pela importância de seu trabalho, Onnes foi laureado com o prêmio Nobel de física em 1913.

Décadas mais tarde, após vários experimentos com materiais supercondutores, os pesquisadores Walther Meissner e Robert Ochsenfeld observaram que não só a resistência elétrica caía a zero, como qualquer campo magnético no interior desses sistemas supercondutores era expulso, isto é, não havia fluxo magnético no interior desses materiais quando na fase de supercondutividade. Este comportamento é conhecido atualmente como **Efeito Meissner**. Nota-se também que para campos magnéticos muito intensos a fase supercondutora é quebrada e o material volta à chamada fase normal.

Começou a ser necessário então teorias para explicar o fenômeno da supercondutividade e o primeiro passo a contribuir para essa descrição foi devido à Fritz London em 1934 [30]. London utilizou o eletromagnetismo clássico e estabeleceu uma relação entre a densidade de corrente e o campo magnético que levavam a uma situação onde havia um decaimento exponencial do campo magnético no interior do supercondutor. Esse decaimento estava associado a uma grandeza que foi denominada **comprimento de penetração**.

A primeira teoria a obter sucesso ao estabelecer uma descrição mais completa foi o trabalho fenomenológico de Landau-Ginzburg [22]. Em 1950, Landau e Ginzburg uniram a teoria de transições de fase de Landau com a equação de Schrödinger para descrever o

comportamento da transição da fase normal para a fase supercondutora.

Esta teoria foi a primeira a conseguir descrever corretamente a tensão superficial na transição de fase, além de contemplar a possibilidade da destruição da fase supercondutora por conta de um campo magnético externo aplicado. Outros aspectos que foram abordados na teoria foi a descrição quantitativa do efeito Meissner onde por meio das equações de Landau-Ginzburg se obteve o comprimento de penetração da teoria de London. Mais detalhes sobre o modelo podem ser encontrados na seção 2.1.4.

Também em 1950 Herbert Fröhlich começou um estudo sobre as interações entre os elétrons e a rede cristalina e mostrou que há configurações possíveis nas quais os elétrons são capazes de se atrair [20]. Este trabalho foi o marco inicial para a descrição microscópica dos supercondutores e foi seguido pelos trabalhos de John Bardeen [9] e Leon Cooper [15], onde o primeiro, de 1955, propôs uma descrição microscópica para o efeito Meissner; e o segundo, de 1956, mostrou que em determinadas circunstâncias dois elétrons ao interagirem podem formar um estado ligado, formando pares, hoje conhecidos como **pares de Cooper**.

Estes trabalhos culminaram com a chamada **Teoria BCS** [10, 11] formulada por J. Bardeen, L. Cooper e John Schrieffer em 1957. Esta teoria será explicada em mais detalhes adiante na seção 2.1.3.

Até o final da década de 1980, acreditava-se que não poderiam haver supercondutores a temperaturas maiores que 30 K . Este resultado advém da teoria BCS que era a teoria que explicava o fenômeno da condutividade. No entanto, em 1986, utilizando-se compostos cerâmicos denominados cupratos, conseguiu-se uma fase supercondutora em 35 K . A partir daí, começaram a se descobrir compostos * que exibiam fases de supercondução a temperaturas cada vez mais elevadas, dando início aos chamados supercondutores de alta temperatura. Atualmente o supercondutor de temperatura mais alta conhecida é o sulfeto

*Principalmente materiais cerâmicos, como compostos de $YBa_2Cu_3O_{7-x}$. E também outros baseados em bismuto, tálio e mercúrio.

de hidrogênio (H_2S) sob extrema pressão ($\sim 150 \text{ GPa}$) cuja temperatura de transição é da ordem de 203 K [16].

2.1.2 Classificação

Como foi mencionado anteriormente, é sabido que campos magnéticos intensos acabam com a fase de supercondutor e fazem o material retornar à sua fase de condução comum. Dependendo da forma como essa transição ocorre, os supercondutores podem ser classificados como do tipo 1 ou do tipo 2.

Essa classificação é atribuída a Alexei Abrikosov [4] que em 1952, motivado pelos experimentos conduzidos pelo seu colega Nikolay Zavaritskii cujo trabalho encontrou resultados cuja dependência do campo crítico com a espessura e temperatura não coincidiam com a teoria usual de Landau-Ginzburg, resolveu estudar o que acontecia com esta teoria quando valores de um parâmetro adimensional[†] κ , conhecido como parâmetro de Landau-Ginzburg, tornava a superfície de energia do supercondutor negativa.

Abrikosov descobriu que nesse caso as transições de fase eram sempre de segunda ordem, ao contrário do caso onde a superfície de energia era positiva onde para grandes espessuras a transição é de primeira ordem [3], e seus resultados descreveram perfeitamente os experimentos de Zavaritskii, levando Abrikosov a classificar esse tipo de material como “*supercondutores do segundo grupo*”.

A principal distinção entre os dois tipos de supercondutores pode ser exemplificada como se segue:

Tipo 1

Existe um valor crítico de campo magnético H_c , abaixo do qual todo campo magnético do interior do supercondutor é expulso e acima do qual há o retorno repentino do corpo

[†]Este parâmetro será melhor apresentado na seção 2.1.4.

a sua fase normal possibilitando a penetração do campo magnético no material. A maior parte dos elementos puros são deste tipo.

Tipo 2

Para os supercondutores deste tipo, existem dois campos magnéticos críticos: H_{c1} e H_{c2} . Abaixo de H_{c1} todo campo magnético é expulso do interior do corpo. Para campos $H_{c1} < H < H_{c2}$, o material continua em uma fase supercondutora, porém o campo magnético começa a penetrar, tornando o efeito Meissner incompleto, o que permite que o supercondutor suporte campos magnéticos bastante intensos.

Outra característica importante dos supercondutores tipo 2 é a presença de vórtices quando o campo magnético externo encontra-se na faixa entre os campos críticos. Esses vórtices são chamados de **vórtices de Abrikosov**.

Uma representação gráfica da diferença entre os supercondutores dos tipos 1 e 2 pode ser vista na figura 2.1.

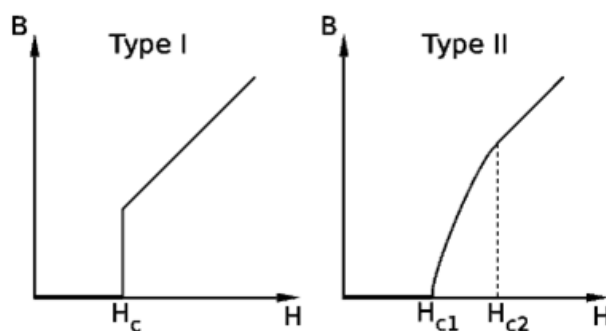


Figura 2.1: Comportamento físico dos supercondutores do tipo 1 e tipo 2.

Na figura 2.1 B representa o campo no interior do supercondutor e H é um campo externo aplicado.

2.1.3 O Modelo BCS

Trata-se do modelo desenvolvido ao final da década de 1950 por J. Bardeen, L. Co-

oper e J. Schrieffer [9, 15, 10, 11] que fornece a descrição microscópica do fenômeno da supercondutividade.

Vários experimentos por volta da década de 1940 e início da década de 1950 revelaram que a estrutura cristalina do material supercondutor deve desempenhar um papel extremamente importante na descrição teórica da supercondutividade.

Embora a própria estrutura cristalina não exiba nenhuma mudança em suas propriedades na transição de fase, o comportamento dos elétrons de condução é drasticamente alterado o que pode ser visto ao se estudar o calor específico eletrônico, por exemplo. Observa-se ainda que a estrutura cristalina possui grande importância nessa mudança do comportamento dos “super elétrons”. Esses indícios tornaram-se mais fortes ainda com experimentos independentes conduzidos por Emanuel Maxwell em 1950 [37] e por Reynolds, Serin, Wright e Nesbitt no ano seguinte [41] com diferentes isótopos do mercúrio que mostraram uma dependência da massa isotópica (que altera características da rede cristalina pois altera a massa dos átomos da rede) com a temperatura de transição.

Como dito anteriormente, os trabalhos pioneiros de Fröhlich [20] e Bardeen [9] mostraram que, devido a interação dos elétrons com a rede cristalina (interação elétron-fônon), a interação entre dois elétrons pode nem sempre ser repulsiva, como inicialmente poder-se-ia imaginar por conta da repulsão coulombiana.

Foi então que, em 1957, Bardeen, Cooper e Schrieffer apresentaram a descrição da teoria microscópica da supercondutividade onde, respaldados pelos experimentos com isótopos e seus próprios trabalhos anteriores, desenvolveram um formalismo onde a supercondutividade era mostrada como resultado da troca de fônons virtuais que possibilitavam a existência de um estado eletrônico de atração (formação dos pares de Cooper) quando a diferença de energia entre os estados eletrônicos era menor que a energia do fônon $\hbar\omega$.

O hamiltoniano de interação entre os elétrons pode ser separado em uma parte coulombiana, e outra de interação entre os elétrons e a rede. Este último pode ser representado como

$$H_{e-f} = \frac{1}{2} \sum_{k,k',\sigma,\sigma',\kappa} \frac{2\hbar\omega_\kappa |M_\kappa|^2 c_{k'-\kappa,\sigma'}^\dagger c_{k',\sigma'} c_{k+\kappa,\sigma}^\dagger c_{k,\sigma}}{(\epsilon_k - \epsilon_{k+\kappa})^2 - (\hbar\omega_\kappa)^2} \quad (2.1)$$

onde, $c_{k,\sigma}$ e $c_{k,\sigma}^\dagger$ são, respectivamente os operadores aniquilação e criação de elétrons com momento k e spin σ ; ϵ_k é a energia de Bloch medida em relação à energia de Fermi; M_κ é o elemento de matriz da interação elétron-fônon.

As transições mais importantes para a observação da supercondutividade são aquelas para as quais $|\epsilon_k - \epsilon_{k+\kappa}| \sim \kappa_B T_c \ll \hbar\omega_\kappa$, onde κ_B é a constante de Boltzmann e T_c a temperatura crítica da transição.

