



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE FÍSICA

**Laços de Wilson e Entropia de Emaranhamento  
quântico em fundos de D3, M2 e M5 branas a partir  
da Holografia**

**Edward Samuel Quijada Orellana**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

**Orientador: Henrique Boschi Filho**

Rio de Janeiro  
Setembro de 2017

P103 Quijada, Edward

Laços de Wilson e Entropia de Emaranhamento quântico em fundos de D3, M2 e M5 branas a partir da Holografia/Edward Samuel Quijada Orellana- Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2017.

xiv, 89f.

Orientador: Henrique Boschi Filho

Tese (doutorado) - UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-graduação em Física, 2017.

Referências Bibliográficas: f. 83-89.

1. Dualidade AdS/CFT. 2. Laços de Wilson. 3. D-branas. 4. Entropia de Emaranhamento. 5. Supergravidade. 6. Teoria de cordas. I. Henrique Boschi Filho. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Física. III. Título/Edward Samuel Quijada Orellana- Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2017.

# Resumo

## Laços de Wilson e Entropia de Emaranhamento em fundos de D3, M2 e M5 branas a partir da Holografia

Edward Samuel Quijada Orellana

Orientador: Henrique Boschi Philo

Resumo da Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

No contexto das aplicações da conjectura de Maldacena (também chamada de holografia ou dualidade AdS/CFT), neste trabalho de tese apresentamos, em primeiro lugar, um estudo dos potenciais de interação quark-antiquark em teorias de calibre (quando elas existirem) duais a teorias de corda (ou teoria M) em fundos de supergravidade gerados por D3, M2 e M5 branas. A obtenção destes potenciais de interação é possível graças à derivação holográfica dos laços de Wilson, a qual foi proposta por Maldacena e Rey-Yee (proposta MR Y). Além disso, neste trabalho também fazemos um estudo e análise das entropias de emaranhamento quântico destas mesmas teorias de calibre. Isto é feito a partir da derivação holográfica da entropia de emaranhamento, a qual foi proposta por Ryu e Takayanagi.

**Palavras-chave:** Dualidade AdS/CFT, laços de Wilson, D-branas, entropia de emaranhamento, supergravidade, teoria de cordas.

# Abstract

## Wilson loops and Entanglement Entropy on D3, M2 e M5 brane backgrounds from Holography

Edward Samuel Quijada Orellana

**Orientador:** Henrique Boschi Filho

*Abstract* da Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

In the context of applications of Maldacena's conjecture (also called holography or AdS/CFT duality), in this thesis we study and analyze the quark-antiquark potential interaction in gauge field theories (when they exist) dual to string/M-theory on supergravity backgrounds generated by D3, M2 and M5 branes. This is possible in virtue of the holographic derivation of Wilson loops proposed by Maldacena and Rey-Yee (MRY proposal). Furthermore, here we study and analyze the quantum entanglement entropy in these gauge field theories. This is possible in virtue of the holographic derivation of entanglement entropy proposed by Ryu and Takayanagi.

**Keywords:** Wilson loops, AdS/CFT correspondence, entanglement entropy, string theory, M-theory, D-branes, supergravity.

## Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar ao professor Henrique pela dedicação e paciência que teve comigo nestes anos de doutorado em que me orientou. Também devo agradecer aos professores Carlos Núñez e Carlos Hoyos pelas esclarecimentos que me fizeram a respeito do trabalho de laços de Wilson.

Também quero agradecer à minha família, ao meu pai Janio e à minha irmã Jane, especialmente à minha mãe Crisalida quem sempre me encorajou, alentou e apoiou nos estudos, devo muito a ela.

Também agradeço aos amigos e colegas do Instituto de Física. Eles formaram e formam uma parte importante na minha vida.

Também quero agradecer especialmente à Miluzca pela paciência e apoio nos últimos anos de doutorado.

Finalmente agradeço ao CNPq pela bolsa de estudo que me permitiu realizar a pesquisa científica durante o doutorado.

# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Correspondência AdS/CFT . . . . .	2
1.1.1 D3 branas . . . . .	5
1.1.2 M2 branas . . . . .	5
1.1.3 M5 branas . . . . .	6
1.1.4 O dicionário holográfico . . . . .	6
1.2 Laço de Wilson e holografia . . . . .	7
1.2.1 Linha de Wilson . . . . .	7
1.2.2 Laço de Wilson . . . . .	8
1.2.3 Proposta holográfica . . . . .	9
1.3 Entropia de emaranhamento quântico na holografia . . . . .	12
<b>2 Potenciais de interação quark-antiquark em fundos de M2 e M5 branas</b>	<b>16</b>
2.1 Formulação da membrana . . . . .	19
2.2 Fundo de supergravidade em $D = 11$ gerado por M2 branas . . . . .	20
2.2.1 Configuração Estática . . . . .	21

2.2.2	Corda longe do horizonte . . . . .	23
2.2.3	Corda perto do horizonte . . . . .	25
2.3	Fundo de supergravidade em $D = 11$ gerado por $N$ M5 branas. . . . .	26
2.3.1	Configuração estática . . . . .	26
2.3.2	Corda longe do horizonte . . . . .	29
2.3.3	Corda perto do horizonte . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Estudo numérico das transições entre estados de confinamento geométrico nas interações quark-antiquark em D3, M2 e M5 branas.</b>	<b>32</b>
3.1	Potenciais de interação quark-antiquark para D3 brana . . . . .	33
3.1.1	Corda perto do horizonte . . . . .	33
3.1.2	Corda longe do horizonte . . . . .	35
3.1.3	Regime intermediário no espaço de fundo . . . . .	37
3.2	Potenciais de interação quark-antiquark na M2 brana . . . . .	39
3.2.1	Corda perto do horizonte . . . . .	40
3.2.2	Corda longe do horizonte . . . . .	42
3.2.3	Transição desconfinamento/confinamento . . . . .	43
3.3	Potenciais de interação quark-antiquark na M5 brana . . . . .	45
3.3.1	Corda perto do horizonte . . . . .	47
3.3.2	Corda longe do horizonte . . . . .	48
3.3.3	Transição do potencial de interação na M5 brana . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Entropia de emaranhamento quântico em fundos de D3 branas, M2 branas e M5 branas.</b>	<b>53</b>
4.1	Entropia de emaranhamento na D3 brana . . . . .	53
4.1.1	Faixa retangular . . . . .	54
4.1.2	Limite perto do horizonte . . . . .	57
4.1.3	Limite longe do horizonte . . . . .	58

4.1.4	Análise numérica da entropia de emaranhamento quântico no fundo de D3 brana . . . . .	59
4.2	Entropia de emaranhamento quântico para um fundo de M2 brana . . . . .	61
4.2.1	Faixa retangular . . . . .	62
4.2.2	Limite perto do horizonte . . . . .	64
4.2.3	Limite longe do horizonte . . . . .	65
4.2.4	Análise numérica da entropia de emaranhamento quântico no fundo de M2 brana . . . . .	66
4.3	Entropia de emaranhamento quântico para um fundo de M5 brana . . . . .	68
4.3.1	Faixa retangular . . . . .	69
4.3.2	Limite perto do horizonte . . . . .	72
4.3.3	Limite longe do horizonte . . . . .	73
4.3.4	Análise numérica da entropia de emaranhamento quântico no fundo de M5 brana . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>77</b>
<b>A</b>	<b>Potenciais de interação quark-antiquark para D3-brana</b>	<b>79</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>83</b>



# Lista de Figuras

1.1	Modelo de Dp-branas e cordas abertas e fechadas. . . . .	3
1.2	Laço retangular no espaço-tempo de Minkowski. . . . .	9
1.3	Folha do mundo de uma corda associada com o laço de Wilson. . . . .	9
1.4	Subsistemas $A$ e $B$ em uma teoria quântica de campos. . . . .	12
1.5	Superfície $\gamma_A$ . . . . .	14
2.1	Membrana tubular . . . . .	17
2.2	Potencial $V(L)$ para uma geometria quase-chata $r_0 \gg R_2$ . . . . .	24
2.3	Potencial $V(L)$ para uma geometria quase-chata $r_0 \gg R_5$ . . . . .	30
3.1	Dependência de $L/R$ com $r_0/R$ , onde, $r_1/R = 10^5$ e $r_0/R < 5 \times 10^{-4}$ . . .	34
3.2	Dependência de $l_s^2 V/R$ com $r_0/R$ , onde, $r_1/R = 10^5$ e $r_0/R < 5 \times 10^{-4}$ . . .	34
3.3	Dependência do Potencial de interação $l_s^2 V/R$ com a separação $L/R$ , onde, $r_1/R = 10^5$ e $r_0/R < 5 \times 10^{-4}$ . . . . .	35
3.4	Dependência da separação $L/R$ com a posição $r_0/R$ , onde, $r_1/R = 10^5$ e $r_0/R > 10^3$ . . . . .	35
3.5	Dependência do potencial $l_s^2 V/R$ com a posição $r_0/R$ , onde, $r_1/R = 10^5$ e $r_0/R > 10^3$ . . . . .	36
3.6	Dependência de $l_s^2 V/R$ com a distância $L/R$ , onde, $r_1/R = 10^5$ e $r_0/R > 10^3$ . . .	36
3.7	Dependência da separação $L/R$ com a posição $r_0/R$ , onde, $r_1/R = 10^5$ e $r_0/R < 0.2$ . . . . .	38

3.8	Dependência do potencial de interação $V$ com $r_0$ , onde, $r_1/R = 10^5$ . . . . .	39
3.9	Transição no comportamento do potencial $V(L)$ , onde, $r_1/R = 10^5$ . . . . .	39
3.10	Dependência de $L/R_2$ com a posição $r_0/R$ , onde, $r_1/R_2 = 10^4$ , $r_0/R_2 < 5 \times 10^{-3}$ . . . . .	40
3.11	Dependência de $l_{11}^3 V/R_2^2$ com a posição $r_0/R$ , onde, $r_1/R_2 = 10^4$ , $r_0/R_2 < 5 \times 10^{-3}$ . . . . .	41
3.12	Potencial $l_{11}^3 V/R_2^2$ entre quarks na M2 brana em função a $L/R_2$ , onde, $r_1/R_2 = 10^4$ e $r_0/R_2 < 5 \times 10^{-3}$ . . . . .	41
3.13	Distância entre quarks $L/R_2$ na M2 brana como função de $r_0/R_2$ , onde, $r_1/R = 10^4$ e $r_0/R_2 > 10^2$ . . . . .	42
3.14	Potencial $l_{11}^3 V/R_2^2$ entre quarks na M2 brana como função de $r_0/R_2$ , onde, $r_1/R = 10^4$ e $r_0/R_2 > 10^2$ . . . . .	43
3.15	Potencial $l_{11}^3 V/R^2$ com respeito a distância $L/R_2$ entre quarks na M2 brana, onde, $r_1/R = 10^4$ e $r_0/R_2 > 10^2$ . . . . .	43
3.16	Distância entre quarks na M2 brana $L/R_2$ com respeito a $r_0/R_2$ , onde, $r_1/R_2 = 10^4$ , $r_0/R_2 \leq 1$ e $r^*/R_2 = 0.500$ . . . . .	44
3.17	Potencial $l_{11}^3 V/R_2^2$ entre quarks na M2 brana como função de $r_0/R_2$ , onde, $r_1/R_2 = 10^4$ , $r_0/R_2 \leq 1$ e $r_m/R_2 = 0.590$ . . . . .	45
3.18	Potencial $l_{11}^3 V/R_2^2$ entre quarks na M2 brana como função de $L/R_2$ . . . . .	46
3.19	Distância $L/R_5$ entre quarks na M5 brana como função de $r_0/R_5$ , onde, $r_1/R_5 = 10^2$ e $r_0/R_5 < 5 \times 10^{-5}$ . . . . .	47
3.20	Potencial $l_{11}^3 V/R_5^2$ entre quarks na M5 brana como função de $r_0/R_5$ , onde, $r_1/R_5 = 10^2$ e $r_0/R_5 < 5 \times 10^{-5}$ . . . . .	48
3.21	Potencial $l_{11}^3 V/R_5^2$ entre quarks na M5 brana em função da distância $L/R_5$ , onde, $r_1/R_5 = 10^2$ e $r_0/R_5 < 8 \times 10^{-5}$ . . . . .	48
3.22	Distância $L/R_5$ entre quarks na M5 brana em função de $r_0/R_5$ , onde, $r_1/R_5 = 10^6$ e $r_0/R_5 > 10^3$ . . . . .	49

3.23	Potencial $l_{11}^3 V/R_5^2$ entre quarks na M5 brana em função de $r_0/R_5$ , onde, $r_1/R_5 = 10^6$ e $r_0/R_5 > 10^3$ . . . . .	49
3.24	Potencial de interação $l_{11}^3 V/R_5^2$ entre quarks na M5 brana como função da distância $L/R_5$ , onde, $r_1/R_5 = 10^6$ e $r_0/R_5 > 10^3$ . . . . .	50
3.25	Distância $L/R_5$ entre quarks na M5 brana em função de $r_0/R_5$ , onde, $r_1/R_5 = 10^2$ , $r_0/R_5 < 0.7$ e $r^*/R_5 = 0.26$ . . . . .	51
3.26	Potencial de interação $l_{11}^3 V/R_5^2$ entre quarks na M5 brana em função de $r_0/R_5$ , onde, $r_1/R_5 = 10^2$ e $r_0/R_5 < 0.8$ . . . . .	52
3.27	Potencial de interação $l_{11}^3 V/R_5^2$ entre quarks na M5 brana em função da separação $L/R_5$ , onde, $r_1/R_5 = 10^2$ , $r_0/R_5 < 0.8$ . . . . .	52
4.1	Perfil $X(r)$ da superfície $\gamma_A$ . . . . .	55
4.2	Largura da faixa $l/R$ em função de $r_a/R$ , onde, $r_b/R = 10^3$ e $r_a/R < 0.4$ . . . . .	59
4.3	Largura da faixa $l/R$ em função de $r_a/R$ , onde, $r_b/R = 10^4$ e $r_a/R > 10$ . . . . .	60
4.4	Entropia de emaranhamento $s(\frac{l}{R})$ para $r_b/R = 10^3$ e $r_a/R < 0.4$ . . . . .	61
4.5	Entropia de emaranhamento $s(\frac{l}{R})$ para $r_b/R = 10^4$ e $r_a/R > 10$ . . . . .	61
4.6	Largura $l/R_2$ em função de $r_a/R_2$ , sendo o valor de corte $r_b/R_2 = 10^2$ . . . . .	67
4.7	Largura $l/R_2$ em função de $r_a/R_2$ , sendo o valor de corte $r_b/R_2 = 10^3$ . . . . .	67
4.8	Entropia $s(\frac{l}{R_2})$ , sendo o valor de corte $r_b/R_2 = 10^2$ . . . . .	68
4.9	Entropia adimensional $s(l/R_2)$ para o valor de corte $r_b/R_2 = 10^3$ . . . . .	69
4.10	Largura $l/R_5$ em função de $r_a/R_5$ na região $r_a/R_5 < 0.2$ , sendo o valor de corte $r_b/R_5 = 10^3$ . . . . .	74
4.11	Entropia de emaranhamento adimensional $s(l/R_5)$ para o valor de corte de $r_b/R_5 = 10^3$ . . . . .	75
4.12	Largura $l/R_5$ como função de $r_a/R_5$ para a região $r_a/R_5 > 4$ e valor de corte $r_b/R_5 = 5 \times 10^3$ . . . . .	75

4.13 Entropia de emaranhamento adimensional $s(l/R_5)$ para região $r_a/R_5 > 4$ e valor de corte $r_b/R_5 = 5 \times 10^3$ . . . . .	76
A.1 Posição do quark $q$ e do anti-quark $\bar{q}$ na D3-brana (representada aqui pelo eixo $x$ ) junto com a corda estática representada pela curva que conecta $q$ e $\bar{q}$ através de $r_0$ . . . . .	80

# Lista de Tabelas

- 3.1 Alguns valores de  $r^*/R$  obtidos a partir da eq.(3.6) para diferentes valores de  $r_1/R$ . . . . . 38
- 3.2 Algumas soluções  $r^*/R_2$  da eq.(3.9) para diferentes valores de  $r_1/R_2$ . . . . 44
- 3.3 Algumas raízes  $r^*/R_5$  da eq.(3.12) para diferentes valores de  $r_1/R_5$ . . . . . 51



# Capítulo 1

## Introdução

Originalmente a teoria de cordas foi proposta para explicar a grande quantidade de mesões e hádrons que foram descobertas experimentalmente nos anos 1960. A ideia era considerar as diferentes excitações da corda como estas partículas. Logo depois descobriu-se que os mesões e hádrons estão formados de quarks e glúons (partículas mensageiras entre os quarks), os quais são descritos pela QCD.

A cromodinâmica quântica (QCD) é a teoria de calibre  $SU(3)$  que descreve as interações fortes entre partículas que possuem carga de cor. Um fenômeno interessante que surge na QCD a baixas energias é a propriedade chamada de confinamento que permite as partículas com carga de cor formar sempre estados ligados de mésons ou outros hádrons na natureza. Quer dizer que a baixas energias não existem quarks livres na natureza, já em altas energias a QCD possui liberdade assintótica e os quarks podem estar livres formando um plasma de quarks e glúons. Lembremos que no caso de outras interações fundamentais (eletromagnéticas e gravitação), a intensidade delas diminui com a separação e podem desprezar-se para uma separação grande. Porém, para as interações fortes, a força entre partículas com cor não diminui com a distância, de modo que o potencial entre quarks é aproximadamente de forma linear para separações grandes.

Infelizmente, não há uma derivação analítica que explique o confinamento em nenhuma teoria de calibre não-abeliana  $SU(N)$ . No caso da QCD ( $N = 3$ ) isso resulta no fato de que o confinamento é um fenômeno de baixas energias onde um alto acoplamento domina

a QCD e aparecem efeitos não-perturbativos.

Existem muitos modelos efetivos que estudam o fenômeno de confinamento da força forte ( para uma revisão ver [1]), em particular podemos mencionar o enfoque de Gribov-Zwanziger (ver [2, 3, 4]) que é estudado por pesquisadores da UERJ, e os modelos AdS/QCD que são uma extensão não-conforme da correspondência AdS/CFT [5].

De fato, uma forma de estudar o confinamento de quarks em modelos de super Yang-Mills  $SU(N)$  com  $N$  grande surgiu a partir da correspondência AdS/CFT utilizando os laços de Wilson. Este esquema envolve o cálculo de áreas da folha de mundo de uma corda cujas pontas estão coladas a uma brana e representam os quarks. A obtenção dos potenciais quark-antiquark neste esquema resulta ter uma simplicidade vantajosa.

Uma outra aplicação da correspondência AdS/CFT consiste em prover uma proposta para o cálculo da entropia de emaranhamento quântico nas teorias de calibre com  $N$  grande. Esta proposta é parecida a dos laços de Wilson, porém, neste caso a entropia de emaranhamento envolve o cálculo de áreas de superfícies que tenham por fronteira a mesma fronteira que divide o sistema físico em dois subsistemas.

## 1.1 Correspondência AdS/CFT

A correspondência AdS/CFT é uma dualidade (ou equivalência) entre teorias de cordas/teorias M em espaços curvos de  $AdS_{p+2}$ <sup>1</sup>, compatificadas na esfera  $S^{d-1}$ , e certas teorias de campo na fronteira desse espaço. A fronteira do  $AdS_{p+2}$  resulta ser o espaço chato de Minkowski  $M_{p+1}$ . Devido principalmente as comparações entre as simetrias das teorias de cordas/teorias M em esse espaços, e, as simetrias em teorias de campo na fronteira do  $AdS_{p+2}$ , Maldacena [6] propôs que aquelas teorias de campo deviam ser as teorias de super Yang-Mills  $SU(N)$ , com simetria conforme e com  $N$  muito grande<sup>2</sup>. Se-

---

<sup>1</sup>O espaço de Anti de Sitter de  $p + 2$  dimensões, denotado como  $AdS_{p+2}$ , é uma solução das equações de Einstein com constante cosmológica positiva e curvatura constante negativa.

<sup>2</sup>O limite de  $N$  muito grande em teorias de calibre é conhecido como o limite de 't Hooft, já que foi ele quem propôs estudar as teorias de calibre nesse limite, como uma abordagem que eventualmente se aproximaria à QCD.



guidamente à aparição da correspondência, esta foi desenvolvida com maior detalhe em [7, 8], onde se mostra como fazer cálculos de funções de correlação na teoria de campos, utilizando a teoria dual de gravidade. Algumas revisões da correspondência podem ser encontradas em [9, 10].

A correspondência, embora não tenha sido provada, pelo qual também é chamada de conjectura de Maldacena, é utilizada em muitos casos como um enfoque não-perturbativo da respectiva teoria de campos dual. A correspondência tem-se convertido em um dos avanços conceituais mais importantes da física teórica da década dos anos 1990.

A ideia da conexão entre as teorias de calibre com  $N$  grande e as teorias de corda/teoria M surgiu do estudo das  $Dp$ -branas na teoria de cordas [11]. As  $Dp$ -branas são objetos de  $p$  dimensões que aparecem na teoria de cordas, contendo os extremos das cordas abertas, já as cordas fechadas não tocam as  $Dp$ -branas (ver fig.1.1). Uma propriedade importante das  $Dp$ -branas é que elas se acoplam a tensores de calibre, de modo que, uma coleção de  $N$   $Dp$ -branas coincidentes confina um campo de calibre com grupo de simetria  $U(N)$ . As  $Dp$ -branas acopladas a tensores de calibre antisimétricos são estáveis, já as que não, geralmente, são instáveis.

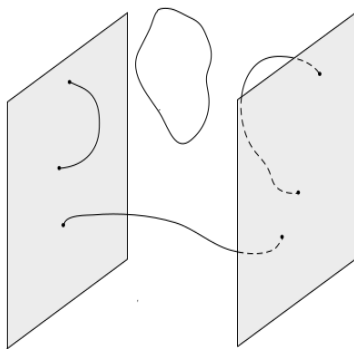


Figura 1.1: Modelo de  $Dp$ -branas e cordas abertas e fechadas.

As  $Dp$ -branas também são entendidas como aquelas que geram soluções clássicas da teoria de supergravidade. A teoria de supergravidade é o limite a baixas energias da teoria de cordas/teoria M [9], cuja ação efetiva pode ser representada de forma geral da

seguinte forma:

$$S = \frac{1}{2\kappa_D^2} \int d^D x \sqrt{g} \left\{ R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \sum_n e^{a_n \phi} F_n^2 + \dots \right\}, \quad (1.1)$$

onde,  $2\kappa_D^2 = 16\pi G_D$  é a constante de Newton em  $D$  dimensões,  $\phi$  é o dÍlaton e  $F_n$  é a  $n$ -forma pertencente ao setor RR<sup>3</sup> e  $a_n = -\frac{1}{2}(n - 5)$ . As reticências representam termos fermiônicos e formas no setor NS-NS<sup>4</sup> que são desconsiderados para o caso das soluções de  $Dp$ -branas.

Ao escrever esta ação também foram desconsiderados termos de acoplamento, já que estamos interessados em soluções estáticas correspondentes a  $p$ -branas chatas, translacionalmente invariantes e isotrópicas nas direções transversais. Em particular, para a supergravidade em  $D = 11$ , temos que  $a = 0$  e  $\phi = 0$ . A  $p$ -brana é fonte da carga para o campo de calibre RR tipo  $(p + 1)$ -forma e o campo de força tipo  $n$ -forma, sendo que  $n = p + 2$ . A dimensão total é  $D = p + 1 + d$ , onde  $d$  é o número de dimensões transversais à  $p$ -brana.

Neste trabalho de tese, em particular, estamos interessados em soluções extremas e sem dÍlaton correspondentes a:

$$(D, n) = (10, 5), (11, 4), (11, 7).$$

Em uma descrição quântica, estas soluções extremas correspondem à brana no estado fundamental. Presumivelmente, as soluções não-extremas (com horizonte de eventos fora do origem e com dÍlaton) representariam excitações quânticas da brana e corresponderiam a uma temperatura finita.

A seguir mostraremos cada tipo de solução extrema sem dÍlaton.

---

<sup>3</sup>O setor Ramond-Ramond é aquele, no formalismo Ramon-Neveu-Shwartz, onde se tem condições de contorno periódica para todos os campos vetoriais fermiônicos.

<sup>4</sup>O setor Neveu-Shwartz-Neveu-Shwartz é aquele no formalismo Ramond-Neveu-Shwartz, onde todos os campos vetoriais fermiônicos tem condições de contorno anti-periódicos.

### 1.1.1 D3 branas

No caso de  $D = 10$  e  $p = 3$ , temos a solução gerada por  $N$  D3 branas coincidentes na teoria de cordas tipo II B. Esta solução é descrita pela métrica:

$$ds^2 = H^{-1/2}(-dt^2 + \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2) + H^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (1.2)$$

onde

$$H = 1 + \frac{4\pi g_s N l_s^4}{r^4}, \quad (1.3)$$

sendo  $g_s$  a constante de acoplamento das cordas e  $l_s$  a escala de comprimento das cordas.

Definimos a variável escalada  $U = r/l_s^2$  e consideramos o limite  $\alpha' = l_s^2 \rightarrow 0$  e também  $r \rightarrow 0$ , de modo que  $U$  seja uma variável significativa. Consequentemente teremos que:

$$\begin{aligned} H &\approx \frac{4\pi g_s N}{U^4 l_s^4}, \\ ds^2 &= \frac{U^2}{L^2} d\tilde{x}_4^2 + l^2 \frac{dU^2}{U^2} + L^2 d\Omega_5^2, \\ \text{com} \quad dx_4^2 &= -dt^2 + \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2 \end{aligned}$$

e  $\tilde{x}$  uma versão convenientemente reescalada de  $x$ . Como podemos ver esta métrica corresponde exatamente à métrica do  $AdS_5(L) \times S^5(L)$ . O raio vem dado por  $L^4 = 4\pi g_s N l_s^4$ .

### 1.1.2 M2 branas

Neste caso de  $D = 11$  e  $p = 2$ , temos a solução gerada por  $N$  M2 branas coincidentes na teoria M. Esta solução é descrita pela seguinte métrica:

$$ds^2 = H^{-2/3}(-dt^2 + \sum_{i=1}^2 (dx^i)^2) + H^{1/3}(dr^2 + r^2 d\Omega_7^2), \quad (1.4)$$

onde

$$H = 1 + \frac{N l_{o11}^6 2^5 \pi^2}{r^6}, \quad (1.5)$$

sendo  $l_{11}$  a escala de comprimento de Planck em  $D = 11$  dimensões.

Desta vez iremos definir a variável escalada  $U^{1/2} = \frac{r}{l_{11}^{3/2}}$  e consideraremos o limite  $l_{11}^{3/2} \rightarrow 0$  e  $r \rightarrow 0$ , de modo que  $U$  seja significativo. Com isso, teremos que:

$$H \approx \frac{2^5 \pi^2 N}{l_{11}^3 U^3},$$

$$ds^2 = \frac{4U^2}{L^2} d\tilde{x}_3^2 + \frac{L^2}{4} \frac{dU^2}{U^2} + L^2 d\Omega_7^2.$$

Como podemos ver esta solução corresponde exatamente à métrica  $AdS_4(\frac{L}{2}) \times S^7(L)$  com  $L^2 = 4l_{11}^2 (\frac{1}{2}\pi^2 N)^{1/3}$ .