Mais detalhes sobre a teoria BCS são encontrados no artigo original [11] ou em livros como [40].

2.1.4 Teoria de Landau-Ginzburg

Embora cronologicamente esta teoria tenha sido desenvolvida antes da teoria BCS, ela está representada depois neste texto pois ela é usada como base para uma descrição em termos de uma teoria quântica de campos que é o foco principal do trabalho.

A utilização da teoria de transições de fase de Landau para a descrição do fenômeno da supercondutividade foi motivado pois não havia nenhuma teoria, seja fenomenológica, seja de primeiros princípios, que fornecesse satisfatoriamente os principais aspectos desses materiais. O que se tinha de mais confiável a época eram as equações de London para o campo magnético e a densidade de corrente no interior de um supercondutor

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\mathbf{H}}{\delta^2} = 0 \quad (2.2a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{j}_s - \frac{\mathbf{j}_s}{\delta^2} = 0 \quad (2.2b)$$

onde $\delta^2 = \frac{\Lambda c^2}{4\pi}$ e Λ é uma grandeza fenomenológica que depende da temperatura, \mathbf{H} é o campo magnético e \mathbf{j}_s a densidade de corrente supercondutora.

Da solução das equações (2.2) é possível obter que o campo magnético penetra apenas uma distância da ordem de δ o que, de acordo com experimentos, é da ordem de $10^{-7} m$.

Na teoria de transições de fase de Landau, para transições de segunda ordem sempre há um parâmetro η que é diferente de zero na fase ordenada e igual a zero na fase ordenada. Esta grandeza recebe, pois, o nome de **parâmetro de ordem**. Na ausência de um campo magnético externo a transição de um material para a fase supercondutora na temperatura crítica é de segunda ordem cujo parâmetro de ordem será ψ , que pode ser considerada como uma função de onda efetiva dos elétrons supercondutores [22]. Assim:

$$\begin{cases} \psi = 0, & \text{se } T > T_c \\ \psi \neq 0, & \text{se } T < T_c \end{cases}$$

Todas as características do sistema devem então ser escritas exclusivamente em termos de ψ e ψ^* . Próximo da transição, a energia livre do sistema supercondutor pode ser expressa em termos de $|\psi|^2$. Assim, em função deste campo, a energia livre é escrita como:

$$F = F_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2m}|(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi|^2 \quad (2.3)$$

onde F_n é a energia livre da fase normal, α e β são parâmetros fenomenológicos que podem, em princípio, depender da temperatura; m uma massa efetiva; e a carga dos elétrons; \mathbf{A} é o potencial vetor magnético e $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ é o campo magnético. O último termo do lado direito de (2.3) aparece por impor uma invariância de calibre para a teoria.

Ao se minimizar a energia livre, obtém-se as equações de movimento do modelo que são:

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi = \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})^2\psi \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{j} = \frac{2e}{m}\text{Re}\{\psi^*(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi\} \quad (2.4b)$$

A equação (2.4a) determina o parâmetro de ordem ψ , enquanto (2.4b) dá a corrente supercondutora.

Tomando-se o rotacional da equação (2.4b) é possível obter uma expressão para o campo magnético no supercondutor

$$\nabla \times \mathbf{j} = -\frac{2e n_s}{m} \mathbf{B} \quad (2.5)$$

onde $n_s = |\psi|^2$ é a densidade de elétrons supercondutores e $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ e $\nabla \times \nabla \phi = 0$.

Tomando-se o rotacional de (2.5), pode-se reescrevê-la como

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{j} = -\frac{2e n_s}{m} \nabla \times \mathbf{B} \quad (2.6)$$

Pode-se usar então equação lei de Ampère[‡] $\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}$, em conjunto com a identidade vetorial $\nabla \times \nabla \times \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$, reescreve-se (2.5) como[§]

$$\nabla^2 \mathbf{j} = \frac{1}{\delta^2} \mathbf{j} \quad (2.7)$$

em que $\delta^2 = \frac{m}{8\pi e n_s}$.

Também é possível escrever uma equação para o campo magnético. Substituindo-se \mathbf{j} na lei de Ampère e usando a equação (2.5), obtém-se

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{8\pi e n_s}{m} \mathbf{B}$$

Usando novamente a identidade vetorial $\nabla \times \nabla \times \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\frac{8\pi e n_s}{m} \mathbf{B}$$

onde o primeiro termo da esquerda é identicamente nulo por conta da lei de Gauss do campo magnético. Assim

[‡]Assumindo que $c = 1$.

[§]Pois $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$.

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\delta^2} \mathbf{B} \quad (2.8)$$

em que $\delta^2 = \frac{m}{8\pi en_s}$.

As equações (2.7) e (2.8) são as equações de London (2.2).

Em uma região com campo elétrico constante B_0 onde se encontra um supercondutor, uma solução possível para a (2.8) próximo da superfície desse supercondutor, de forma que apenas a componente perpendicular à superfície do mesmo é, por simetria, relevante, *e.g.*, z tem a forma

$$B(z) = B_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \quad (2.9)$$

Que mostra o caráter de decaimento exponencial do campo magnético no interior de um supercondutor (efeito Meissner).

Note que a equação (2.8) é exatamente a equação de London (2.2a), o que mostra que a teoria fenomenológica desenvolvida por Landau e Ginzburg obtém como consequência o efeito Meissner da forma descrita por London.

Uma previsão obtida por esta teoria é o chamado **comprimento de coerência** dado por $\xi = \sqrt{\frac{\hbar}{2m|\alpha|}}$ que é um dos expoentes críticos da transição de fase pois representa a escala de variação da densidade eletrônica do estado supercondutor.

Observa-se agora que há dois comprimentos característicos que aparecem na teoria de Landau-Ginzburg, o comprimento de penetração δ e o comprimento de coerência ξ . A razão entre eles $\left(\frac{\delta}{\xi}\right)$ define o parâmetro adimensional κ presente em praticamente todas as expressões do modelo [22], de forma que para valores $0 < \kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$ tem-se supercondutores do tipo 1 e para $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$ os supercondutores são do tipo 2 [4].

2.1.5 Descrição Lagrangiana

A extensão da teoria de Landau-Ginzburg para o contexto de uma teoria quântica de campos pode ser feita quase que imediatamente partindo-se da equação (2.3), na qual o

parâmetro de ordem da teoria possuirá o papel de um campo escalar complexo.

A vantagem de se estudar a teoria da supercondutividade utilizando-se deste formalismo é que todas as técnicas disponíveis em cálculos de teoria quântica de campos (TQC) - largamente utilizados em física de partículas para a descrição do Modelo Padrão, por exemplo - são imediatamente aplicáveis no âmbito deste sistema de matéria condensada.

O modelo que advém da formulação de uma teoria de campos para a teoria de Landau-Ginzburg é conhecida como modelo de Higgs abeliano, e pode ser escrita como [25]

$$\mathcal{L}_{AH} = |D_\mu \phi|^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{m^2}{2} \phi^* \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi)^2 \quad (2.10)$$

Onde o campo escalar ϕ representa os pares de Cooper que possuem carga $-2q$, e $D_\mu = \partial_\mu - 2iqA_\mu$, a derivada covariante.

Sabe-se, no entanto, que supercondutores do tipo 2 apresentam estruturas com características de vórtices na região entre os campos críticos H_{c1} e H_{c2} , que possibilitam um fluxo de campo magnético no interior dos supercondutores. Essas regiões são os vórtices de Abrikosov e representam uma desordem no sistema. No contexto da TQC, essas desordens são vistos como defeitos topológicos.

A fim de uma descrição de supercondutores do tipo 2, então, faz-se necessária a utilização das chamadas “teorias BF” [25], que introduzem, via multiplicadores de Lagrange, termos topológicos que representam os vórtices que surgem neste tipo de supercondutor. Uma discussão mais detalhada deste processo será feita já no contexto do trabalho no capítulo 3.

2.2 A Pseudo Eletrodinâmica Quântica (pQED)

Nesta seção será discutida a teoria efetiva da pseudo eletrodinâmica quântica (pQED), desenvolvida no início da década de 1990 [32], que visa descrever os efeitos usuais do ele-

tromagnetismo em $(3+1)D$, em sistemas onde as partículas interagentes estão confinadas em um plano, enquanto o campo eletromagnético (EM) está em todo o espaço.

A ideia central é obter uma teoria geral para partículas confinadas em um plano, sejam elas de estatística bosônica, fermiônica, ou estejam em regime relativístico ou não relativístico tendo como ponto de partida a teoria usual do eletromagnetismo em $(3+1)D$ e impondo-se um vínculo na corrente das partículas, onde uma das componentes espaciais será nula enquanto as outras serão normais, obtendo-se uma ação efetiva da teoria. Em seguida, mostra-se que esta mesma ação pode ser encontrada partindo-se de um lagrangiano em $(2+1)D$. Este será o lagrangiano da pseudo eletrodinâmica quântica.

2.2.1 Desenvolvimento

O lagrangiano da QED $(3+1)D$ é

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - ej_{3+1}^\mu A_\mu + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{GF} \quad (2.11)$$

onde \mathcal{L}_M contém a parte cinética de uma teoria genérica, \mathcal{L}_{GF} é o termo de fixação de calibre, j_{3+1}^μ (com $\mu = 0, 1, 2, 3$) é a corrente de matéria em três dimensões e e é carga das partículas.