### 1.1.3 M5 branas

Neste caso de  $D = 11$  e  $p = 5$ , temos a solução gerada por  $N$  M5 branas coincidentes na teoria M. Esta solução é descrita pela seguinte métrica:

$$ds^2 = H^{-1/3}(-dt^2 + \sum_{i=1}^5 (dx^i)^2) + H^{2/3}(dr^2 + r^2 d\Omega_4^2), \quad (1.6)$$

onde

$$H = 1 + \frac{\pi N l_{11}^3}{r^3}, \quad (1.7)$$

sendo  $l_{11}$  a escala de comprimento de Planck.

Nesta vez definimos a variável escalada  $U^2 = \frac{r}{l_{11}^3}$  e consideramos o limite  $l_{11}^3 \rightarrow 0$  e  $r \rightarrow 0$ , de modo que  $U$  seja significativo, com o qual teremos que:

$$H = \frac{\pi N}{l_{11}^6} \frac{1}{U^6},$$

$$ds^2 = \frac{U^2}{4L^2} d\tilde{x}_6^2 + 4L^2 \frac{dU^2}{U^2} + L^2 d\Omega_4^2.$$

Como podemos ver esta solução corresponde exatamente à métrica de  $AdS_7(2L) \times S^4(L)$  com  $L^2 = (\pi N)^{2/3} l_{11}^2$ .

### 1.1.4 O dicionário holográfico

Na dualidade AdS/CFT, um campo  $\phi(x)$  da teoria de supergravidade se acopla com um operador conforme  $\mathcal{O}(x')$  da teoria super Yang-Mills  $\mathcal{N} = 4$  na fronteira do espaço

AdS. Note que aqui estamos considerando que  $x$  pertence ao espaço AdS e  $x'$  pertence à fronteira deste espaço. Este acoplamento é da forma  $\int d^4x \phi_0(x') \mathcal{O}(x')$ , sendo que  $\phi_0(x')$  representa o valor do campo  $\phi(x)$  na fronteira do AdS.

O chamado dicionário holográfico consiste na precisa relação entre a teoria conforme na fronteira do espaço AdS e a teoria de supergravidade. Esta relação, na aproximação de supergravidade, é dada pela igualdade do funcional gerador das funções de correlação conexas de operadores  $\mathcal{O}$  e a exponencial da ação clássica de supergravidade ( $I_S$ ) para o campo  $\phi$  [7, 8]:

$$\left\langle \exp \left( \int d^4x \phi_0(x') \mathcal{O}(x') \right) \right\rangle_{\text{CFT}} \approx \exp(-I_S(\phi)). \quad (1.8)$$

## 1.2 Laço de Wilson e holografia

### 1.2.1 Linha de Wilson

Em uma teoria de calibre não-abeliana, com grupo de simetria  $SU(N)$ , definimos o seguinte operador chamado de linha de Wilson:

$$W_P(x, y) = P \left\{ \exp \left( ig \int_x^y A_\mu^a(z) T^a dz^\mu \right) \right\}, \quad (1.9)$$

onde  $x, y \in R^{(1,d)}$  são dois pontos fixos extremos, conectados pela linha definida por  $z = z(\lambda)$ . Os campos  $A_\mu^a(z)$  são os  $N$  bósons de calibre e  $T^a$  são os geradores do grupo  $SU(N)$ .  $P$  é o operador de ordenamento de caminho, que é importante desde que os geradores do grupo de calibre não comutam em diferentes pontos do espaço-tempo. A exponencial na linha de Wilson é definida pela sua expansão de Taylor e seu ordenamento de caminho se aplica aos campos em cada termo. Explicitamente,

$$\begin{aligned} W_P(x, y) = & 1 + ig \int_0^1 \frac{dz^\mu(\lambda)}{d\lambda} A_\mu^a(z(\lambda)) T^a d\lambda - \frac{1}{2} g^2 \int_0^1 d\lambda \int_0^1 d\tau \frac{dz^\mu(\lambda)}{d\lambda} \frac{dz^\nu(\tau)}{d\tau} \\ & \times A_\mu^a(z(\lambda)) A_\nu^a(z(\tau)) [T^a T^b \theta(\lambda - \tau) + T^b T^a \theta(\tau - \lambda)] + \dots \end{aligned} \quad (1.10)$$

Em uma transformação de calibre, as linhas de Wilson se transformam segundo:

$$W_P(x, y) \rightarrow e^{i\alpha^a(x) T^a} W(x, y) e^{-i\alpha^a(y) T^a}. \quad (1.11)$$

No caso não-abeliano, também podemos representar o campo de calibre como um campo avaluado na algebra de Lie ao escrever:

$$A_\mu = A_\mu^a T^a, \quad (1.12)$$

deste modo,  $W_P(x, y) = P \left\{ \exp \left( ig \int_x^y A_\mu(z) dz^\mu \right) \right\}$ .

### 1.2.2 Laço de Wilson

Uma observação importante é que ao fazer  $x = y$  obtemos uma integral de contorno:

$$W_P(\text{laço}) = P \left\{ \exp \left( ig \oint_{\mathcal{C}} A_\mu^a(z) T^a dz^\mu \right) \right\}, \quad (1.13)$$

onde  $\mathcal{C}$  denota um laço fechado no espaço-tempo. Logo, ao tomar o traço em ambos lados da eq. (1.11) obtemos que  $\text{tr}W_P(\text{laço})$  é um invariante de calibre. Este objeto é chamado de laço de Wilson:

$$W(\mathcal{C}) = \frac{1}{N} \text{Tr}P \left\{ \exp \left( i \oint_{\mathcal{C}} A_\mu(x)^a T_{ij}^a dx^\mu \right) \right\}, \quad (1.14)$$

Os laços de Wilson desempenham um papel fundamental na formulação das teorias de calibre na rede (como é o caso da QCD na rede), que podem ser formuladas por meio dos laços de Wilson em uma forma manifestamente invariante de calibre. Eles foram introduzidos na década de 1970 para tentar solucionar o problema do confinamento na QCD [12].

A propagação de quarks muito massivos na representação fundamental do grupo de calibre está associada ao cálculo do laço de Wilson onde frequentemente é considerado um laço de forma retangular de lados  $T$  (separação tipo tempo) e  $L$  (separação tipo espaço), tal como é mostrada na fig.(1.2). A partir deste laço, podemos obter o valor da energia de um par quark-antiquark. No limite  $T \gg L$ , sempre é possível calcular o valor esperado deste laço de Wilson, o resultado é bem conhecido na literatura (ver por exemplo [13]):

$$\langle W(L \times T) \rangle \stackrel{T \gg L}{\propto} e^{-TE(L)}, \quad (1.15)$$

onde  $E(L)$  é a energia de interação de um par quark-antiquark.

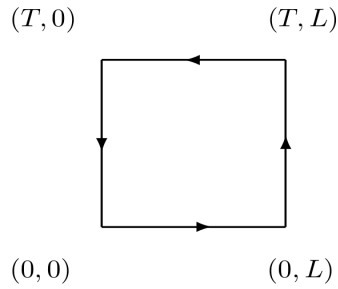


Figura 1.2: Laço retangular no espaço-tempo de Minkowski.

### 1.2.3 Proposta holográfica

Pouco tempo depois da aparição da conjectura, Maldacena [14] e independentemente Rey e Yee [15] propuseram<sup>5</sup> uma relação entre o valor esperado de um operador tipo laço de Wilson de uma teoria de calibre  $SU(N)$  para  $N$  grande e a área da folha de mundo de uma corda estática em um fundo de AdS. Esta relação está inspirada no dicionário holográfico e é descrita da seguinte forma:

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle \sim \exp[-S_{\text{corda}}], \quad (1.16)$$

onde temos que  $S_{\text{corda}}$  é a área da folha de mundo que tem como fronteira o laço  $\mathcal{C}$  em questão, como se mostra na fig.(1.3).

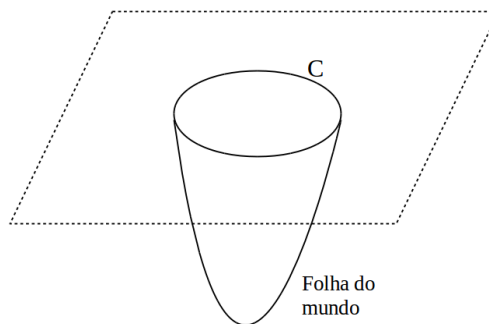


Figura 1.3: Folha do mundo de uma corda associada com o laço de Wilson.

Porém, a inclusão de quarks muito massivos no cálculo do laço de Wilson para o retângulo na figura (1.2) com  $T \gg L$ , faz com que exista uma contribuição de parte

<sup>5</sup>Esta proposta da holografia as vezes é chamada de “proposta MRY” neste trabalho.

da massa dos quarks no lado direito da equação (1.16) e, portanto, este lado é infinito. Então, para obter um potencial finito, deveremos realizar um esquema de renormalização que consiste em subtrair a massa dos quarks da energia total obtida ao comparar (1.15) com (1.16). (ver [14]).

O primeiro exemplo de cálculo do potencial entre um par quark-antiquark nas teorias com  $N$  grande, utilizando a proposta MRY, foi feito para uma teoria de campos supersimétrica com  $\mathcal{N} = 4$  e invariância conforme em  $D = 4$ , dual a uma teoria de cordas tipo IIB em um fundo de gravidade com geometria  $AdS_5 \times S^5$  ( ver [14]). O resultado foi um potencial não-confinante  $V(L) \sim 1/L$ , que é consistente com a simetria conforme da teoria de Yang-Mills.

Mais tarde, uma discussão sobre os laços de Wilson para as teorias de Yang-Mills duais às teorias de cordas em certos fundos gravitacionais com geometrias de 10 dimensões foi apresentado em [16]. Nesse trabalho, foram desenvolvidos alguns critérios matemáticos para estudar o confinamento em modelos inspirados nas cordas.

Ainda, cálculos do laço de Wilson a temperatura finita, seguindo a proposta da holografia, foram apresentados em [17, 18]. Nestes trabalhos, foram considerados fundos de gravidade de Schwarzschild com geometria assintoticamente AdS, onde a temperatura da teoria conforme é identificada com a temperatura de Hawking para os buracos negros, como no trabalho original de Witten [19]. Nesta configuração, também encontrou-se um comportamento não-confinante para o potencial quark-antiquark.

De outro lado, uma modificação ao estudo a temperatura zero, considerando a corda em um fundo de gravidade de D3-brana, foi estudado em [20]. Nesse trabalho, diferentes comportamentos para os potenciais quark-antiquark foram obtidos, alguns deles resultaram em potenciais confinantes e outros em potenciais não-confinantes. Isso pode ser entendido levando-se em conta o fato de que no fundo de gravidade de D3-brana a teoria dual perde a simetria conforme, porém, na aproximação do “horizonte dos eventos” a geometria do fundo gravitacional é assintoticamente AdS. Inspirados neste trabalho, ti-



vemos a ideia de estudar os laços de Wilson para teorias de calibre duais às teorias M em fundos gravitacionais gerados por M2- e M5-branas. Como sabemos as M2 e M5 branas são soluções solitônicas da supergravidade em  $D=11$  e descrevem, no limite assintótico perto do horizonte, uma teoria supersimétrica de campos conforme na fronteira do espaço AdS. No caso da M2 brana, a correspondente teoria dual deverá existir em um espaço de Minkowski de  $D = 2 + 1$  dimensões [6, 21, 22], havendo logo possíveis aplicações para fenômenos planares na matéria condensada. Em contrapartida, no caso da M5 brana, o estudo dos laços de Wilson poderia ser relevante ao considerar teorias de calibre em espaços de Minkowski em  $D = 5 + 1$  dimensões [23, 24].

Ainda mais, uma situação simples para o cálculo do laço de Wilson foi considerado para alguns modelos holográficos fenomenológicos AdS/QCD. Estes modelos AdS/QCD, inspirados na correspondência AdS/CFT, capturam diversas propriedades da QCD, tais como gap de massa, confinamento e quebra de simetria quirial. Nos casos dos modelos de hard wall [25] e de soft wall [26], foram encontrados potenciais com comportamentos confinantes, sendo que a forma desses potenciais é similar à forma do potencial de Cornell. Uma versão a temperatura finita daquele cálculo foi dado em [27], onde uma transição de fase de segunda ordem ocorre, descrevendo qualitativamente em uma transição de fase confinamento/deconfinamento. De fato, se mostra que uma transição de fase Hawking-Page [28] acontece para os modelos de parede rígida (hard-wall model) e de parede macia (soft-wall model) a temperatura finita [29, 30, 31, 32, 33]. No caso do modelo de parede macia, uma boa estimativa da temperatura de desconfinamento, compatível com as predições da QCD, foi encontrada em [29].

Como parte deste trabalho de tese, iremos apresentar um estudo dos laços de Wilson para teorias de calibre com  $N$  grande que são duais às teorias de cordas/teorias M em fundos gravitacionais gerados por  $N$  coincidentes D3, M2 e M5 branas. Nosso estudo de laços de Wilson nos fundos de M2 e M5 branas foram apresentados em [34] para diferentes regimes geométricos do espaço de fundo.

### 1.3 Entropia de emaranhamento quântico na holografia

Se dividirmos imaginariamente um sistema físico em duas partes  $A$  e  $B$  (ver figura 1.4), temos que o espaço de Hilbert pode ser escrito como o produto dos espaços de Hilbert dos subsistemas  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , logo, um observador que só tem acesso ao subsistema  $A$  irá perceber como se o sistema total fosse descrito pela matriz de densidade<sup>6</sup> reduzida  $\rho_A$ ,

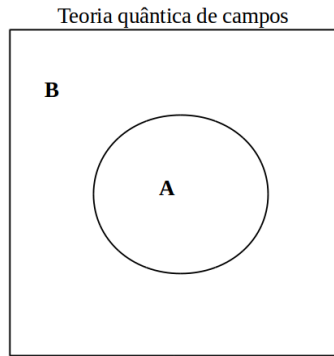


Figura 1.4: Subsistemas  $A$  e  $B$  em uma teoria quântica de campos.

$$\rho_A = \text{tr}_B \rho_{tot}, \quad (1.17)$$

onde o traço é tomado somente sobre o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_B$ . Portanto, definimos a entropia do subsistema  $A$  como a entropia de Von Neumann para a matriz de densidade reduzida  $\rho_A$ :

$$S_A = -\text{tr}_A \rho_A \log \rho_A. \quad (1.18)$$

A entropia de emaranhamento dá uma forma conveniente de medir o grau de emaranhamento quântico de uma função de onda  $|\Psi\rangle$ . Uma interpretação física desta entropia seria que ela mede o quanto que o sistema está emaranhado ou fortemente correlacionado.

<sup>6</sup>A matriz de densidade é definida como aquela que descreve um sistema quântico em um estado misturado, um ensemble estatístico de varios estados quânticos. Matematicamente a matriz de densidade é dada segundo:  $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ , onde,  $p_i$  é a proporção do ensemble que se encontra no estado  $|\psi_i\rangle$ .

Uma outra interpretação física desta entropia é que ela é a medida da entropia de Von Neumann para um observador no sistema  $A$  que não pode acessar ao sistema  $B$ , enquanto a informação se perde ao passar para a região  $B$ .

Por outro lado, lembremos que a entropia térmica de um buraco negro resulta ser proporcional à área da superfície do horizonte de eventos:

$$S_{BH} = \frac{\text{Área do horizonte}}{G_N}, \quad (1.19)$$

onde  $G_N$  é a constante de Newton. Esta relação foi estabelecida por Bekenstein [36] e Hawking [37] e também foi reobtida a partir da teoria de cordas em [38].

A relação entre a entropia térmica, temperatura de buracos negros e teoria de cordas foi investigada em [39], onde a entropia e temperatura de 3-branas negras foram calculadas.

Logo depois da aparição da conjectura, a entropia do buraco negro no espaço de Sitter, assim como o emaranhamento quântico, foram analisados em [40] usando a correspondência AdS/CFT. Naquele trabalho foi encontrado que a entropia de emaranhamento quântico também pode ser vista como a entropia térmica das partículas de Rindler perto do horizonte, evitando deste modo fazer referência à região não observável atrás do horizonte, que é a situação da entropia de emaranhamento.

Inspirados na lei da entropia de Bekenstein-Hawking (eq.1.19), no contexto da correspondência AdS/CFT, Ryu e Takayanagi [41] propuseram uma fórmula para calcular a entropia de emaranhamento de teorias de calibre  $SU(N)$  com  $N$  grande em um espaço de Minkowski  $M^{d+1}$ . Estas teorias de calibre são duais a teorias de cordas/teorias M em um espaço de fundo com geometria  $AdS_{d+2} \times S^p$ . A fórmula de Ryu e Takayanagi relaciona a área de uma superfície mínima  $\gamma_A \in AdS_{d+2}$ , cuja fronteira fica no espaço  $M^{d+1}$ . A fronteira de  $\gamma_A$  coincide com a fronteira do subsistema  $A$ , quer dizer que  $\partial\gamma_A = \partial A$  (ver figura 1.5). Então, a lei da entropia de emaranhamento é:

$$S_A = \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4G_N^{(d+2)}}, \quad (1.20)$$

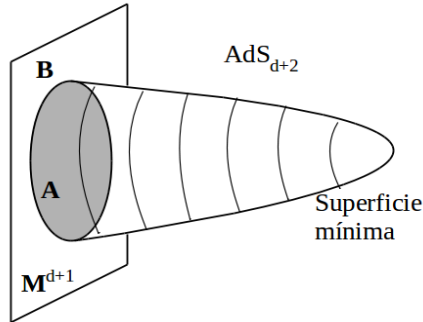


Figura 1.5: Superfície  $\gamma_A$ .

onde,  $G_N^{(d+2)}$  é a constante de Newton para  $(d + 2)$  dimensões.

Ao contrário da entropia térmica, a entropia de emaranhamento a temperatura zero não é nula. Logo, podemos usar a entropia de emaranhamento para testar propriedades quânticas de um sistema físico (ver [42]). Na teoria de campos em altas dimensões (mais de duas dimensões), não é fácil calcular a entropia de emaranhamento para subvariedades arbitrárias  $A$ , inclusive em teorias de campos livres. Esta é uma motivação para calcular esta entropia utilizando a proposta holográfica, já que ela reduz a complicação do cálculo na teoria de campos quânticos a um cálculo geométrico clássico e simples. Existem muitos mais casos do cálculo da entropia de emaranhamento, inclusive uma aplicação ao caso não-conforme, os quais são discutidos em [43]. Uma generalização covariante da proposta de Ryu e Takayanagi da entropia de emaranhamento holográfica foi dada em [44]. A entropia geométrica, a qual é relacionada a entropia de emaranhamento mediante uma rotação dupla de Wick<sup>7</sup>, é introduzida em [45] para analisar a transição confinamento/desconfinamento. A entropia de emaranhamento no espaço de Sitter foi calculada em [46] com a finalidade de quantificar o grau de correlação do superhorizonte que é gerada pela expansão cosmológica. A entropia de emaranhamento para fundos gravitacionais  $AdS_3$  com outros espaços de compactificação foi calculada em [47]. Esta quantidade foi calculada como uma forma de caracterizar as teorias de campos conforme duais a esses

<sup>7</sup> Uma rotação dupla de Wick refere-se a uma rotação de Wick em duas das coordenadas do espaço-tempo.

fundos gravitacionais. Uma forma de recuperar a geometria espacial a partir da estrutura de emaranhamento de um estado quântico abstrato em um espaço de Hilbert, foi mostrada em [48].

Neste trabalho iremos calcular e analisar as entropias de emaranhamento de teorias de calibre duais a teorias de cordas/teorias M em fundos de supergravidade de D3, M2 e M5 branas. Ao longo deste trabalho iremos escolher uma faixa retangular infinita como o subsistema  $A$ . Em especial, este subsistema será definido em cada um dos casos dessas geometrias.

## Capítulo 2

# Potenciais de interação quark-antiquark em fundos de M2 e M5 branas

Neste capítulo estudaremos os potenciais clássicos de interação quark-antiquark em fundos de supergravidade de M2 brana e M5 brana. Estes potenciais são obtidos a partir da proposta de Maldacena e Ryu-Yee (MRY) [14, 15]. Esta proposta identifica o valor esperado do laço de Wilson de uma teoria de Yang-Mills, com a ação clássica de uma teoria de cordas aberta bosônica em um fundo de supergravidade.

O primeiro problema ao tentar aplicar a proposta MRY utilizando fundos de supergravidade em  $D = 11$  é que estas pertencem à teoria M na qual não existem cordas, como na teoria em  $D = 10$ . Então, para resolver esse inconveniente, deveremos partir da ação de uma membrana na teoria M em  $D=11$  e fazer um procedimento para transformar esta configuração em uma outra, contendo uma corda em  $D = 10$ . Este procedimento consiste em compactificar uma das 3 coordenadas que parametrizam a membrana junto com uma das 11 direções na teoria M [50]. O resultado é uma corda em um espaço-tempo de  $D=10$ .

Físicamente, este procedimento equivale a pegar uma membrana de modo que a 11<sup>a</sup> coordenada espacial esteja envolvida ao redor da 3<sup>a</sup> dimensão da membrana. Desde modo, a membrana tomará uma forma tubular com um raio que é definido pela 3<sup>a</sup> dimensão da membrana junto com a 11<sup>a</sup> dimensão espacial. No limite em que o raio do tubo seja zero,

podemos considerar que estamos frente a um objeto que é, em forma efetiva, uma corda aberta, tal como é mostrado na fig.2.1.

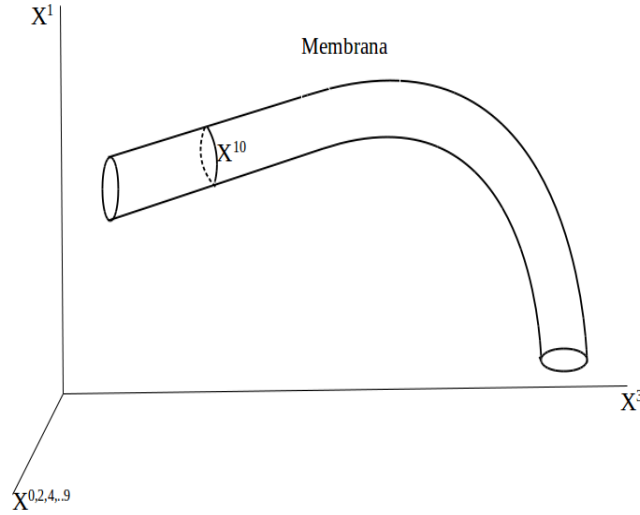


Figura 2.1: Membrana tubular

Uma vez obtida uma configuração para uma corda em um fundo de supergravidade em  $D=10$ , procederemos em aplicar a prescrição MRY, a qual como já se viu no capítulo anterior, consiste em utilizar a ação da corda para calcular diretamente a energia de interação de um par muito massivo de quarks. O quark e antiquark estão opostos e posicionados em cada extremo da corda. Os extremos da corda ficam colados, dependendo do caso, ao mundo M2 brana ou ao mundo M5 brana. A energia de interação deve ficar como função da distância  $L$  de separação entre quarks. Depois de subtrair a parte divergente desta energia, a qual está identificada com a massa dos quarks, nós obteremos finalmente o potencial quark-antiquark  $V(L)$ .

A seguir, procederemos com a análise dos potenciais obtidos fazendo aproximações para distintos regimes geométricos, com o objetivo de conhecer o comportamento do potencial com respeito à propriedade de confinamento. Os regimes geométricos resultam como consequência da comparação da coordenada radial  $r$ , que define a distância da corda à brana, com o raio de curvatura  $R$  do fundo gravitacional. Assim, teremos dois

regimes principais: O primeiro consiste em posicionar a corda longe do horizonte, ou seja, devemos considerar a condição  $r \gg R$ . Em ambos os casos de fundos gravitacionais de M2 e M5 brana, essa condição vai corresponder a um fundo gravitacional de espaço-tempo quase chato. O segundo regime irá posicionar a corda perto do horizonte, ou seja, devemos considerar a condição  $r \ll R$ . Em ambos os casos de fundos gravitacionais de M2 e M5 brana, esta condição vai corresponder a um espaço-tempo anti de Sitter ( $AdS_4 \times S^7$  e  $AdS_7 \times S^4$  respectivamente). Esses fundos de anti de Sitter são duais às teorias super Yang-Mills conformes em  $D = 3$  e  $D = 6$ , respectivamente.

Como já foi mencionado anteriormente, este estudo foi inspirado em um trabalho [20] onde o espaço gerado por D3 branas é usado como fundo gravitacional. Naquele trabalho são estudadas também as propriedades de confinamento para diferentes regimes geométricos da geodésica da corda em relação ao fundo gravitacional da D3 brana.

É importante mencionar que o caso de M5 brana, também, é abordado com um enfoque diferente em [14], onde é discutida a possibilidade do uso de um objeto estendido correspondente a uma membrana da teoria M, esse objeto é chamado de superfície de Wilson. Além disso, uma conexão entre as M2 branas e o laço de Wilson, também, foi estudado em [51] com uma perspectiva diferente.

Como já tínhamos mencionado anteriormente, um boa motivação para este estudo é a possibilidade da aplicação em sistemas de duas dimensões da matéria condensada como são, por exemplo, os sistemas que mostram supercondutividade, ou os sistemas que mostram o efeito Hall quântico, no caso das M2 branas, já que a sua correspondente teoria dual (quando ela existe) é definida em um espaço de (2+1) dimensões. Usualmente, estas aplicações aparecem conectadas com o espaço  $AdS_4 \times S^7$  (ver [52, 53, 54, 55]), modificadas para incluir um buraco negro para descrever sistemas a temperatura finita. O espaço da M5 brana pode ser relevante para discutir teorias de super Yang-Mills em  $D=6$  [56, 57].



## 2.1 Formulação da membrana

Nesta parte, apresentaremos a formulação do que seria uma membrana bosônica da teoria M em um fundo de supergravidade de M2 brana e M5 brana. Uma proposta para ação de supermembranas pode ser encontrada em [58, 59, 60]. Segundo esta proposta, a parte bosônica<sup>1</sup> da ação da membrana na teoria M é:

$$S = \frac{1}{(2\pi)^2 l_{11}^3} \int d^3\sigma \left[ \frac{(-\gamma)^{1/2}}{2} [\gamma^{ij} \partial_i X^M \partial_j X^N G_{MN}(X) - 1] + \epsilon^{ijk} \partial_i X^M \partial_j X^N \partial_k X^P A_{MNP}(X) \right] \quad (2.1)$$

onde,  $i, j = 0, 1, 2$  são os índices das coordenadas  $\sigma^i$  que parametrizam o volume do universo da membrana, a qual tem uma métrica induzida  $\gamma^{ij}$ . O determinante dessa matriz é escrita como:  $\det(\gamma^{ij}) = \gamma$ . Os índices  $M, N, P = 0, \dots, 10$  correspondem às coordenadas  $X^M$  do espaço-tempo que tem métrica (fundo de supergravidade)  $G_{MN}(X)$ . A 3-forma  $A_{MNP}(X)$  é um campo de fundo e a 4-forma  $F = dA$ , o tensor de campo de forças. A constante  $l_{11}$  (comprimento de Planck) estabelece a escala da supermembrana.