O objetivo agora é integrar (2.11) no campo de calibre A_μ , a fim de se escrever uma interação efetiva entre o campo eletromagnético e as partículas carregadas. No espaço euclidiano, o propagador dessa teoria é

$$G_{EM}^{\mu\nu} = [-\square_E \delta^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu] \left[\frac{1}{(-\square_E)^2} \right] \quad (2.12)$$

Assim, o funcional gerador dessa teoria pode ser escrito como

$$Z_{\text{eff}}^{\text{EM}} = Z^{-1} \int DA_\mu \exp \left\{ - \int dz_E^4 \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + ej_{3+1}^\mu A_\mu \right] \right\} \quad (2.13)$$

E a integração funcional é gaussiana e pode ser feita da maneira usual

$$\begin{aligned}
Z_{\text{eff}}^{\text{EM}} &= \exp \left\{ \frac{e^2}{2} \int dz_{\text{E}}^4 d\tilde{z}_{\text{E}}^4 j_{3+1}^{\mu}(z) G_{\text{EM}}^{\mu\nu}(z - \tilde{z}) j_{3+1}^{\mu}(\tilde{z}) \right\} \\
&= \exp \left\{ \frac{e^2}{2} \int dz_{\text{E}}^4 d\tilde{z}_{\text{E}}^4 j_{3+1}^{\mu}(z) \left[\frac{1}{-\square_{\text{E}}} \right] j_{3+1}^{\mu}(\tilde{z}) \right\} \\
&= \exp \{ -S_{\text{eff}}[j_{3+1}^{\mu}] \}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Como as partículas estão confinadas num plano, um vínculo deve ser introduzido para a corrente de matéria, e isso é feito da seguinte forma

$$j_{3+1}^{\mu}(x^0, x^1, x^2, x^3) = \begin{cases} j^{\mu}(x^0, x^1, x^2)\delta(x^3), & \mu = 0, 1, 2 \\ 0, & \mu = 3 \end{cases} \tag{2.15}$$

Substitui-se então (2.15) na ação efetiva $S_{\text{eff}}[j_{3+1}^{\mu}]$ em (2.14) que pode ser escrita como:

$$S_{\text{eff}} = -\frac{e^2}{2} \int dz^3 d\tilde{z}^3 j^{\mu}(z) K_{\text{E}}(z - \tilde{z} | z^3 = \tilde{z}^3 = 0) j^{\mu}(\tilde{z}) \tag{2.16}$$

onde o kernel de (2.16) é dado por

$$K_{\text{E}}(z - \tilde{z} | z^3 = \tilde{z}^3 = 0) \equiv \left[\frac{1}{(-\square_{\text{E}})} \right] \Big|_{z_3=\tilde{z}_3=0} = \frac{1}{8\pi^2 |z - \tilde{z}|_{3\text{D}}^2} \tag{2.17}$$

Note que este pode ser escrito como uma integral em três dimensões euclidianas, ou seja, em $(2 + 1)D$ da seguinte maneira:

$$\frac{1}{8\pi^2 |z - \tilde{z}|_{3\text{D}}^2} = \frac{1}{4} \int \frac{d^3 k_{3\text{D}}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}})]_{3\text{D}}}}{(k_{3\text{D}}^2)^{1/2}} = \frac{1}{4} \frac{1}{(-\square_{2+1}^{\text{E}})^{1/2}} \tag{2.18}$$

onde \square_{2+1}^{E} é o D'Alambertiano em 3D no espaço euclidiano.

É possível mostrar que esta ação efetiva pode ser obtida partindo-se de um lagrangiano com a forma [32]

$$\mathcal{L}_{pQED} = -\frac{1}{4} \bar{F}_{\mu\nu} \left[\frac{2}{\square^{1/2}} \right] \bar{F}_{\mu\nu} - e j^{\mu} \bar{A}_{\mu} \tag{2.19}$$

Em que $\bar{F}^{\mu\nu}$ e \bar{A}^{μ} são campos estritamente em $(2 + 1)D$.

A equação (2.19) descreve a interação EM real para sistemas bidimensionais.

2.2.2 Aplicações e Resultados

Algumas das principais aplicações da pQED se dão no grafeno, siliceno.

O grafeno, quando estudado no regime de baixos momentos, possui uma relação de dispersão que é linear, *i.e.*, $k \propto \omega$. Isto permite que seja feito um tratamento relativístico neste material, onde a velocidade da dispersão desses elétrons é chamada de velocidade de Fermi ($\sim 10^6$ m/s), por analogia aos elétrons que estão na camada de Fermi. Como esta velocidade é cerca de 300 vezes menor que a velocidade da luz, costuma-se dizer que a interação intereletrônica se dá de forma puramente coulombiana, pois considera-se que a velocidade com que os elétrons interagem entre si (a velocidade da luz no vácuo, c) é muito maior que a velocidade com que eles se movimentam.

O uso da pQED leva em conta a interação completa entre os elétrons. Ao se fazer isso, observa-se o surgimento de novos efeitos e alguns outros resultados igualmente interessantes. Por exemplo, a geração dinâmica de massa e a quebra da simetria quiral foram estudadas em [5] e revelam que o elétron adquire uma massa se a constante de estrutura fina for maior que um certo valor crítico. Este resultado foi posteriormente aprimorado ao ser estudado em um regime de temperatura finita, onde se mostrou que esse acoplamento crítico é maior do que aquele a $T=0$ [39]. Cálculos perturbativos utilizando a pQED como modelo para descrever a interação eletromagnética entre os elétrons-p no grafeno mostram uma condutividade longitudinal muito próxima do seu valor medido experimentalmente [17]. Revela ainda um efeito novo e universal, chamado efeito Hall quântico de vale que ocorre nas bordas da amostra [35]. Recentemente o mesmo modelo tem sido usado para obter o fator giromagnético do elétron no grafeno, e os resultados estão em excelente concordância com os resultados experimentais [38].

Capítulo 3

A pQED aplicada a supercondutores

3.1 A pqed em filmes supercondutores e metálicos

Dado o sucesso na aplicação da pQED no grafeno, uma nova aplicação possível é nos chamados filmes supercondutores que são supercondutores (usualmente do tipo 2) bidimensionais.

É sabido que, usando o eletromagnetismo usual, os filmes supercondutores apresentam uma frequência de corte característica e também efeito Meissner [25]. Porém esses resultados não utilizam a interação eletrônica correta entre as partículas e sim a QED₃₊₁, onde o campo eletromagnético também está confinado às duas dimensões espaciais.

3.1.1 Formalismo

O objetivo agora é, utilizando a teoria desenvolvida em [25] para a descrição da supercondutividade, estudar o sistema bidimensional utilizando-se a interação correta, *i.e.*, a pQED.

Parte-se então de um lagrangiano similar à (2.10), onde muda-se apenas o termo do eletromagnetismo usual pelo termo de pQED resultante de (2.19). Assim o lagrangiano dessa teoria é dado por

$$\mathcal{L} = |D_\mu \phi|^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \left[\frac{2}{(-\square)^{1/2}} \right] F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} \phi^* \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi)^2 \quad (3.1)$$

Um procedimento usual do estudo de sistemas de matéria condensada via TQC é reescrever esses campos usando uma representação polar para eles. Aqui o campo escalar representa os pares de Cooper, então $\phi = \sqrt{\rho_0} e^{i\theta}$. A densidade dos pares de Cooper é então tomada como sendo constante $\rho \simeq \rho_0$, e a derivada covariante pode ser escrita como

$$D_\mu \phi = \frac{ie\rho_0}{\sqrt{2}} \left(A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta \right) = \frac{i\sqrt{M}}{\sqrt{2}} (A_\mu + a_\mu) \quad (3.2)$$

onde $\sqrt{M} = e\rho_0$.

O funcional gerador do vácuo deste modelo é:

$$\begin{aligned} Z_0 = & \int DA_\mu Da_\mu Db_\mu \exp \left\{ - \int d^4x \frac{1}{2} A_\mu P^{\mu\nu} \left[\frac{2(-\square)^{1/2} + M}{-\square} \right] A_\nu + M A_\mu a^\mu + \right. \\ & \left. + \frac{M}{2} a^\mu a_\mu + e j_q^\mu A_\mu + b_\mu (j_v^\mu - \epsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta) \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

com $P^{\mu\nu} = \square \delta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu$.

O campo b_μ é introduzindo como um multiplicador de lagrange, forçando com que a corrente de vórtice (j_v^μ) seja igual a $\epsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta$.

O próximo passo para a obtenção do lagrangiano efetivo da teoria é realizar a integral funcional* de (3.3) no campo A_μ , onde o propagador que é facilmente obtido dos termos quadráticos nos campos de calibre é dado por

$$K^{\mu\nu} = -\frac{M}{2} \delta^{\mu\nu} + \frac{P^{\mu\nu}}{\square^{1/2}} \quad (3.4)$$

A inversa deste propagador é, fazendo-se uma expansão em derivadas[†], e segurando termos até ordem \square :

*Desprezando os termos $j_\mu j^\mu$.

[†]Supõe-se que esta abordagem é feita considerando sistema contínuo, isto é válido para grandes comprimentos de onda, ou seja, baixos momentos.

$$K^{(-1)\mu\nu} \approx -\frac{2}{M} \left[\delta^{\mu\nu} + \frac{2P^{\mu\nu}}{\square^{1/2}M} \left(1 + \frac{2\square^{1/2}}{M} \right) \right] \quad (3.5)$$

Finalmente chega-se à lagrangiana efetiva:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} = & -\frac{1}{4} f_{\mu\nu}^{(a)} \left[\frac{2}{(-\square)^{1/2}} \right] f_{\mu\nu}^{(a)} - \frac{1}{4M} (f_{\mu\nu}^{(a)})^2 - \frac{1}{4M} (f_{\mu\nu}^{(b)})^2 \\ & + \epsilon^{\mu\alpha\beta} a_\mu \partial_\alpha b_\beta + e j_q^\mu a_\mu + j_v^\mu b_\mu \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde $f_{\mu\nu}^{(a,b)}$ são o análogo do termo $F_{\mu\nu}$ para os campos a_μ e b_μ , respectivamente.

Agora pode-se usar a equação de Euler-Lagrange a fim de determinar as equações de movimento para os campos.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) = 0 \quad (3.7)$$

Ao se fazer isso para os campos a_μ e b_μ , chega-se à

$$j_q^\mu = \epsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha \left\{ b_\nu - \left[\frac{2}{(-\square)^{1/2}} + \frac{1}{M} \right] \epsilon^{\beta\lambda\sigma} \partial_\lambda a_\sigma \right\} \quad (3.8)$$

$$j_v^\mu = \epsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha \left[a_\nu - \frac{1}{M} \epsilon^{\beta\lambda\sigma} \partial_\lambda b_\sigma \right] \quad (3.9)$$

onde (3.8) representa um equação de movimento para as quasipartículas e (3.9) a equação de movimento para os vórtices.