As equações do movimento que seguem da ação (2.1) são:

$$\gamma_{ij} = \partial_i X^M \partial_j X^N G_{MN}(X) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \partial_i ((-\gamma)^{1/2} \gamma^{ij} \partial_j X^P) &= -(-\gamma)^{1/2} \gamma^{ij} \partial_i X^M \partial_j X^N \Gamma_{MN}^P(X) \\ &\quad - \epsilon^{ijk} \partial_i X^M \partial_j X^N \partial_k X^Q F_{MNQ}^P(X) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Da equação (2.2) obtemos que,  $\gamma^{ij} \partial_i X^M \partial_j X^N G_{MN}(X) = \gamma^{ij} \gamma_{ij} = tr I = 3$ , então se substituirmos isso na ação (2.1), obteremos uma versão simplificada:

$$S = \frac{1}{(2\pi)^2 l_{11}^3} \int d^3\sigma ((-\gamma)^{1/2} + \epsilon^{ijk} \partial_i X^M \partial_j X^N \partial_k X^P A_{MNP}(X)) \quad (2.4)$$

O método MRY precisa da ação de uma corda em um fundo de supergravidade D=10. Então, temos que construir uma ação desse tipo a partir da ação da membrana (2.4), a

---

<sup>1</sup>Devido a que estamos somente interessados em soluções clássicas obtidas a partir desta ação, não incluímos termos fermiônicos nesta, já que as soluções clássicas para os campos fermiônicos são sempre nulmas (ver [60]).

qual está em um fundo de supergravidade D=11. Uma forma de fazer isso é envolver a terceira coordenada  $\sigma^2$  do volume do universo ao redor de uma das coordenadas  $X^{10}$  do espaço-tempo. Deste modo, logo depois de fazer o raio de compactificação  $R$  ir para zero, teremos a redução da membrana a uma corda, ao mesmo tempo reduziremos o espaço-tempo de fundo de  $D = 11$  para  $D = 10$ . Nas seguintes seções, iremos falar da implementação desta compactificação para os casos de fundos gravitacionais gerados por M2 branas e M5 branas.

## 2.2 Fundo de supergravidade em $D = 11$ gerado por M2 branas

A solução solitônica da supergravidade em D=11, que corresponde a  $N$  coincidentes M2 branas, é dada pela métrica (ver [9, 10, 61]):

$$ds^2 = \left(1 + \frac{R_2^6}{r^6}\right)^{-2/3} dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu} + \left(1 + \frac{R_2^6}{r^6}\right)^{1/3} (dr^2 + r^2 d\Omega_7^2) \quad (2.5)$$

e pelo potencial 3-forma:

$$A_{\mu\nu\lambda} = \epsilon_{\mu\nu\lambda} \left(1 + \frac{R_2^6}{r^6}\right)^{-1}. \quad (2.6)$$

Como podemos ver, a métrica do espaço-tempo possui uma simetria  $SO(2, 1) \times SO(8)$ . O raio de curvatura da M2 brana está definido como  $R_2 = (32\pi^2 N)^{\frac{1}{6}} l_{11}$ . Os índices  $\mu, \nu, \lambda = 0, 1, 2$  correspondem às coordenadas  $x^\mu$  que estão contidos na M2 brana. A coordenada radial  $r$  está fora da M2 brana e a métrica da esfera  $S^7$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} d\Omega_7^2 = & \sin^2 \theta_7 \sin^2 \theta_6 \sin^2 \theta_5 \sin^2 \theta_4 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2 d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_7 \sin^2 \theta_6 \sin^2 \theta_5 \sin^2 \theta_4 \sin^2 \theta_3 d\theta_2^2 \\ & + \sin^2 \theta_7 \sin^2 \theta_6 \sin^2 \theta_5 \sin^2 \theta_4 d\theta_3^2 + \sin^2 \theta_7 \sin^2 \theta_6 \sin^2 \theta_5 d\theta_4^2 + \sin^2 \theta_7 \sin^2 \theta_6 d\theta_5^2 \\ & + \sin^2 \theta_7 d\theta_6^2 + d\theta_7^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Quanto ao potencial de 3-forma  $A_{MNP}$ , todos os seus componentes são zero, com exceção dos que são apresentados em (2.6).

Outra característica importante do método MRY é considerar uma configuração estática para a corda. Discutiremos essa configuração na seção seguinte .

### 2.2.1 Configuração Estática

Desejamos que as coordenadas da membrana estejam em um calibre estático, assim vamos fazer:  $X^0 = \sigma^0 \equiv \tau$ ,  $X^1 \equiv x = \sigma^1 \equiv \sigma$  e  $X^2 = 0$ . Também queremos que essa membrana esteja estendida ao longo da coordenada radial, então faremos:  $X^3 \equiv r = r(\sigma)$ . Agora, com o intuito de fazer uma redução dimensional do espaço-tempo junto com uma redução nas dimensões da brana, vamos envolver a coordenada da membrana  $\sigma^2 \equiv \delta$  ao longo da coordenada do espaço-tempo  $X^{10}$  a ser compactificada:  $X^{10} \equiv \theta_1 = \delta/R$ , sendo  $R$  o raio de compactificação. Por último, o resto das coordenadas da esfera  $S^7$  será fixada por simplicidade:  $\theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = \frac{\pi}{2}$ .

Nesta configuração e, utilizando a métrica (2.5) do espaço-tempo de fundo da M2 brana, calculamos a matriz da métrica induzida:

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} -f^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & f^{-2} + (r')^2 f & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{R^2} f \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

onde a função de horizonte é dada por  $f(r) = \left(1 + \frac{R_2^6}{r^6}\right)^{1/3}$  e a derivada de  $r(x)$  é escrita como  $r' \equiv \frac{dr}{dx}$ . Depois de substituir esse resultado na ação (2.4) obtemos:

$$S = \frac{1}{(2\pi)^2 l_{11}^3} \int d\tau \int d\delta \int \frac{dx}{R} \sqrt{\frac{r^2}{f^3(r)} + r^2 (r')^2}. \quad (2.9)$$

Nesta configuração, a membrana desacoplou-se do campo 3-forma  $A_{[3]}$ . Levando-se em conta que  $\int d\tau = T$  e  $\int d\delta = R \int d\theta_1 = 2\pi R$ , obtemos o seguinte resultado para a ação:

$$S = \frac{T}{2\pi l_{11}^3} \int dx \sqrt{\frac{r^2}{f^3(r)} + r^2 (r')^2}, \quad (2.10)$$

onde o raio de compactificação foi cancelado nas simplificações (ele some do resultado final) e, por tanto, no limite  $R \rightarrow 0$  o resultado não difere do anterior. Nesse limite, a ação obtida nestes passos descreverá uma corda em um espaço em  $D = 10$ .

A partir dessa ação, a lagrangiana resulta ser:

$$\mathcal{L}(r, r') = \frac{1}{2\pi l_{11}^3} \sqrt{\frac{r^2}{f^3(r)} + r^2(r')^2}. \quad (2.11)$$

Essa lagrangiana não depende explicitamente de  $x$  e, então, a hamiltoniana é uma constante do movimento:

$$\mathcal{H}(r, r') = -\frac{r^2/f^3(r)}{2\pi l_{11}^3 \sqrt{r^2/f^3(r) + r^2(r')^2}} = \mathcal{H}(r_0, 0) = -\frac{\sqrt{r_0^2/f^3(r_0)}}{2\pi l_{11}^3}, \quad (2.12)$$

onde foram levadas em conta as condições de contorno  $r(0) = r_0$  e  $r'(0) = 0$ . A partir desta igualdade, podemos obter  $r'$ :

$$\frac{dr}{dx} = \pm \frac{\sqrt{r^2 f^3(r_0) - r_0^2 f^3(r)}}{r_0 f^3(r)}. \quad (2.13)$$

Integrando essa equação, podemos obter a distância da separação entre o par quark-antiquark na M2 brana:

$$L = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} dx = 2 \int_{r_0}^{r_1} dr \frac{r_0 f^3(r)}{\sqrt{r^2 f^3(r_0) - r_0^2 f^3(r)}}$$

Após a substituição da função de horizonte  $f = (1 + \frac{R_2^6}{r^6})^{1/3}$ , obtemos:

$$L = 2r_0 \int_1^{r_1/r_0} du \frac{(1 + \frac{\epsilon}{u^6}) u^3}{\sqrt{u^8 - u^6 + \epsilon(u^8 - 1)}}, \quad (2.14)$$

sendo que,  $\epsilon \equiv (\frac{R_2}{r_0})^6$  e  $r_1$  é a posição dos extremos da corda e corresponde ao corte ultravioleta no cálculo da energia que apresentaremos a seguir.

A energia de interação entre o par quark-antiquark na M2 brana na configuração estática é segundo a proposta MRY- proporcional à ação da corda em questão. Então, a partir da equação para a ação (2.10), temos a energia:

$$E = \frac{S}{T} = \frac{2}{2\pi l_{11}^3} \int_0^{\frac{L}{2}} dx \sqrt{\frac{r^2}{f^3(r)} + r^2(r')^2}$$

$$E = \frac{1}{\pi l_{11}^3} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r'} \sqrt{\frac{r^2}{f^3(r)} + r^2(r')^2} \quad (2.15)$$

Depois de realizar a substituição da equação (2.13) na equação anterior, obtemos a energia de interação:

$$E = \frac{1}{\pi l_{11}^3} \int_{r_0}^{r_1} dr \sqrt{\frac{r^2 f^3(r_0)}{f^3(r_0) - \frac{r_0^2}{r^2} f^3(r)}}. \quad (2.16)$$

Porém, esta energia é divergente quando  $\frac{r_1}{r_0} \rightarrow \infty$ , pelo qual é necessário subtrair a parte divergente dessa expressão, a qual é identificada com a massa de quarks em grande peso(ou de massa “infinita”):

$$2m_q = \frac{1}{\pi l_{11}^3} \int_0^{r_1} dr r = \frac{r_1^2}{2\pi l_{11}^3}. \quad (2.17)$$

Depois de substituir  $f = (1 + \frac{R_2^6}{r^6})^{1/3}$  na eq.(2.16), também podemos escrever a energia de interação ( $E$ ) da seguinte forma:

$$E = \frac{r_0^2 \sqrt{1 + \epsilon}}{\pi l_{11}^3} \int_1^{\frac{r_1}{r_0}} du \frac{u^5}{\sqrt{u^8 - u^6 + \epsilon(u^8 - 1)}}. \quad (2.18)$$

Depois de subtrair a massa dos quarks  $2m_q$ , o resultado final é o potencial de interação quark-antiquark:

$$V = \frac{r_0^2 \sqrt{1 + \epsilon}}{\pi l_{11}^3} \int_1^{\frac{r_1}{r_0}} du \frac{u^5}{\sqrt{u^8 - u^6 + \epsilon(u^8 - 1)}} - 2m_q. \quad (2.19)$$

Nas seções seguintes discutiremos os regimes geométricos correspondentes à posição da corda com respeito ao horizonte do fundo gravitacional gerado pelas M2 branas. Explicitamente calcularemos os potenciais  $V(L)$  nesses regimes e analisar o caráter confinante desses potenciais. Estes regimes geométricos correspondem aos seguintes limites:  $\epsilon \gg 1$  e  $\epsilon \ll 1$ .

## 2.2.2 Corda longe do horizonte

Este caso corresponde ao regime definido por  $R_2 \ll r_0$  ( $\epsilon \ll 1$ ). Isso quer dizer que a corda é posicionada muito longe do horizonte dos eventos do espaço-tempo gerado pelas M2 branas. Esta geometria corresponde a um espaço-tempo de fundo quase chato. A distância de separação  $L$  neste regime é derivado a partir da eq.(2.14):

$$L = 2r_0 \int_1^{\frac{r_1}{r_0}} \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} + r_0 \epsilon \int_1^{\frac{r_1}{r_0}} du \frac{-u^8 + 2u^2 - 1}{(u^2 - 1)^{3/2} u^6} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Integrando e levando em conta o limite de quarks muito pesados  $r_1 \gg r_0$ , obtemos que a distância neste regime é:

$$L \approx r_0 \left( 2 - \frac{R_2^6}{r_0^6} \right) \log \left( \frac{2r_1}{r_0} \right). \quad (2.20)$$

Analogamente derivamos o potencial de interação neste regime a partir da eq.(2.19):

$$V = \frac{r_0^2}{\pi l_{11}^3} \int_1^{r_1} du \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - 1}} + \frac{r_0^2 \epsilon}{2\pi l_{11}^3} \int_1^{r_1} du \frac{u^2(1 - u^6)}{(u^2 - 1)^{3/2} u^6} - \frac{r_1^2}{2\pi l_{11}^3} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Depois de fazer a integração no limite  $r_1 \gg r_0$ , obtemos:

$$V \approx \frac{r_0^2}{2\pi l_{11}^3} \left( 1 - \frac{R_2^6}{r_0^6} \right) \log \left( \frac{2r_1}{r_0} \right). \quad (2.21)$$

Neste regime, gostaríamos de eliminar a variável  $r_0$  do par de equações (2.20) e (2.21) com o propósito de obter uma expressão do potencial em função de  $L$ . Porém, isto não é possível devido à complicação algébrica ao inverter a equação (2.20) para obter  $r_0$  em termos de  $L$ . Ainda assim, existe a função implícita  $V(L)$  e esta pode ser graficada como se mostra na fig.2.2. Este potencial, encontrado primeiro em [34], apresenta um

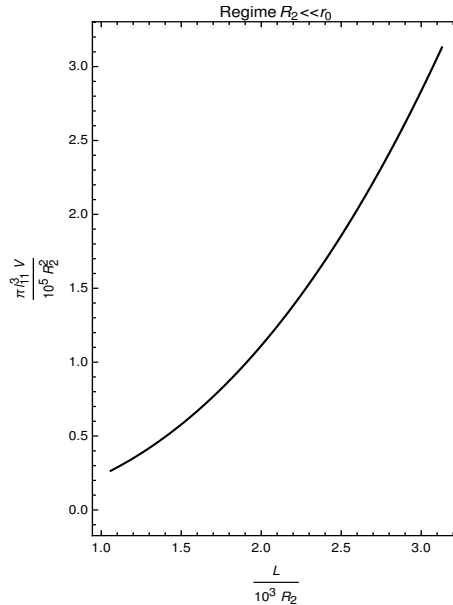


Figura 2.2: Potencial  $V(L)$  para uma geometria quase-chata  $r_0 \gg R_2$ .

comportamento confinante, quer dizer que o potencial cresce ao incrementar a distância de separação  $L$ .