Usando a expressão de $P^{\mu\nu}$ e que $C^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\alpha$, além das relações[‡] entre esses operadores, as equações (3.8) e (3.9) podem ser reescritas na forma

$$j_q^\mu = C^{\mu\nu} b_\nu - \left[\frac{2}{(-\square)^{1/2}} + \frac{1}{M} \right] P^{\mu\nu} a_\nu \quad (3.10)$$

$$j_v^\mu = C^{\mu\nu} a_\nu - \frac{1}{M} P^{\mu\nu} b_\nu \quad (3.11)$$

[‡]No espaço dos momenta: $P^2 = k^2 P$, $C^2 = -P$ e $CP = k^2 C$.

Como

$$P^{\mu\nu}a_\nu = \partial_\nu f_{(a)}^{\mu\nu}$$

a equação (3.11) pode ser reescrita como

$$\partial_\nu f_{(a)}^{\mu\nu} = \frac{(-\square)^{1/2}M}{M + (-\square)^{1/2}}(Ma^\mu + j^\mu) \quad (3.12)$$

3.1.2 Resultados

Análise das Equações de Movimento

Vórtice pontual: A primeira situação a ser estudada a partir das equações de movimento será considerando-se estados onde não há quasipartículas, *i.e.*, fazendo-se $j_q^\mu = 0$ em (3.10) chega-se a

$$C^{\mu\nu}b_\nu = \left(\frac{2}{(-\square)^{1/2}} + \frac{1}{M} \right) P^{\mu\nu}a_\nu \quad (3.13)$$

Substituindo (3.13) em (3.11), tem-se que

$$j_v^\mu = \left[\frac{[(-\square)^{1/2} + M]^2}{M} \right] \epsilon^{\mu\alpha\nu}a_\nu \quad (3.14)$$

Agora será estudado o campo magnético associado a um vórtice pontual estático $j_v^0 = \delta(\mathbf{r})$, $j_v^i = 0$, que em uma teoria de Chern Simons corresponde a um campo magnético pontual, ou seja, a um vórtice de Abrikosov no limite extremo de um supercondutor do tipo 2.

Definindo $B(\mathbf{r}) = \epsilon^{ij}\partial_i a_j$, a equação (3.14) é escrita como

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{[(-\square)^{1/2} + M]^2}{M} B(\mathbf{r}) \quad (3.15)$$

Para encontrar o campo magnético, faz-se a mudança do sistema para o espaço dos momenta (onde $-\square = k^2$), obtendo

$$B(\mathbf{r}) = M^2 \int dr' \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{(M+k)^2}$$

Integrando em r' e na variável angular das coordenadas polares,

$$B(\mathbf{r}) = M^2 \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{k J_0(kr)}{(M+k)^2} \quad (3.16)$$

onde $J_0(x)$ é a função de Bessel.

Esta integral pode ser resolvida analiticamente [23], resultando em um campo magnético dado por

$$B(\mathbf{r}) = M^2 \left\{ \mathbf{H}_0 \left(\frac{M}{2} r \right) - Y_0 \left(\frac{M}{2} r \right) + \frac{Mr}{2} \left[Y_1 \left(\frac{M}{2} r \right) + \mathbf{H}_{-1} \left(\frac{M}{2} r \right) \right] \right\} \quad (3.17)$$

onde $Y_\alpha(x)$ e $\mathbf{H}_\alpha(x)$ são as funções de Bessel de segunda espécie e de Struve, respectivamente.

Usando que $Y_1(x) = -Y_{-1}(x)$, pode-se escrever o campo magnético na forma

$$B(\mathbf{r}) = M^2 \left\{ \mathbf{H}_0 \left(\frac{M}{2} r \right) - Y_0 \left(\frac{M}{2} r \right) + \frac{Mr}{2} \left[\mathbf{H}_{-1} \left(\frac{M}{2} r \right) - Y_{-1} \left(\frac{M}{2} r \right) \right] \right\} \quad (3.18)$$

De [2] tem-se, para $z \rightarrow \infty$, e ν fixo:

$$\mathbf{H}_\nu(z) - Y_\nu(z) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2}) \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-2k-1}}{\Gamma(\nu - k + \frac{1}{2})} \quad (3.19)$$

Assim, o comportamento assintótico de (3.18) quando $r \rightarrow \infty$ e $\nu = 0, -1$ será, truncando no primeiro termo não nulo:

$$B(\mathbf{r}) \sim \frac{2}{\pi M r^3} \quad (3.20)$$

Analizando o resultado de (3.20), nota-se que o campo magnético decai obedecendo uma lei de potência. Esse comportamento é esperado em um filme supercondutor sem desordem e na ausência de campo externo [19].

O decaimento via lei de potência mostra também a ausência do efeito Meissner, que possui caráter exponencial, em supercondutores bidimensionais.

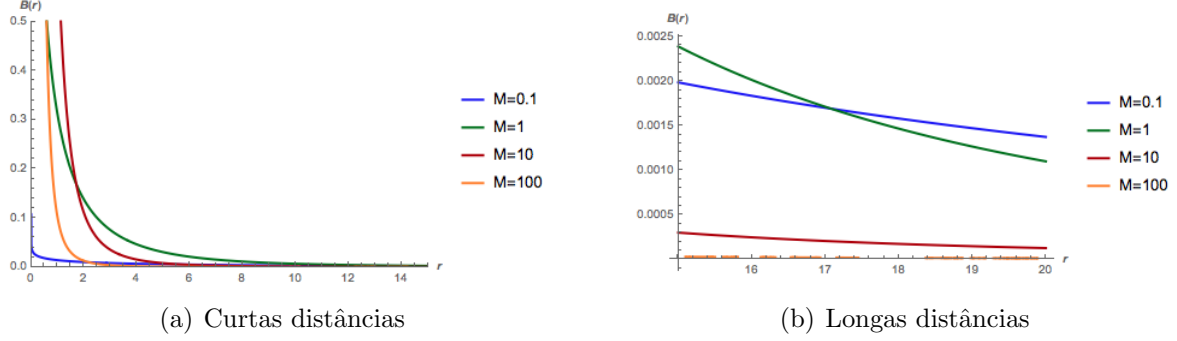


Figura 3.1: Campo magnético em um filme supercondutor para vários valores M referentes à densidades de pares de Cooper diferentes.

A figura 3.1(a) representa o comportamento completo do campo magnético gerado por um vórtice puntiforme referente à (3.18) enfatizando o regime de curtas distâncias. Já a figura 3.1(b) representa o regime para longas distâncias onde o comportamento assintótico descrito por (3.20). Note que, neste caso, como era esperado, o decaimento se dá de forma mais acentuada para valores maiores de M .

Quasipartícula pontual: A fim de se obter o potencial gerado pelas quasipartículas, estuda-se uma situação onde há apenas uma quasipartícula no sistema na ausência de vórtices. Assim $j_v^\mu = 0$ em (3.11) e o resultado dessa equação é então substituído em (3.10).

Por meio de um procedimento totalmente análogo ao do caso anterior é obtida a expressão

$$j_q^\mu = \left(\frac{[(-\square)^{1/2} + M]^2}{M} \right) a^\mu \quad (3.21)$$

Supondo agora que a quasipartícula seja estática e puntiforme, ou seja, $j_q^0 = \delta(\mathbf{r})$ e $j_q^i = 0$:

$$\delta(\mathbf{r}) = \left(\frac{[(-\square)^{1/2} + M]^2}{M} \right) a^0(\mathbf{r}) \quad (3.22)$$

Novamente recorrendo ao espaço dos momenta para inverter (3.22) visando calcular o

potencial a^0 , chega-se a uma integral idêntica à da equação (3.16), a menos de um fator constante multiplicativo. Portanto:

$$a^0(\mathbf{r}) = \frac{1}{M} \left\{ \mathbf{H}_0 \left(\frac{M}{2} r \right) - Y_0 \left(\frac{M}{2} r \right) + \frac{Mr}{2} \left[\mathbf{H}_{-1} \left(\frac{M}{2} r \right) - Y_{-1} \left(\frac{M}{2} r \right) \right] \right\} \quad (3.23)$$

Cujo limite assintótico usando (3.19) quando $r \rightarrow \infty$ é

$$a^0(\mathbf{r}) \sim \frac{2}{\pi M^2 r^3} \quad (3.24)$$

Nota-se que, assim como o campo magnético para um vórtice pontual, o potencial de interação para as quasipartículas cai com o inverso do cubo da distância no limite de grandes distâncias.

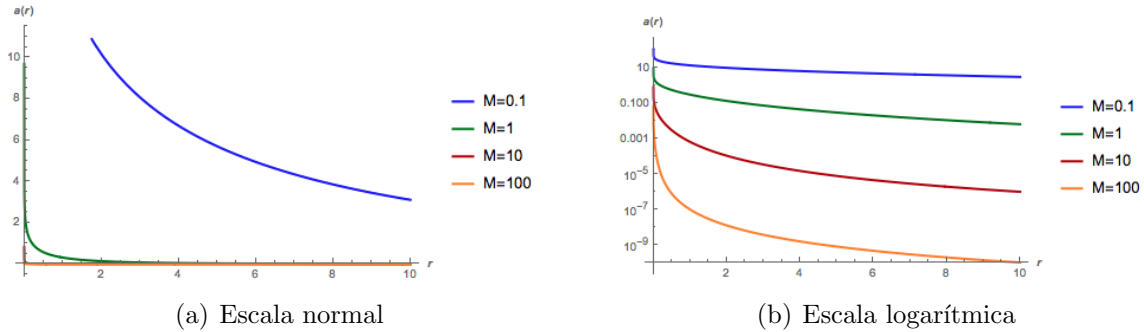


Figura 3.2: Potencial das quasipartículas em um filme supercondutor

A figura 3.2(a) mostra o comportamento do potencial gerado pelas quasipartículas em um filme supercondutor associado à equação (3.23) para diversos valores de M referentes à densidades de pares de Cooper diferentes. A figura 3.2(b) contém as mesmas curvas, porém em escala logarítmica para detalhar melhor o comportamento das curvas.