### 2.2.3 Corda perto do horizonte

Agora iremos examinar a situação onde a corda é posicionada muito perto do horizonte de eventos no espaço de fundo, o qual é gerado pelas  $N$  M2 branas. Este regime geométrico resulta de considerar o limite  $R_2 \gg r_0$  ( $\epsilon \gg 1$ ). Também podemos afirmar que este regime corresponde à geometria  $AdS_4 \times S^7$ . Analogamente à seção anterior, podemos obter neste regime, as expressões para a separação  $L$  a partir da eq.(2.14):

$$L = 2r_0\sqrt{\epsilon} \int_1^{r_1/r_0} du \frac{1}{u^3\sqrt{u^8-1}}.$$

Integrando esta expressão e levando em conta o limite  $r_1 \gg r_0$ , obtemos:

$$L = \frac{R_2^3}{r_0^2} c \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{r_0^6}{r_1^6}\right) \right] \approx \frac{R_2^3}{r_0^2} c, \quad (2.22)$$

onde  $c = \frac{(2\pi^3)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma^2(\frac{1}{4})}$ .

Analogamente o potencial  $V$  neste regime pode ser obtido a partir da equação (2.19):

$$V = \frac{r_0^2}{\pi l_{11}^3} \int_1^{r_1/r_0} du \frac{u^5}{\sqrt{u^8-1}} - \frac{r_1^2}{2\pi l_{11}^3}. \quad (2.23)$$

Integrando e levando em conta o limite  $r_1 \gg r_0$ , obtemos:

$$V = -\frac{r_0^2 c}{2\pi l_{11}^3} \left[ 1 - \mathcal{O}\left(\frac{r_1^2}{r_0^2}\right) \right] - \frac{r_1^2}{2\pi l_{11}^3} = -\frac{r_0^2 c}{2\pi l_{11}^3}. \quad (2.24)$$

A diferença do regime visto anteriormente, neste caso é possível inverter a eq.(2.22), de modo que  $r_0$  possa ser escrito em termos de  $L$ . Desta forma, ao substituir  $r_0$  na eq.(2.24), obtemos o potencial  $V(L)$ :

$$V = -\frac{R_2^3 c^2}{2\pi l_{11}^3} \frac{1}{L}. \quad (2.25)$$

Como podemos observar, este potencial, encontrado primeiro em [34], apresenta un comportamento não-confinante que varia inversamente com a distância  $L$ , similar ao encontrado em [14]. Esse comportamento concorda com o esperado para a teoria de calibre dual, que possui simetria conforme.

## 2.3 Fundo de supergravidade em $D = 11$ gerado por $N$ M5 branas.

Nesse caso, o fundo de supergravidade consiste naquele gerado por  $N$  coincidentes M5 branas. Esta solução solitônica da supergravidade em  $D=11$  é dada por: (ver [9, 10])

$$ds^2 = \left(1 + \frac{R_5^3}{r^3}\right)^{-1/3} dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu} + \left(1 + \frac{R_5^3}{r^3}\right)^{2/3} (dr^2 + r^2 d\Omega_4^2). \quad (2.26)$$

Como podemos observar, a métrica desse espaço-tempo possui uma simetria  $SO(5, 1) \times SO(5)$ . O raio de curvatura da M5 brana é definido por  $R_5 = (N\pi)^{1/3} l_{11}$ . Os índices  $\mu, \nu = 0, 1, \dots, 5$  correspondem às coordenadas  $x^\mu$  contidas dentro do mundo brana. A coordenada radial  $r$  sai do mundo brana e o resto das coordenadas pertencem a uma 4-esfera  $S^4$ , a qual tem a seguinte métrica:

$$d\Omega_4^2 = \sin^2 \theta_4 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2 d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_4 \sin^2 \theta_3 d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_4 d\theta_3^2 + d\theta_4^2. \quad (2.27)$$

### 2.3.1 Configuração estática

Analogamente ao feito no caso da seção anterior, aqui escolheremos também uma configuração estática:  $X^0 = \sigma^0 \equiv \tau$ ,  $X^1 \equiv x = \sigma^1 \equiv \sigma$  e  $X^2 = X^3 = X^4 = X^5 = 0$ . Adicionalmente, a membrana encontra-se estendida uniformemente ao longo da coordenada radial  $r$ , ou seja  $X^6 \equiv r = r(x)$ . Novamente, fazemos uma compactificação do parâmetro  $\sigma^2 \equiv \delta$  do volume do universo da membrana, junto com uma das onze dimensões do espaço-tempo de fundo:  $X^7 \equiv \theta_1 = \delta/R$ , sendo que  $R$  é o raio de compactificação. Por simplicidade, aqui também fixamos o resto das coordenadas espaciais:  $\theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \pi/2$ .

Agora vamos calcular a matriz induzida da membrana<sup>2</sup> levando em conta a configuração estática e usando como fundo gravitacional o espaço-tempo gerado pelas M5 branas (eq.2.26). Como resultado, obtemos:

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} -f^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & f^{-1} + (r')^2 f^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{R^2} f^2 \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

---

<sup>2</sup>Lembre que a matriz induzida da membrana é definida como:  $\gamma_{ij} = \partial_i X^M \partial_j X^N G_{MN}(X)$



onde  $f(r) = (1 + \frac{R_5^3}{r^3})^{1/3}$ .

Como parte da solução solitônica (eq.2.26), neste caso também existe um potencial 3-forma  $A_{[3]}$ . Porém, na configuração estática da membrana, teremos o termo de interação entre a membrana e o potencial nulo, ou seja, a membrana se desacopla da 3-forma  $A_{[3]}$ . Portanto, a ação para a membrana (eq.2.4) no fundo de supergravidade da M5 brana (eq.2.26) resulta em:

$$S = \frac{1}{(2\pi)^2 l_{11}^3} \int d\tau \int d\delta \int \frac{dx}{R} \sqrt{r^2 + (r')^2 r^2 f^3(r)}.$$

Depois de fazermos a integração, levando em conta que  $\int d\tau = T$  e  $\int d\delta = R \int d\theta_1 = 2\pi R$ , obtemos que, novamente o raio de compactificação se cancela nas simplificações. Portanto, no limite de  $R \rightarrow 0$  o resultado final não irá mudar daquele obtido depois de fazer as simplificações. Então, a ação que descreve a uma corda em  $D = 10$  neste fundo gravitacional será:

$$S = \frac{T}{2\pi l_{11}^3} \int dx \sqrt{r^2 + (r')^2 r^2 f^3(r)}. \quad (2.29)$$

A partir desta ação, a lagrangeana é:

$$\mathcal{L}(r, r') = \frac{1}{2\pi l_{11}^3} \sqrt{r^2 + (r')^2 r^2 f^3(r)}. \quad (2.30)$$

A seguir, escrevemos a hamiltoniana, a qual é uma constante do movimento:

$$\mathcal{H}(r, r') = \frac{-r^2}{2\pi l_{11}^3 \sqrt{r^2 + (r')^2 r^2 f^3(r)}} = \mathcal{H}(r_0, 0) = \frac{-r_0}{2\pi l_{11}^3}.$$

Nesta expressão foram consideradas as condições de contorno  $r(0) = r_0$  e  $r'(0) = 0$ . Então, depois de isolar  $r'$ , obtemos:

$$\frac{dr}{dx} = \pm \sqrt{\frac{r^2 - r_0^2}{r_0^2 f^3(r)}}. \quad (2.31)$$

Logo ao integrar esta equação, obtemos a distância da separação entre o par quark-antiquark no fundo de supergravidade de M5 brana:

$$L = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} dx = 2 \int_{r_0}^{r_1} dr \frac{r_0 f^{3/2}(r)}{\sqrt{r^2 - r_0^2}}.$$

Depois de fazer a substituição da função do horizonte  $f = (1 + \frac{R_5^3}{r^3})^{1/3}$ , obtemos:

$$L = 2r_0 \int_1^{\frac{r_1}{r_0}} du \frac{(1 + \epsilon/u^3)^{1/2}}{(u^2 - 1)^{1/2}}, \quad (2.32)$$

onde,  $\epsilon = (\frac{R_5}{r_0})^3$  e  $r_1$  é a posição dos extremos da corda e corresponde ao corte ultravioleta no cálculo da energia de interação.

A energia de interação entre o par quark-antiquark na M5 brana nesta configuração estática é-segundo a proposta MRY- proporcional à ação (eq.2.29) dessa corda, ou seja:

$$E = \frac{S}{T} = \frac{2}{2\pi l_{11}^3} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r'} \sqrt{r^2 + (r')^2 r^2 f^3(r)}.$$

Depois de substituir  $r'$ (eq.2.31) nesta expressão, obtemos a energia  $E$ :

$$E = \frac{1}{\pi l_{11}^3} \int_{r_0}^{r_1} dr \frac{r^2 f^{3/2}}{\sqrt{r^2 - r_0^2}}. \quad (2.33)$$

Porém, similarmente ao que ocorreu na seção anterior, esta expressão diverge quando  $\frac{r_1}{r_0} \rightarrow \infty$ , logo, precisamos subtrair aquela parte divergente da energia. Essa parte divergente da energia é identificada com a massa  $m_q$  dos quarks, os quais são muito pesados. Então, a partir da expressão para a energia (2.33) definimos:

$$2m_q = \frac{1}{\pi l_{11}^3} \int_0^{r_1} dr r f^{3/2}(r). \quad (2.34)$$

Ainda, depois da substituição da função do horizonte  $f = (1 + \frac{R_5^3}{r^3})^{1/3}$  na expressão (2.33), obtemos:

$$E = \frac{r_0^2}{\pi l_{11}^3} \int_1^{\frac{r_1}{r_0}} du \frac{u^2 (1 + \epsilon/u^3)^{1/2}}{\sqrt{u^2 - 1}}. \quad (2.35)$$

Finalmente, das eqs (2.35) e (2.34), temos que, o potencial de interação ( $V$ ) entre o par quark-antiquark é:

$$V = \frac{r_0^2}{\pi l_{11}^3} \int_1^{\frac{r_1}{r_0}} du \frac{u^2 (1 + \epsilon/u^3)^{1/2}}{(u^2 - 1)^{1/2}} - \frac{r_0^2}{\pi l_{11}^3} \int_0^{\frac{r_1}{r_0}} du u (1 + \epsilon/u^3)^{1/2}. \quad (2.36)$$

### 2.3.2 Corda longe do horizonte

Este caso é definido pela aproximação  $R_5 \ll r_0$  ( $\epsilon \ll 1$ ) e corresponde a um espaço-tempo de fundo com uma geometria quase-chata. Neste regime geométrico, a distância de separação ( $L$ ) é obtida a partir da eq.(2.32):

$$L = r_0 \int_1^{\frac{r_1}{r_0}} \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} + \frac{r_0 \epsilon}{2} \int_1^{\frac{r_1}{r_0}} \frac{du}{u^3 \sqrt{u^2 - 1}} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Integrando e levando em conta o limite de quarks muito pesados  $r_1 \gg r_0$ , obtemos:

$$L = r_0 \log \left( \frac{2r_1}{r_0} \right) + \frac{R_5^3}{4r_0 r_1}. \quad (2.37)$$

O potencial de interação quak-antiquark neste regime geométrico é obtido a partir da eq.(2.36):

$$V = \frac{r_0^2}{\pi l_{11}^3} \left( \int_1^{\frac{r_1}{r_0}} \frac{duu^2}{\sqrt{u^2 - 1}} - \frac{r_1^2}{2r_0^2} \right) + \frac{r_0^2 \epsilon}{2\pi l_{11}^3} \left( \int_1^{\frac{r_1}{r_0}} \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}} + \frac{r_0}{r_1} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Depois de integrar, levando em conta o limite  $r_1 \gg r_0$ , obtemos:

$$V = \frac{r_0^2}{2\pi l_{11}^3} \log \left( \frac{2r_1}{r_0} \right) + \frac{R_5^3}{2\pi l_{11}^3 r_1}. \quad (2.38)$$

Da mesma forma como aconteceu na seção anterior, neste regime não é possível resolver em  $r_0$  a eq.(2.37). Então, para conhecer o comportamento do potencial de interação, vamos fazer um gráfico de  $V(L)$  como se mostra na fig.2.3. Como vemos na figura, esse potencial, encontrado primeiro em [34], possui um caráter confinante.

### 2.3.3 Corda perto do horizonte

Neste regime consideramos o limite  $R_5 \gg r_0$  ( $\epsilon \gg 1$ ). Este limite equivale em posicionar a corda perto do horizonte de eventos do espaço de fundo. A geometria considerada neste limite é  $AdS_7 \times S^4$ , a qual é dual com uma teoria de campos conforme em  $D = 6$ . Ao considerar este limite na equação (2.32), obtemos para a distância de separação  $L$  a seguinte expressão:

$$L = 2r_0 \epsilon^{1/2} \int_1^{\frac{r_1}{r_0}} du \frac{1}{u^{3/2}(u^2 - 1)^{1/2}}. \quad (2.39)$$

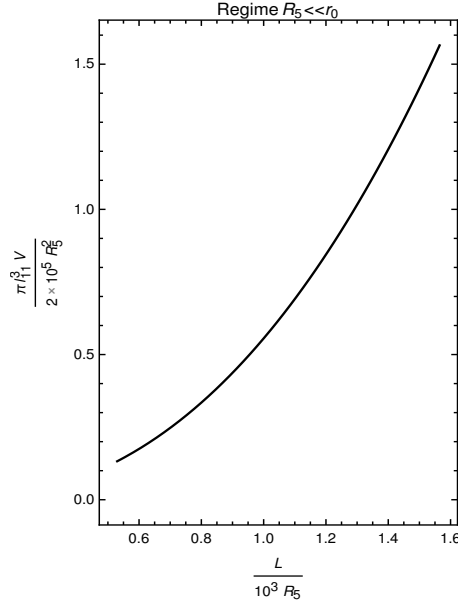


Figura 2.3: Potencial  $V(L)$  para uma geometria quase-chata  $r_0 \gg R_5$ .