Frequência de Plasma

Outro aspecto do sistema a ser estudado é a resposta dinâmica a flutuações de carga. Isso pode ser feito fazendo uso da equação (3.21).

Partindo-se de

$$\partial_\nu f_{(a)}^{\nu\mu} = (-\square)^{1/2} \frac{M}{M + (-\square)^{1/2}} (M a^\mu + j^\mu) \quad (3.25)$$

e substituindo-se a relação (3.21), é possível reescrever (3.25) como

$$\partial_\nu f_{(a)}^{\nu\mu} = (-\square)^{1/2} \frac{M}{M + (-\square)^{1/2}} \left(M + \frac{[M + (-\square)^{1/2}]^2}{M} \right) a^\mu \quad (3.26)$$

Uma forma mais fácil de visualizar esta expressão é abrindo o tensor $f_{(a)}^{\mu\nu}$ em termos dos campos elétrico e magnético associados às quasi partículas \mathbf{E} e \mathbf{B} , com $c = 1$. Então:

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = (-\square)^{1/2} \frac{M}{M + (-\square)^{1/2}} \left(M + \frac{[M + (-\square)^{1/2}]^2}{M} \right) \mathbf{a} \quad (3.27)$$

Tomando a derivada temporal e usando a Lei de Faraday-Lenz, é possível notar que a equação (3.27) fica

$$-\square \mathbf{E} = \frac{(-\square)^{1/2} M}{M + (-\square)^{1/2}} \left(M + \frac{[M + (-\square)^{1/2}]^2}{M} \right) \mathbf{E} \quad (3.28)$$

Reescrevendo (3.28) no espaço dos momentos $-\square = k^2$, chega-se à

$$k^2 = \frac{kM}{M+k} \left(M + \frac{\overbrace{M^2 + 2Mk + k^2}^{(M+k)^2}}{M} \right) \quad (3.29)$$

para $k \neq 0$

Neste caso, pode-se ver que (3.29) torna-se

$$Mk^2 + k^3 = kM \left(2M + 2k + \frac{k^2}{M} \right)$$

$$k^2(k^2 - 4M^2) = 0$$

O que dá

$$k^2 = 4M^2 \quad (3.30)$$

Logo,

$$|\mathbf{k}|^2 = \omega^2 - 4M^2 \quad (3.31)$$

Da equação (3.31), pode-se observar que se a frequência ω for menor que $4M^2$, o vetor de onda $|\mathbf{k}|$ será imaginário, isto é, não haverá propagação de ondas EM neste regime. Logo, é possível notar que há uma frequência de corte que depende do *gap* do supercondutor, *i.e.*, da densidade dos pares de Cooper.

Note que na fase normal, onde $\langle \phi \rangle = 0$, o *gap* se anula e é recuperado o resultado esperado para um filme metálico segundo o qual neste caso não há uma frequência de corte para a propagação das ondas eletromagnéticas [40].

3.2 Teoria não relativística

A fim de se obter uma descrição mais realística de um filme supercondutor, faz-se necessária a utilização de uma teoria de campos não relativística. No regime não relativístico o termo de energia cinética é muito menor que a massa de repouso das partículas descritas por esse campo.

3.2.1 Teoria não relativística para um campo escalar

Para uma breve exemplificação do procedimento a ser utilizado posteriormente para os filmes supercondutores será estudado um campo escalar relativístico Φ , cujo lagrangiano é

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \Phi^\dagger)(\partial^\mu \Phi) - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (3.32)$$

onde m representa a massa de repouso das partículas e λ é uma constante de acoplamento positiva.

Para determinar o lagrangiano não relativístico da teoria descrita por (3.32) é conveniente analisar primeiro o que ocorre com a equação de Klein-Gordon para o campo escalar Φ neste regime.

$$(\partial^2 + m^2)\Phi = 0 \quad (3.33)$$

Um modo cuja energia é $E = \epsilon + m$ oscila temporalmente como $\Phi \propto e^{-iEt}$. O regime não relativístico caracteriza-se por uma energia cinética muito menor que a energia associada à massa de repouso, *i.e.*, $\epsilon \ll m$. Desta forma, o campo pode ser reescrito convenientemente como

$$\Phi = \phi(\mathbf{r}, t) e^{-imt} \quad (3.34)$$

em que o campo $\phi(\mathbf{r}, t)$ oscila temporalmente de maneira muito mais lenta que e^{-imt} .

Ao se substituir (3.34) em (3.33) e observar que o termo $\partial_t^2 \phi \ll -2im\partial_t \phi$ chega-se, como esperado, à equação de Schrödinger:

$$i\partial_t \phi = -\frac{\nabla^2}{2m} \phi \quad (3.35)$$

Deste modo, o procedimento para escrever um lagrangiano não relativístico para (3.32) passa por fazer a decomposição para o campo escalar descrita em (3.34) e desprezar os termos ∂_t^2 em comparação com os termos lineares ∂_t . Fazendo isto, o lagrangiano não relativístico para a teoria do campo escalar será

$$\mathcal{L}_{\text{N.R.}} = i\phi^\dagger \partial_t \phi - \frac{1}{2m} \partial_i \phi^\dagger \partial_i \phi - \frac{\lambda}{4m^2} (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (3.36)$$

Todo este procedimento pode ser encontrado de maneira mais detalhada em [43, 42].

3.2.2 Filmes supercondutores

A partir de agora, a ideia é utilizar a decomposição do campo escalar da seção 3.2.1 no contexto dos filmes supercondutores

Partindo do lagrangiano (3.6) e separando o campo eletromagnético em suas componentes elétrica e magnética pode-se escrever uma teoria não relativística para este sistema

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= \phi^*(i\partial_t - eA_0)\phi - \frac{1}{2m^*}|D_i\phi|^2 - V(\rho) + \\ &+ \frac{\epsilon}{2}\mathbf{E}\left[\frac{2}{(-\square)^{1/2}}\right]\cdot\mathbf{E} - \frac{1}{2\mu}\mathbf{B}\left[\frac{2}{(-\square)^{1/2}}\right]\cdot\mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde ϵ e μ são, respectivamente, a constante dielétrica e a permeabilidade magnética do meio no qual o filme supercondutor encontra-se imerso, o que representa uma situação mais real para um sistema físico.

Utilizando a decomposição polar para o campo $\phi = \sqrt{\rho}e^{i\theta}$, como feito no caso relativístico, com $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, substitui-se em (3.37) então o termo da energia cinética pode ser reescrito, a menos de uma derivada total como

$$\sqrt{\rho_0}i(\partial_t\theta + ieA_0)\delta\rho = -\sqrt{\rho_0}D_t\theta\delta\rho$$

O potencial de interação V pode ser expandido em torno da densidade de pares de Cooper constante ρ_0 , de maneira que $V(\rho) = V_0 + \frac{1}{2}V_2\delta\rho^2$, onde $V_0 = V(\rho_0)$, e $V_2 = V''(\rho_0)$.

A teoria agora pode ser integrada funcionalmente em termos do campo $\delta\rho$ que é quadrático tanto na parte temporal quanto na espacial. Assim, chega-se a forma final do lagrangiano não-relativístico para a teoria de filmes supercondutores.

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2V_2}|D_t\theta|^2 - \frac{\rho_0}{2m^*}|D_i\theta|^2 + \frac{\epsilon}{2}\mathbf{E}\left[\frac{2}{(-\square)^{1/2}}\right]\cdot\mathbf{E} - \frac{1}{2\mu}\mathbf{B}\left[\frac{2}{(-\square)^{1/2}}\right]\cdot\mathbf{B} \quad (3.38)$$

onde $x_0 = \sqrt{\epsilon\mu}t$ (com $c = 1$).

O lagrangiano (3.38) apresenta ainda uma relação quadrática entre as partes temporal e espacial, contudo os coeficientes não são mais os mesmos pois houve uma quebra de simetria natural quando se obtém o regime não relativístico.

A diferença entre esses coeficientes, porém, pode ser compensada por uma mudança de coordenadas ou, equivalentemente, por uma mudança da velocidade. Assim, é possível obter o campo magnético, o potencial eletrostático de interação e para a frequência de

corde, apenas notando que as componentes associadas à coordenada temporal sofrem a transformação $t \rightarrow \sqrt{\epsilon\mu} t$. Portanto, com essas transformações, chega-se à

Vórtice pontual estático

Partindo de (3.15) e notando agora que $j_v^0 = \frac{\delta(\mathbf{r})}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, o procedimento é exatamente o mesmo e a equação do campo magnético será dada por

$$B_{\text{NR}}(\mathbf{r}) = \frac{M^2}{\sqrt{\epsilon\mu}} \left\{ \mathbf{H}_0 \left(\frac{M}{2} r \right) - Y_0 \left(\frac{M}{2} r \right) + \frac{Mr}{2} \left[\mathbf{H}_{-1} \left(\frac{M}{2} r \right) - Y_{-1} \left(\frac{M}{2} r \right) \right] \right\} \quad (3.39)$$

Cujo limite assintótico é

$$B(\mathbf{r}) \sim \frac{2}{\pi \sqrt{\epsilon\mu} M r^3} \quad (3.40)$$

Quasipartícula pontual estática

Iniciando agora da expressão (3.22), fazendo a mudança $j_q^0 = \frac{\delta(\mathbf{r})}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, e $a^0 \rightarrow \sqrt{\epsilon\mu} a^0$, chega-se em

$$a_{\text{NR}}^0(\mathbf{r}) = \frac{1}{M \epsilon\mu} \left\{ \mathbf{H}_0 \left(\frac{M}{2} r \right) - Y_0 \left(\frac{M}{2} r \right) + \frac{Mr}{2} \left[\mathbf{H}_{-1} \left(\frac{M}{2} r \right) - Y_{-1} \left(\frac{M}{2} r \right) \right] \right\} \quad (3.41)$$

Cujo regime assintótico é

$$a^0(\mathbf{r}) \sim \frac{2}{\pi \epsilon\mu M^2 r^3} \quad (3.42)$$

Frequência de corte

Para a frequência de corte, nota-se que no regime não relativístico $\omega \rightarrow \frac{\omega}{\sqrt{\epsilon\mu}}$. Assim a expressão (3.30) dá, diretamente,

$$\omega_{\text{NR}} = 2\sqrt{\epsilon\mu} M \quad (3.43)$$

Todos os resultados obtidos na seção 3.1.2 são reobtidos de maneira totalmente análoga na seção 3.2.2, alterando-se apenas os fatores devido à presença agora de um meio no qual o filme supercondutor encontra-se imerso.