Integramos esta expressão considerando o limite  $r_1 \gg r_0$ .

$$L = \frac{2R_5^{3/2}}{r_0^{1/2}} c \left[ 1 + \mathcal{O} \left( \frac{r_0^{3/2}}{r_1^{3/2}} \right) \right], \quad (2.40)$$

onde,  $c = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\Gamma^2(\frac{1}{4})}$ . Neste regime, o potencial de interação  $V$  é obtido a partir da eq.(2.36):

$$V = \frac{r_0^2}{\pi l_{11}^3} \sqrt{\epsilon} \int_1^{\frac{r_1}{r_0}} du \frac{u^{1/2}}{(u^2 - 1)^{1/2}} - \frac{r_0^2}{\pi l_{11}^3} \sqrt{\epsilon} \int_0^{\frac{r_1}{r_0}} \frac{du}{u^{1/2}}. \quad (2.41)$$

Integramos esta expressão considerando de novo o limite  $r_1 \gg r_0$ :

$$V = -\frac{R_5^{3/2} r_0^{1/2} c}{\pi l_{11}^3}. \quad (2.42)$$

Neste regime é possível resolver a eq.(2.40) para obter  $r_0 = \left( \frac{2R_5^{3/2} c}{L} \right)^2$ . Logo de substituir este valor de  $r_0$  na equação para o potencial, obtemos:

$$V = -\frac{2R_5^3 c^2}{\pi l_{11}^3 L}. \quad (2.43)$$

Este potencial, encontrado primeiro em [34], tem uma forma não-confinante, similar ao encontrado em [14]. Esse comportamento é esperado, já que a teoria de calibre dual possui simetria conforme.

Como temos visto, os fundos de M2 e M5 se reduzem na aproximação perto do horizonte às geometrias  $AdS_4 \times S^7$  e  $AdS_7 \times S^4$ . Nestes limites, as correspondentes teorias duais são teorias supersimétricas de calibre  $SU(N)$  com  $N$  grande e com simetria conforme. Os casos mais sutis são aquelas situações opostas a esse limite. Nesses casos, as funções de horizonte implicam um limite de espaço chato longe do horizonte. Este caso é diferente daquele do AdS, onde a curvatura é constante. O limite de espaço chato modifica a teoria dual adicionando um operador irrelevante a esta teoria, fazendo com que esta teoria dual seja mais envolvida. De qualquer maneira, temos conseguido calcular os potenciais quark-antiquark no lado gravitacional. Certamente, esse operador irrelevante faz com que a interpretação da dualidade seja mais complicada. Veja, por exemplo, as referências [62, 47] para uma discussão sobre esse problema.

## Capítulo 3

# Estudo numérico das transições entre estados de confinamento geométrico nas interações quark-antiquark em D3, M2 e M5 branas.

Neste capítulo apresentaremos um estudo numérico dos potenciais de interação quark-antiquark nos espaços de D3, M2 e M5 branas. Aqui iremos aprofundar o que acontece nos regimes geométricos intermediários que não foram analisados no capítulo anterior. Os regimes intermediários que analisaremos estão próximos ao raio de curvatura das branas em questão ( $r_0 \sim R$ ), quer dizer que a corda é colocada em uma posição intermediária entre o horizonte de eventos e longe do horizonte onde o espaço-tempo é quase-chato. Esta análise é importante, já que nos permite entender o que acontece em uma transição entre estados de confinamento e desconfinamento que correspondem as transições na posição da corda no espaço-tempo de fundo das branas em questão.

Como foi visto no capítulo anterior, as geometrias perto do horizonte apresentam, em geral, potenciais não-confinantes que concordam com os resultados esperados para as teorias conformes duais, isso devido a que os esses potenciais apresentam invariância de escala. Porém, longe do horizonte, a teoria dual deixa de ser conforme e os potenciais viram confinantes. Isto concorda com o comportamento das cordas em um espaço-tempo

chato, onde as cordas imitam o comportamento do tubo de fluxo da QCD.

### 3.1 Potenciais de interação quark-antiquark para D3 brana

Nesta parte apresentamos os resultados obtidos na referência [20] com respeito à distância de separação entre um par quark-antiquark na D3 brana e ao correspondente potencial de interação. Estes resultados também são revisados e obtidos no apêndice A deste trabalho.

A distância de separação entre um par quark-antiquark na D3 brana é dada por:

$$L = \frac{2r_0^3}{R^2} \int_1^{r_1} \frac{u^2 du}{\sqrt{u^4 - 1}} + \frac{2R^2}{r_0} \int_1^{r_1} \frac{du}{u^2 \sqrt{u^4 - 1}}, \quad (3.1)$$

onde,  $r_0$  é a posição mínima da corda com respeito ao horizonte,  $r_1$  é a posição extrema da corda onde se encontra a D3 brana que contém o par quark-antiquark e  $R$  é o raio de curvatura do fundo gravitacional de D3 brana.

Do outro lado, o potencial de interação quark-antiquark é dado por:

$$V = \frac{r_0 \sqrt{r_0^4 + R^4}}{\pi l_s^2 R^2} \int_1^{r_1} du \frac{u^2}{\sqrt{u^4 - 1}} - \frac{\sqrt{r_0^4 + R^4} r_1}{\pi l_s^2 R^2}. \quad (3.2)$$

Na seção seguinte iremos estudar numericamente o potencial de interação  $V$  no regime onde se satisfaz a condição  $r_0 \ll R$ , ou seja, no regime onde a corda é posicionada perto do horizonte.

#### 3.1.1 Corda perto do horizonte

Este regime é definido pela condição  $r_0 \ll R$  onde vemos que o espaço-tempo de fundo se aproxima a aquela descrita pela geometria do espaço  $AdS_5 \times S^5$ . Desde que trabalhamos com quarks muito massivos, devemos considerar também que  $r_1 \gg r_0$ . Na continuação, na figura 3.1, apresentamos um plot da distância de separação quark-antiquark  $L$  e sua dependência com o parâmetro  $r_0$ , os demais parâmetros são fixados apropriadamente. Como vemos da figura 3.1, a distância  $L$  decai de forma monótona com o aumento da

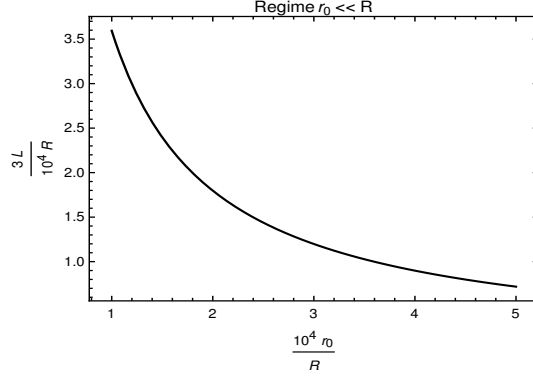


Figura 3.1: Dependência de  $L/R$  com  $r_0/R$ , onde,  $r_1/R = 10^5$  e  $r_0/R < 5 \times 10^{-4}$ .

posição  $r_0$ .

Agora passamos a analisar a dependência do potencial de interação quark-antiquark  $V$  com a posição  $r_0$ , o plot desta dependência é mostrado na figura 3.2. Como vemos, na figura, o potencial é negativo e decai conforme  $r_0$  cresce.

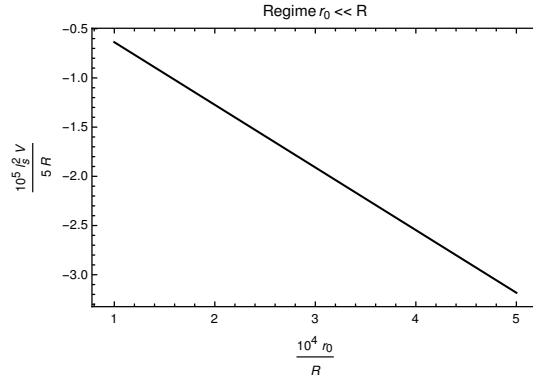


Figura 3.2: Dependência de  $l_s^2 V/R$  com  $r_0/R$ , onde,  $r_1/R = 10^5$  e  $r_0/R < 5 \times 10^{-4}$ .

O próximo passo é analisar a dependência do potencial  $V$  com respeito a distância  $L$  neste regime. O resultado numérico é mostrado na figura 3.3, onde podemos observar que o potencial é negativo e depende de forma inversa com a distância  $L$ . Este resultado concorda com o resultado analítico obtido em [20, 14], onde se obteve uma potencial não-confinante da forma  $V \sim -\frac{1}{L}$ . A teoria dual neste regime é a teoria de Yang-Mills superconforme  $\mathcal{N} = 4$  e, como já foi mencionado no capítulo anterior, o resultado obtido analiticamente é consistente com uma teoria conforme.

Na seguinte seção analisaremos o regime oposto, onde a corda é posicionada longe do



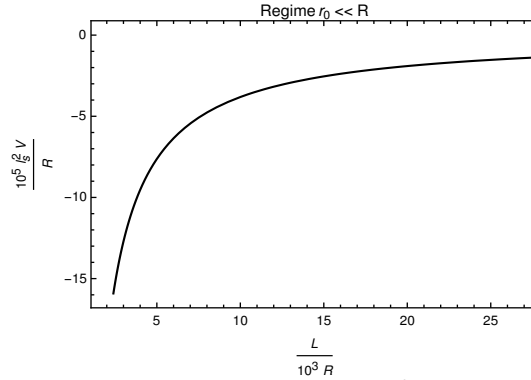


Figura 3.3: Dependência do Potencial de interação  $l_s^2 V/R$  com a separação  $L/R$ , onde,  $r_1/R = 10^5$  e  $r_0/R < 5 \times 10^{-4}$ .

horizonte. Esse regime será caracterizado pelo limite  $r_0 \gg R$ .

### 3.1.2 Corda longe do horizonte

Este regime geométrico é definido pelo limite  $r_0 \gg R$ , que significa que temos posicionado a corda muito longe do horizonte dos eventos. Nesta região, a geometria do espaço de fundo da D3 brana corresponde a um espaço quase-chato. Aqui também continuamos considerando quarks muito pesados, onde o limite  $r_1 \gg r_0$  continua valendo. A partir da equação 3.1, fazemos um plot neste regime da dependência da distância da separação  $L$  com a posição  $r_0$ . Este plot é mostrado na figura 3.4, onde podemos observar que a distância da separação  $L$  cresce com a posição  $r_0$ .

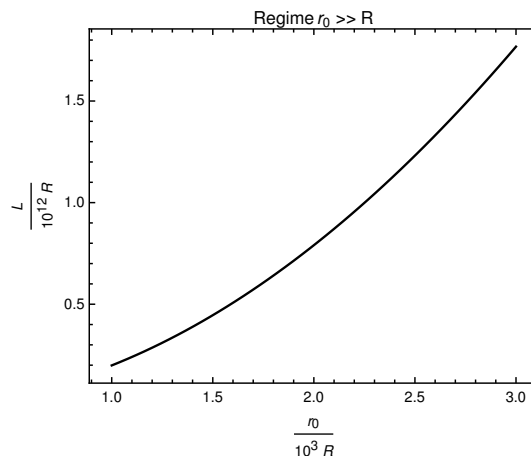


Figura 3.4: Dependência da separação  $L/R$  com a posição  $r_0/R$ , onde,  $r_1/R = 10^5$  e  $r_0/R > 10^3$ .

Continuando, analisamos a dependência do potencial  $V$  com a posição  $r_0$  neste regime. O plot desta dependência é mostrado na figura 3.5, onde podemos observar que o potencial é negativo e decresce conforme  $r_0$  cresce.

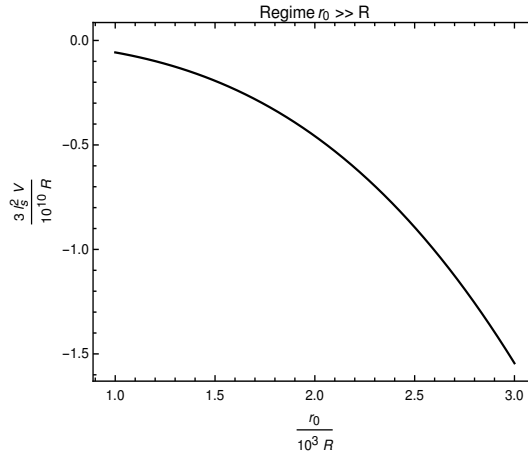


Figura 3.5: Dependência do potencial  $l_s^2 V/R$  com a posição  $r_0/R$ , onde,  $r_1/R = 10^5$  e  $r_0/R > 10^3$ .