Capítulo 4

Efeito Meissner Quântico

4.1 O operador quântico de vórtices e suas funções de correlação

É sabido que para temperaturas próximas de $T = 0$ um tratamento clássico para os vórtices em um supercondutor não é mais satisfatório pois o sistema entra em um estado conhecido como “vidros de vórtices” [19]. Deste modo, faz-se necessário estudar os filmes supercondutores considerando que os vórtice agora possuem uma descrição quântica.

A base para este tratamento será o formalismo desenvolvido entre as décadas de 1970 e 1990 que trata os vórtices como desordens e defeitos topológicos [31, 33, 28]. Assim todos os conceitos desenvolvidos serão utilizados no contexto dos filmes supercondutores, aproveitando-se dos resultados obtidos para a teoria BF do capítulo 3.

4.1.1 A teoria quântica dos vórtices

A fim de obter um formalismo quântico para os vórtices, é necessário um operador que, quando atuando no estado de vácuo, crie autoestados do operador quântico de fluxo

magnético, *i.e.*

$$\Phi = \int d^2x J^0 = \int d^2x \epsilon^{ij} \partial_i A_j. \quad (4.1)$$

Assim sendo, se $\mu(\mathbf{x}, t)$ é o operador quântico de criação de vórtice, então

$$\Phi|\mu\rangle = \Phi[\mu(\mathbf{x}, t)|0\rangle] = \varphi_0|\mu\rangle, \quad (4.2)$$

onde φ_0 denota o quantum de fluxo magnético.

Um operador possível com essa propriedade foi desenvolvido em [31] e possui a forma

$$\mu(\mathbf{x}, t) = \exp \left\{ i2\pi \frac{\hbar c}{e} \int_{\mathbf{x}, L}^{\infty} d\mathbf{z}^i \epsilon^{ij} \Pi^j(\mathbf{z}, t) \right\}, \quad (4.3)$$

em que L é um caminho arbitrário no plano (x, y) e $\Pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i}$ é o momento canonicamente conjugado do campo A^i , que satisfaz a seguinte relação de comutação:

$$[A^i(\mathbf{x}, t), \Pi^j(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{ij} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.4)$$

A relação de comutação tempos iguais entre o operador de vórtices $\mu(\mathbf{x}, t)$ e o campo $A^i(\mathbf{y}, t)$ é obtida em [31],

$$\mu(\mathbf{x}, t) A^i(\mathbf{y}, t) = \left[A^i(\mathbf{y}, t) + \frac{\hbar c}{e} \partial_y^i \arg(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right] \mu(\mathbf{x}, t) \quad (4.5)$$

Assim, utilizando as relações (4.3) a (4.5) vê-se imediatamente que uma relação como a da equação (4.2) é obtida.

Utilizando-se uma decomposição polar usual para o campo escalar $\phi = \rho e^{i\theta}$, mostra-se que

$$\mu(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{y}, t) = [\theta(\mathbf{y}, t) + \arg(\mathbf{y} - \mathbf{x})] \mu(\mathbf{x}, t) \quad (4.6)$$

e

$$\mu(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{y}, t) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \arg(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right\} \phi(\mathbf{y}, t) \mu(\mathbf{x}, t). \quad (4.7)$$

Função de correlação dos vórtices

Para se obter uma função de correlação para os vórtices $\langle \mu(\mathbf{x}, t) \mu^\dagger(\mathbf{y}, \mathbf{t}) \rangle$ parte-se de (4.3) ou então utiliza-se o formalismo desenvolvido por Kadanoff e Ceva [31, 33, 28] para estudar operadores de desordem no modelo de Ising 2D, onde o operador de vórtice seria tratado como se fosse uma variável de desordem.

Em uma teoria com um campo eletromagnético descrito por $F^{\mu\nu}$ com simetria $U(1)$, a função de correlação dos operadores de desordem é dada por

$$\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle = Z_0^{-1} \int DA_\mu \exp \left\{ -S \left[F^{\mu\nu} + \tilde{B}^{\mu\nu} \right] \right\} \quad (4.8)$$

onde $\tilde{B}^{\mu\nu}$ é um campo magnético externo dado po

$$\tilde{B}^{\mu\nu}(x, y; L) = 2\pi \frac{\hbar c}{e} \int_{x,L}^y \epsilon^{\mu\nu\alpha} \delta^3(z - \xi) d\xi_\alpha. \quad (4.9)$$

em que L é um caminho arbitrário que liga os pontos x e y no espaço euclidiano. Pode-se mostrar, no entanto, que esta integral é independente do caminho L escolhido.

4.2 Aplicação aos filmes supercondutores

A fim de se obter uma teoria quântica para os vórtices e determinar a função de correlação entre eles para o modelo, é necessário partir-se da teoria desenvolvida no capítulo 3. Desta forma, a primeira etapa é escrever o funcional gerador associado ao lagrangiano (3.6) e integrar no campo b_μ com $j_v^\mu = 0$, obtendo assim uma teoria efetiva para o campo a_μ cujo lagrangiano será dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} f^{(a)\mu\nu} \left[\frac{\overbrace{2M(-\square)^{1/2} + M^2 + (-\square)}^{[M+(-\square)^{1/2}]^2}}{M(-\square)} \right] f_{\mu\nu}^{(a)}. \quad (4.10)$$

Consequentemente, o funcional gerador do vácuo para essa teoria é

$$Z_0 = \int Da_\mu \exp \left\{ - \int d^4x \left[\frac{1}{4} f^{(a)\mu\nu} \left\{ \frac{[M + (-\square)^{1/2}]^2}{M(-\square)} \right\} f_{\mu\nu}^{(a)} \right] \right\}. \quad (4.11)$$

4.2.1 A função de correlação em filmes supercondutores

Sabe-se que para calcular uma função de correlação de campos genéricos em TQC,

$$\langle \psi_1 \psi_2 \rangle = \frac{\int D\psi \psi_1 \psi_2 e^{-\int dx \mathcal{L}[\psi]}}{\int D\psi e^{-\int dx \mathcal{L}[\psi]}} = Z_0^{-1} \int D\psi \psi_1 \psi_2 e^{-\int dx \mathcal{L}[\psi]}$$

onde $\psi_{1,2}$ são configurações do campo ψ .

Portanto, para determinar a função de correlação para os vórtices quânticos, deve-se usar as equações (4.11) e (4.8) para montar a expressão

$$\begin{aligned} \langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle &= Z_0^{-1} \int Da_\mu \exp \left\{ - \int d^3x \left[\frac{1}{4} [f^{(a)\mu\nu} + \tilde{B}^{\mu\nu}] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left\{ \frac{[M + (-\square)^{1/2}]^2}{M(-\square)} \right\} [f_{(a)\mu\nu} + \tilde{B}_{\mu\nu}] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Efetuada-se então a integração no campo a_μ , chega-se a uma expressão para a função de correlação dada por

$$\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle = \exp \left\{ \Lambda(x, y; L) - \int d^3z \frac{1}{4} \tilde{B}^{\mu\nu} \left\{ \frac{[M + (-\square)^{1/2}]^2}{M(-\square)} \right\} \tilde{B}_{\mu\nu} \right\}, \quad (4.13)$$

O termo $\Lambda(x, y; L)$ surge da parte quadrática da integração e tem uma expressão dada por

$$\begin{aligned} \Lambda(x, y; L) &= \frac{1}{8} \int d^3z d^3z' \tilde{B}^{\mu\nu}(z) \tilde{B}^{\alpha\beta}(z') P_\lambda^{\mu\nu} P_\rho^{\alpha\beta} \\ &\quad \times \left\{ \frac{[M + (-\square)^{1/2}]^2}{M(-\square)} \right\} D^{\lambda\rho}(z - z') \left\{ \frac{[M + (-\square)^{1/2}]^2}{M(-\square)} \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

com $P_\lambda^{\mu\nu} = \partial^\mu \delta_\lambda^\nu - \partial^\nu \delta_\lambda^\mu$ e $D^{\lambda\rho}(z - z')$ é o propagador do campo de calibre representado por

$$D^{\lambda\rho} = \frac{M \delta^{\lambda\rho}}{[M + 2(-\square)^{1/2}]^2} + \text{termos de calibre}. \quad (4.15)$$

Substituindo (4.15) em (4.14), e considerando que*

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{(-\square) + 2M(-\square)^{1/2} + M^2}{M(-\square)} \right] \left[\frac{M}{2M(-\square)^{1/2} + M^2 + (-\square)} \right] \\
& \times \left[\frac{(-\square) + 2M(-\square)^{1/2} + M^2}{M(-\square)} \right] \\
& = \left[\frac{(-\square) + 2M(-\square)^{1/2} + M^2}{M(-\square)^2} \right] \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Assim, substituindo (4.16) em (4.13) chega-se em integrais que são resolvidas via transformada de Fourier. Surgem então três integrais distintas que devem ser resolvidas (tomando a transformada inversa)

$$\begin{aligned}
\text{I} &= \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{M(-\square)} \right] \\
\text{II} &= \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{(-\square)^{3/2}} \right] \\
\text{III} &= \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{M}{(-\square)^2} \right] \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Todas possuem a forma

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk \frac{k \operatorname{sen}(kr)}{(\beta^2 + k^2)^\alpha} \tag{4.18}$$

onde na primeira integral $\alpha = 1$, na segunda $\alpha = \frac{3}{2}$ e na última $\alpha = 2$.

A primeira integral é imediata. De [23] chega-se imediatamente à

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{M(-\square)} \right] = \frac{\gamma}{M|x-y|} \tag{4.19}$$

onde $\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Para resolver a segunda integral usa-se a identidade de [23]

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{2m+1} \operatorname{sen}(ax)}{(\beta^2 + x^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{(-1)^{m+1} \sqrt{\pi}}{2^n \beta^n \Gamma(n + \frac{1}{2})} \frac{d^{2m+1}}{da^{2m+1}} [a^n K_n(a\beta)] \tag{4.20}$$

*Nesta passagem o termo $[M + (-\square)^{1/2}]^2$ foi expandido a fim de se obter uma expressão mais explícita para (4.16).

onde K_n é a função de Bessel de segunda espécie.

Usando (4.20) com $m = 0$ e $n = 1$ e usando o limite da função de Bessel para $\beta \rightarrow 0$ a segunda integral fica

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{(-\square)^{3/2}} \right] = -\nu \ln(\beta |x - y|) \quad (4.21)$$

com $\nu = \sqrt{\frac{8}{\pi}}$.

A terceira integral fica, de forma análoga

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{M}{(-\square)^2} \right] = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{M}}{4\pi} \left[\frac{1}{\beta} - \frac{|x - y|}{2} \right] \quad (4.22)$$

com $\mathcal{M} = \pi M$ e $M = e^2 \rho_0^2$.

Assim, a forma final para a função de correlação já renormalizada é†

$$\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle_R = \frac{\exp \left\{ -\mathcal{M} |x - y| + \frac{\gamma}{M |x - y|} \right\}}{|x - y|^\nu}, \quad (4.23)$$

Note, pela expressão (4.23), que o tratamento quântico dos vórtices leva a uma função de correlação que decai de forma exponencial como ocorre no caso normal para os supercondutores em (3+1)D descritos pelo modelo de Higgs Abeliano na eletrodinâmica quântica usual. O tratamento via pQED muda apenas o comportamento a curtas distâncias para os vórtices quânticos que neste caso é logarítmico.

Essa forma de decaimento tem a mesma forma do efeito Meissner em supercondutores do tipo 1. Este resultado, obtido via tratamento quântico dos vórtices, difere do comportamento assintótico obtido em (3.20) via tratamento clássico. Trata-se então de um “efeito Meissner quântico”.

Existe uma relação bastante forte entre o decaimento exponencial da função de correlação de dois vórtices e a existência de um estado supercondutor uma vez que a função

†Os detalhes desta conta podem ser encontrados no apêndice A.

de correlação decai com M que é proporcional à densidade de pares de Cooper ρ_0 de maneira que sempre que $M \neq 0$ haverá um decaimento exponencial.

Capítulo 5

Considerações Finais

Foram estudadas as consequências das interações eletromagnéticas nos filmes supercondutores. O primeiro aspecto importante é que para o estudo das interações eletromagnéticas reais nesse tipo de sistema, foi necessário utilizar uma teoria efetiva que descrevesse corretamente este tipo de interação em um sistema bidimensional, a pseudo eletrodinâmica quântica. Assim, a pQED foi aplicada ao modelo BF introduzido em [25] para a descrição de supercondutores do tipo 2.

O primeiro resultado importante tem consistido na forma como o campo magnético decai no interior do filme supercondutor para um vórtice puntiforme é, para longas distâncias, inversamente proporcional a uma lei de potência $B_{r \rightarrow \infty} \propto \frac{1}{r^3}$ e não possui o comportamento exponencial esperado para os supercondutores, *i.e.*, o efeito Meissner. Este tipo de decaimento já havia sido descrito em [19].

O mesmo tipo de comportamento assintótico foi obtido para o potencial de interação entre as quasipartículas do sistema, mostrando uma outra modificação que a real descrição do eletromagnetismo de partículas confinadas promove.

Foi demonstrada também a presença de uma frequência de corte na propagação de ondas eletromagnéticas no filme supercondutor. Essa frequência mostrou-se proporcional à densidade de pares de Cooper, sendo nula na situação em que não há mais supercondutividade, de forma que em um sistema metálico em duas dimensões não há esta frequência conforme mencionado em [40].

Todos estes resultados foram reobtidos para um modelo mais realista tratando-se de matéria condensada, ou seja, considerando-se uma teoria não relativística (seção 3.2). O comportamento mostrou-se exatamente o mesmo a menos de fatores proporcionais às propriedades elétricas e magnéticas do meio material onde o filme supercondutor encontra-se imerso.

Por fim, foi estudado o comportamento do sistema quando os vórtices de Abrikosov são tratados quanticamente. Utilizando-se então um formalismo desenvolvido em [31] onde é definido um operador de criação de vórtices, foi calculada a função de correlação entre dois vórtices apresentava, para longas distâncias, um comportamento de decaimento exponencial. Tal comportamento foi associado a um **efeito Meissner quântico** que mostrou forte relação com a existência de um estado supercondutor, uma vez que este decaimento exponencial é proporcional à densidade de pares de Cooper.

Ao se comparar os resultados para os decaimentos nos capítulos 3 e 4 observa-se um comportamento similar ao descrito em [19] em diferentes fases de uma transição de fase em um filme supercondutor com desordem onde é mostrado que para um sistema sem desordem há um decaimento com inverso de lei de potência próximo da temperatura crítica.

Além disso, é observado também que na presença de desordem e com a temperatura tendendo a zero o sistema entra em uma fase chamada de vidros de vórtices em que o tratamento dos vórtices deve, necessariamente, ser quântico. Nesta fase, ocorre o “congelamento” dos vórtices, de maneira que um supercondutor do tipo 2 passa a ser totalmente análogo a um supercondutor do tipo 1, apresentando então o efeito Meissner, *i.e.*, decaimento exponencial [18].

Uma continuação natural deste trabalho seria estudar o efeito das interações eletromagnéticas em transições de fase, *e.g.* transição isolante-supercondutor, além de sistemas mais complexos contendo impurezas ou outros meios diferentes do vácuo ao redor do filme supercondutor.

Esta tese dará origem a um artigo que está em fase final de confecção [34].

Apêndice A

Função de correlação de dois vórtices

Neste apêndice serão apresentados os cálculos necessários que levam à equação (4.23). Detalhes deste procedimento também podem ser encontrados em [36].

Para se efetuar esses cálculos, é necessário então partir de

$$\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle = \exp \left\{ \Lambda(x, y; L) - \int d^3 z \frac{1}{4} \tilde{B}^{\mu\nu} \left\{ \frac{[M + (-\square)^{1/2}]^2}{M(-\square)} \right\} \tilde{B}_{\mu\nu} \right\} \quad (\text{A.1})$$

É necessário também escrever a expressão para o campo externo $\tilde{B}^{\mu\nu}$.

$$\tilde{B}^{\mu\nu}(x, y; L) = 2\pi \frac{\hbar c}{e} \int_{x,L}^y \epsilon^{\mu\nu\alpha} \delta^3(z - \xi) d\xi_\alpha. \quad (\text{A.2})$$

A.1 Cálculo de $\Lambda(x, y; L)$

Começa-se calculando o primeiro termo da exponencial de (A.1) dado por

$$\begin{aligned} \Lambda(x, y; L) &= \frac{1}{8} \int d^3 z d^3 z' \tilde{B}^{\mu\nu}(z) \tilde{B}^{\alpha\beta}(z') P_\lambda^{\mu\nu} P_\rho^{\alpha\beta} \\ &\times \left\{ \frac{[M + (-\square)^{1/2}]^2}{M(-\square)} \right\} D^{\lambda\rho}(z - z') \left\{ \frac{[M + (-\square)^{1/2}]^2}{M(-\square)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Substituindo a expressão (A.2) em (A.3) pode-se obter a seguinte expressão*

$$\Lambda(x, y; L) = \frac{\pi^2}{2} \int d^3 z d^3 z' \int_{x,L}^y d\xi_\sigma d\xi'_\gamma \epsilon^{\mu\nu\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \delta^3(z - \xi) \delta^3(z' - \xi') \underbrace{P_\lambda^{\mu\nu} P_\rho^{\alpha\beta} \delta^{\lambda\rho}}_{P_\lambda^{\mu\nu} P_\lambda^{\alpha\beta}} \left\{ \frac{[M + (-\square)^{1/2}]^2}{M(-\square)^2} \right\}$$

onde já se utilizou a relação para o propagador $D^{\lambda\rho}$ dada em (4.15).

*Fazendo-se $\hbar = c = e = 1$.

As integrais em z e z' são triviais e, após fazê-las, chega-se à expressão

$$\Lambda(x, y; L) = \frac{\pi^2}{2} \int_{x,L}^y d\xi_\sigma d\xi'_\sigma \epsilon^{\mu\nu\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} P_\lambda^{\mu\nu} P_\lambda^{\alpha\beta} \left\{ \frac{[M + (-\square)^{1/2}]^2}{M(-\square)^2} \right\} \quad (\text{A.4})$$

Usando $P_\lambda^{\mu\nu} = \partial^\mu \delta_\lambda^\nu - \partial^\nu \delta_\lambda^\mu$ em (A.4), fica-se com o seguinte termo a ser contraído:

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} (\partial^\mu \delta_\lambda^\nu - \partial^\nu \delta_\lambda^\mu) (\partial^\alpha \delta_\lambda^\beta - \partial^\beta \delta_\lambda^\alpha) \quad (\text{A.5})$$

Que pode ser desenvolvido como

$$\begin{aligned} & \epsilon^{\mu\nu\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} (\partial^\mu \partial^\alpha \delta_\beta^\nu + \partial^\nu \partial^\beta \delta_\alpha^\nu - \partial^\mu \partial^\beta \delta_\beta^\nu - \partial^\mu \partial^\beta \delta_\alpha^\nu) = \\ & = \epsilon^{\mu\nu\sigma} \epsilon^{\alpha\nu\gamma} \partial^\mu \partial^\alpha + \epsilon^{\mu\nu\sigma} \epsilon^{\mu\beta\gamma} \partial^\nu \partial^\beta - \epsilon^{\mu\nu\sigma} \epsilon^{\alpha\mu\gamma} \partial^\nu \partial^\alpha - \epsilon^{\mu\nu\sigma} \epsilon^{\nu\beta\gamma} \partial^\mu \partial^\beta \end{aligned}$$

empregando-se a identidade $\epsilon^{abc} \epsilon^{ijc} = \delta^{ai} \delta^{bj} - \delta^{aj} \delta^{bi}$ e lembrando que $\epsilon^{abc} = -\epsilon^{acb}$ obtém-se a seguinte identidade

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} P_\lambda^{\mu\nu} P_\lambda^{\alpha\beta} = 4 (\partial^2 \delta^{\sigma\gamma} - \partial^\sigma \partial^\gamma) \quad (\text{A.6})$$

Assim, substituindo (A.6) em (A.4)

$$\Lambda(x, y; L) = 2\pi^2 \int_{x,L}^y d\xi_\sigma d\xi'_\sigma \frac{[M + (-\square)^{1/2}]^2}{M(-\square)} - 2\pi^2 \int_{x,L}^y d\xi_\sigma d\xi'_\sigma \partial^\sigma \partial^\gamma \frac{[M + (-\square)^{1/2}]^2}{M(-\square)^2} \quad (\text{A.7})$$

onde se usou que $\partial^2 = -\square$ para eliminar um fator $-\square$ no primeiro termo.

Introduzindo-se então (A.7) em (A.1) há um cancelamento do primeiro termo de (A.7) com o segundo termo de (A.1), ficando assim

$$\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle = \exp \left\{ -2\pi^2 \int_{x,L}^y d\xi_\sigma d\xi'_\sigma \partial^\sigma \partial^\gamma \frac{[M + (-\square)^{1/2}]^2}{M(-\square)^2} \right\} \quad (\text{A.8})$$

Esta integral em (A.8) pode ser resolvida usando-se as relações obtidas nas equações (4.17), portanto:

$$\int_{x,L}^y d\xi_\sigma d\xi'_\sigma \partial^\sigma \partial^\gamma \left\{ -\nu \ln(\beta |\xi - \xi'|) + \frac{\mathcal{M}}{4\pi} \left[\frac{1}{\beta} - \frac{|\xi - \xi'|}{2} \right] + \frac{\gamma}{M|\xi - \xi'|} \right\} \quad (\text{A.9})$$

Note que tanto a integral em ξ como a integral em ξ' são integrais da derivada dessas funções em relação a ξ e ξ' . Assim, pelo teorema fundamental do cálculo, as integrais em (A.9) são triviais. É fácil ver que os termos $\frac{1}{\beta}$ e $\ln \beta$ se cancelam ao se tomar as derivadas por serem constantes.

Assim sendo, nas funções do integrando surgirão termos $|x - y|$, $|y - x|$, $|x - x|$ e $|y - y|$, no lugar de $|\xi - \xi'|$. Os termos $|x - x|$ e $|y - y|$ tem a ver com a renormalização da auto energia e serão excluídos. Introduzindo estes resultados em (A.9) chega-se finalmente na relação final para a função de correlação obtida em (4.23)

$$\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle_R = \frac{\exp \left\{ -\mathcal{M}|x - y| + \frac{\gamma}{M|x - y|} \right\}}{|x - y|^\nu}, \quad (\text{A.10})$$

Bibliografia

- [1] Graphenea. 2
- [2] Nist digital library of mathematical functions. 23
- [3] A. A. Abrikosov. Nobel Lecture: Type-II superconductors and the vortex lattice. *Reviews of Modern Physics*, 76(3 I):975–979, 2004. 8
- [4] Alexei A Abrikosov. An influence of the size on the critical field for type ii superconductors. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 86, pages 489–492, 1952. 8, 14
- [5] Van Sérgio Alves, Wallace S Elias, Leandro O Nascimento, Vladimir Juričić, and Francisco Peña. Chiral symmetry breaking in the pseudo-quantum electrodynamics. *Physical Review D*, 87(12):125002, 2013. 4, 18
- [6] Tsuneya Ando, Alan B. Fowler, and Frank Stern. Electronic properties of two-dimensional systems. *Reviews of Modern Physics*, 54(2):437–672, 1982. 1, 2
- [7] N Ashcroft and D Mermim. *Solid State Physics*. Cengage Learning, 1st edition, 1976.
- [8] Phaedon Avouris and Fengnian Xia. Graphene applications in electronics and photonics. *Mrs Bulletin*, 37(12):1225–1234, 2012. 2
- [9] J. Bardeen. Theory of the Meissner effect in superconductors. *Physical Review*, 97(6):1724–1725, 1955. 7, 10

- [10] John Bardeen, Leon N Cooper, and J Robert Schrieffer. Microscopic theory of superconductivity. *Physical Review*, 106(1):162, 1957. 7, 10
- [11] John Bardeen, Leon N Cooper, and J Robert Schrieffer. Theory of superconductivity. *Physical Review*, 108(5):1175, 1957. 7, 10, 11
- [12] John M Blatt and Colin J Thompson. Shape resonances in superconducting thin films. *Physical Review Letters*, 10(8):332, 1963. 1, 2
- [13] a. H. Castro Neto, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, and a. K. Geim. The electronic properties of graphene. *Reviews of Modern Physics*, 81(1):109–162, jan 2009. 2
- [14] T. C. Chiang. Superconductivity in Thin Films. *Science*, 306(5703):1900–1901, 2004. 1
- [15] Leon N. Cooper. Bound electron pairs in a degenerate fermi gas. *Physical Review*, 104(4):1189–1190, 1956. 7, 10
- [16] AP Drozdov, MI Eremets, IA Troyan, V Ksenofontov, and SI Shylin. Conventional superconductivity at 203 kelvin at high pressures in the sulfur hydride system. *Nature*, 2015. 8
- [17] Xu Du, Ivan Skachko, Anthony Barker, and Eva Y Andrei. Approaching ballistic transport in suspended graphene. *Nature nanotechnology*, 3(8):491–495, 2008. 18
- [18] Matthew Fisher. Vortex-glass superconductivity: A possible new phase in bulk high- T_c oxides. *Physical Review Letters*, 62(12):1415–1418, 1989. 40
- [19] Matthew P A Fisher. Quantum phase transitions in disordered two-dimensional superconductors. *Physical Review Letters*, 65(7):923–926, 1990. 23, 32, 39, 40
- [20] H. Fröhlich. Theory of the superconducting state. I. The ground state at the absolute zero of temperature. *Physical Review*, 79(5):845–856, 1950. 7, 10

- [21] Andre K Geim and Konstantin S Novoselov. The rise of graphene. *Nature materials*, 6(3):183–191, 2007. 2
- [22] V L Ginzburg and L D Landau. On the Theory of Superconductivity. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 1064:113–137, 1950. 6, 12, 14
- [23] I S Gradshteyn and I M Rizhik. *Table of Integrals, Series and Products*. Elsevier, 8th edition, 2014. 23, 36
- [24] Yang Guo, Yan-Feng Zhang, Xin-Yu Bao, Tie-Zhu Han, Zhe Tang, Li-Xin Zhang, Wen-Guang Zhu, EG Wang, Qian Niu, ZQ Qiu, et al. Superconductivity modulated by quantum size effects. *Science*, 306(5703):1915–1917, 2004. 1, 2
- [25] TH Hansson, Vadim Oganesyan, and SL Sondhi. Superconductors are topologically ordered. *Annals of Physics*, 313(2):497–538, 2004. 15, 19, 39
- [26] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, 3rd edition, 1998. 3
- [27] C. Jagadish and S. J. Pearton. *Zinc Oxide Bulk, Thin Films and Nanostructures*. Elsevier, 1st edition, 2006. 2
- [28] Leo P Kadanoff and Horacio Ceva. Determination of an operator algebra for the two-dimensional ising model. *Physical Review B*, 3(11):3918, 1971. 32, 34
- [29] Yen Hsiang Lin, J. Nelson, and A. M. Goldman. Superconductivity of very thin films: The superconductor-insulator transition. *Physica C: Superconductivity and its Applications*, 514:130–141, 2015. 1, 2
- [30] Fritz London and Heinz London. The electromagnetic equations of the supraconductor. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 149, pages 71–88. The Royal Society, 1935. 6

- [31] E. C. Marino. Quantum theory of nonlocal vortex fields. *Physical Review D*, 38(10):3194, 1988. 32, 33, 34, 40
- [32] E. C. Marino. Quantum electrodynamics of particles on a plane and the chern-simons theory. *Nuclear Physics B*, 408(3):551–564, 1993. 3, 15, 17
- [33] E. C. Marino. A new quantum vortex operator and its correlation functions. *International Journal of Modern Physics A*, 10(30):4311–4324, 1995. 32, 34
- [34] E. C. Marino, T H Hansson, D. Niemyer, and Van Sergio Alves. Electronic interactions in superconducting films: Classic \times quantum meissner effect. 41
- [35] E. C. Marino, Leandro O Nascimento, Van Sergio Alves, and C Morais Smith. Interaction induced quantum valley hall effect in graphene. *Physical Review X*, 5(1):011040, 2015. 18
- [36] E. C. Marino and J. A. Swieca. Order, disorder and generalized statistics. *Nuclear Physics, Section B*, 170(1):175–186, 1980. 42
- [37] Emanuel Maxwell. Isotope effect in the superconductivity of mercury. *Physical Review*, 78(4):477, 1950. 10
- [38] Natália Menezes, Van Sérgio Alves, et al. Valley- and spin-splitting due to interactions in graphene. 2016. 4, 18
- [39] Leandro O Nascimento, Van Sérgio Alves, Francisco Peña, C Morais Smith, and EC Marino. Chiral-symmetry breaking in pseudoquantum electrodynamics at finite temperature. *Physical Review D*, 92(2):025018, 2015. 18
- [40] P Phillips. *Advanced Solid State Physics*. Westview Press, 8th edition, 2003. 11, 27, 39

- [41] C. A. Reynolds, B. Serin, and L. B. Nesbitt. The Isotope Effect in Superconductivity. I. Mercury. *Physical Review*, 84(4):691–694, 1951. 10
- [42] X-G Wen. *Quantum Field Theory of Many-body Systems*. Oxford Graduate Texts, 1st edition, 2004. 28
- [43] A. Zee. *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton University Press, 2nd edition, 2010. 28