Então, o próximo passo é fazer uma análise de comportamento neste regime do potencial  $V$  com respeito a separação  $L$ . O plot deste potencial  $V(L)$  é mostrado na figura 3.6, onde podemos observar que o potencial é negativo e cai conforme a distância  $L$  aumenta. Como resultado, podemos concluir que neste regime o potencial de interação  $V$ , encontrado primeiro em [35], é não-confinante. Neste regime, a teoria de calibre dual não tem

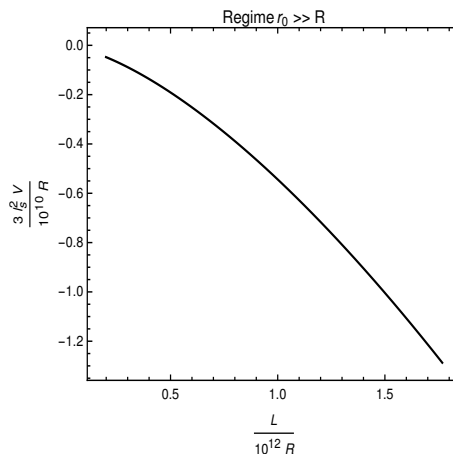


Figura 3.6: Dependência de  $l_s^2 V/R$  com a distância  $L/R$ , onde,  $r_1/R = 10^5$  e  $r_0/R > 10^3$ .

mais simetria conforme, já que temos nos afastado do horizonte, porém, ainda temos um

potencial não-confinante, só que neste caso, com forma diferente. Para entender melhor este resultado que parece um pouco estranho, vamos a deduzir analiticamente a forma deste potencial  $V(L)$ . Começamos escrevendo a expressão para a distância  $L$  (eq.3.1), nos limites considerados nesta seção ( $r_1 \gg r_0$  e  $r_0 \gg R$ ),

$$L \approx \frac{2r_0^3}{R^2} \int_1^{\frac{r_1}{r_0}} \frac{duu^2}{\sqrt{u^4 - 1}} \approx \frac{2r_0^2}{R^2} r_1. \quad (3.3)$$

Em seguida escrevemos a expressão para o potencial  $V$  (eq.3.2),

$$V \approx \frac{r_0^3}{\pi l_s^2 R^2} \int_1^{\frac{r_1}{r_0}} \frac{duu^2}{\sqrt{u^4 - 1}} - 2m_q \approx -\frac{r_0^3 c}{\pi l_s^2}, \quad (3.4)$$

onde,  $c = \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{\Gamma^2(1/4)}$ . Observamos que  $V$  tem um sinal negativo, isso é resultado do fato de ter subtraído a parte divergente do potencial. Essa parte divergente é identificada com a massa do par de quarks  $2m_q \approx \frac{r_0^2 r_1}{\pi l_s^2 R^2}$ . Finalmente, como consequência das equações (3.3) e (3.4), temos:

$$V(L) = -\left(\frac{L}{2r_1}\right)^{3/2} \frac{Rc}{\pi l_s^2}. \quad (3.5)$$

Como podemos observar, este potencial concorda como o plot obtido numericamente na figura 3.6. Este resultado para o potencial  $V(L)$  discorda com o obtido em [20]. Isso é devido a que os autores desse trabalho não efetuaram o esquema de renormalização que temos utilizado nesta tese.

### 3.1.3 Regime intermediário no espaço de fundo

Depois de estudar o comportamento do potencial  $V$  nas seções anteriores, podemos afirmar que não há uma transição de confinamento/desconfinamento entre os regimes de  $r_0 \ll R$  e  $r_0 \gg R$ . Porém, nesta seção estudaremos o que estaria acontecendo em regimes intermediários  $r_0 \sim R$ . Lembrando que devemos considerar o limite de massas pesadas para os quarks  $r_1 \gg r_0$ , faremos uma análise primeiro da dependência da distância da separação  $L$ , com a posição mínima da corda  $r_0$  neste regime  $r_0 \sim R$ , onde o plot desta dependência é mostrado na figura 3.7. Como vimos anteriormente, no regime  $r_0 \ll R$

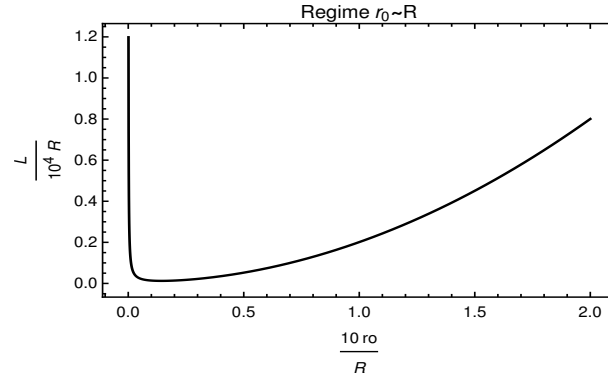


Figura 3.7: Dependência da separação  $L/R$  com a posição  $r_0/R$ , onde,  $r_1/R = 10^5$  e  $r_0/R < 0.2$ .

tínhamos uma dependência decrescente de  $L$  com respeito a  $r_0$ . Depois no regime  $r_0 \gg R$ , tínhamos um comportamento crescente de  $L$  com respeito de  $r_0$ . Então, uma transição entre um comportamento crescente e decrescente como observado na figura 3.7, é esperado. Podemos dizer que o ponto onde ocorre esta transição é onde a função  $L(r_0)$  atinge o valor mínimo. Este ponto é denotado por  $r^*$  e pode ser achado logo ao tomar a derivada da expressão para  $L$  (eq.3.1) e igualar a zero:

$$\left[ \frac{dL(r_0)}{dr_0} \right]_{r_0=r^*} = 0. \quad (3.6)$$

Algumas soluções numéricas para esta equação são dadas na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Alguns valores de  $r^*/R$  obtidos a partir da eq.(3.6) para diferentes valores de  $r_1/R$ .

$r^*/R$	$r_1/R$
$9.87 \times 10^{-3}$	$10^6$
$3.015 \times 10^{-2}$	$10^5$
$6.687 \times 10^{-2}$	$10^4$
$1.42 \times 10^{-1}$	$10^3$

Agora, vejamos o que acontece com o potencial  $V$  neste regime. Primeiro faremos um plot da dependência deste potencial com a posição  $r_0$ . Este plot é mostrado na figura 3.8. Como podemos observar na figura, o potencial continua sendo negativo e caindo conforme  $r_0$  cresce. Vejamos o que acontece com a dependência do potencial  $V$  com a distância da separação  $L$ . Um plot desta dependência é mostrado na figura 3.9.

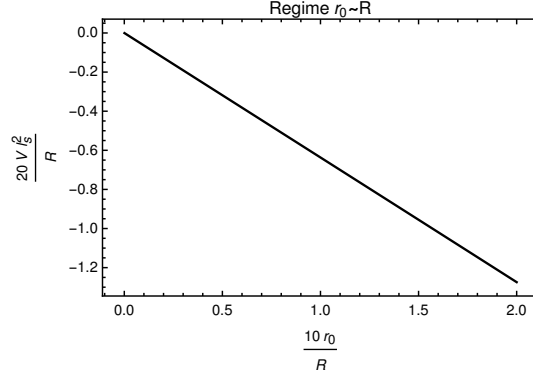


Figura 3.8: Dependência do potencial de interação  $V$  com  $r_0$ , onde,  $r_1/R = 10^5$ .

Aqui podemos apreciar que o potencial tem duas ramas. A rama superior corresponde

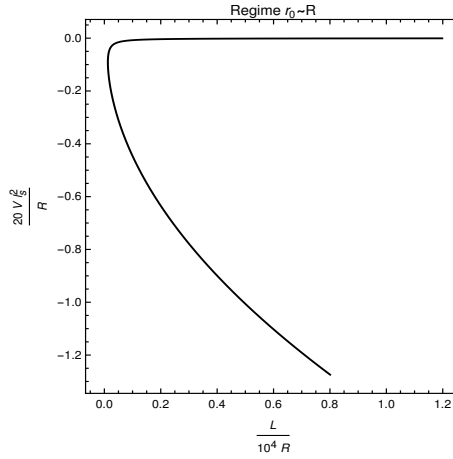


Figura 3.9: Transição no comportamento do potencial  $V(L)$ , onde,  $r_1/R = 10^5$ .

ao comportamento não-confinante achado no regime  $r_0 \ll R$  (esta rama é crescente, porém, apresenta um comportamento assintótico caminhando para zero) e a rama inferior corresponde ao comportamento também não-confinante, achado no regime  $r_0 \gg R$ . A rama superior é definida para a região  $r_0 < r^*$  e a rama inferior é definida para a região  $r_0 > r^*$ . Este resultado foi primeiro apresentado em [35].

## 3.2 Potenciais de interação quark-antiquark na M2 brana

Na seção anterior, apresentamos um estudo numérico do comportamento do potencial  $V(L)$  para diferentes regimes geométricos na D3 brana. Agora nesta seção, continuaremos com

o estudo numérico do comportamento do potencial de interação quark-antiquark  $V(L)$  na M2 brana. Para esta análise, partimos das expressões para a distância da separação entre o par quark-antiquark ( $L$ ) e o potencial de interação entre este par ( $V$ ), os quais foram obtidos no capítulo anterior:

$$L = 2r_0 \int_1^{r_1/r_0} du \frac{(1 + \frac{\epsilon}{u^6}) u^3}{\sqrt{u^8 - u^6 + \epsilon(u^8 - 1)}}, \quad (3.7)$$

$$V = \frac{r_0^2 \sqrt{1 + \epsilon}}{\pi l_{11}^3} \int_1^{r_1/r_0} du \frac{u^5}{\sqrt{u^8 - u^6 + \epsilon(u^8 - 1)}} - \frac{r_1^2}{2\pi l_{11}^3}, \quad (3.8)$$

onde  $\epsilon = \left(\frac{R_2}{r_0}\right)^6$ .

### 3.2.1 Corda perto do horizonte

Este regime geométrico é definido pelo limite  $r_0 \ll R_2$  ( $\epsilon \gg 1$ ), o que significa que temos posicionado a corda em uma região perto do horizonte, onde a geometria do espaço-tempo de fundo é aproximadamente  $AdS_4 \times S^7$ . Nesta seção também estaremos trabalhando com quarks muito pesados em uma configuração estática da corda, o qual quer dizer que vamos considerar o limite  $r_0 \ll r_1$  em nossa análise.

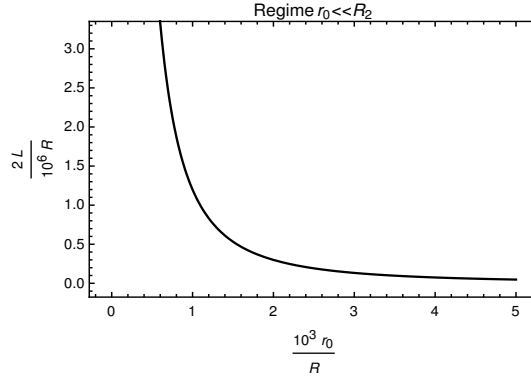


Figura 3.10: Dependência de  $L/R_2$  com a posição  $r_0/R$ , onde,  $r_1/R_2 = 10^4$ ,  $r_0/R_2 < 5 \times 10^{-3}$ .

Começamos nossa análise fazendo uma plotagem da dependência da distância  $L$  (eq.3.7) com a posição mínima da corda  $r_0$ . Este plot é mostrado na figura 3.10, onde podemos observar que  $L$  decresce de forma contínua conforme  $r_0$  cresce. Logo fazemos uma plotagem do comportamento do potencial  $V$  com respeito a posição  $r_0$ . Este plot é mostrado

na figura 3.11, onde observamos que o potencial é negativo e decresce de forma contínua a medida que  $r_0$  cresce.

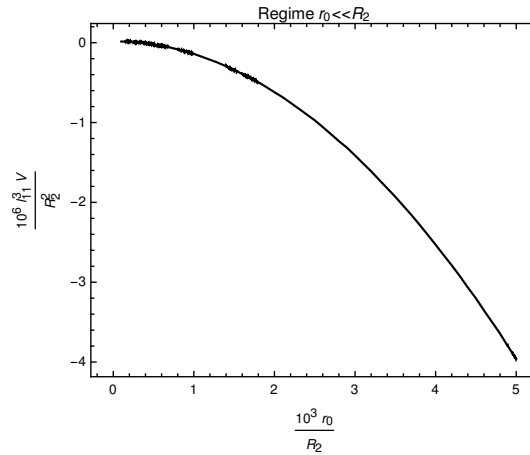


Figura 3.11: Dependência de  $l_{11}^3 V/R_2^2$  com a posição  $r_0/R$ , onde,  $r_1/R_2 = 10^4$ ,  $r_0/R_2 < 5 \times 10^{-3}$ .

Continuando com nossa análise, agora faremos uma plotagem da dependência do potencial  $V$ (eq.3.7) com a distância da separação  $L$ ( eq.3.7) neste regime. Esta plotagem é mostrada na figura 3.12, onde podemos observar que o potencial é negativo, crescente e vai para zero a medida que  $L$  aumenta. Este potencial, obtido primeiro em [35], concorda com a forma analítica obtida no capítulo anterior, a mesma que é consistente com o esperado para a correspondente teoria conforme dual.

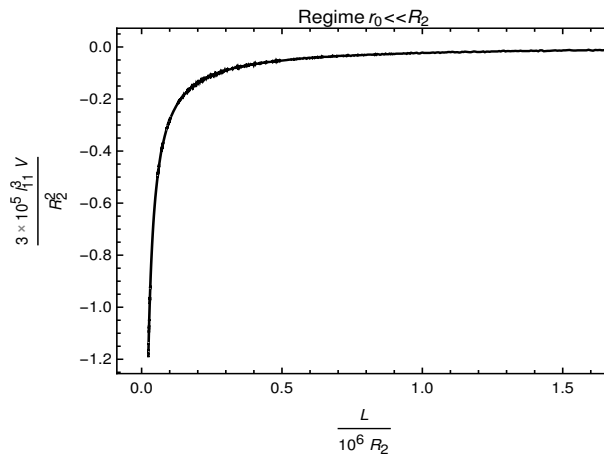


Figura 3.12: Potencial  $l_{11}^3 V/R_2^2$  entre quarks na M2 brana em função a  $L/R_2$ , onde,  $r_1/R_2 = 10^4$  e  $r_0/R_2 < 5 \times 10^{-3}$ .

### 3.2.2 Corda longe do horizonte

Agora, estudaremos o regime oposto, o qual consiste em considerar o limite  $r_0 \gg R_2$ . Isto significa que temos posicionado a corda muito longe do horizonte de eventos do espaço de fundo da M2 brana. Nesse regime, a geometria do espaço-tempo de fundo é aproximadamente chata (espaço de Minkowski). Além disso, devemos lembrar que estamos utilizando o limite de quarks muito massivos, onde  $r_1 \gg r_0$ .

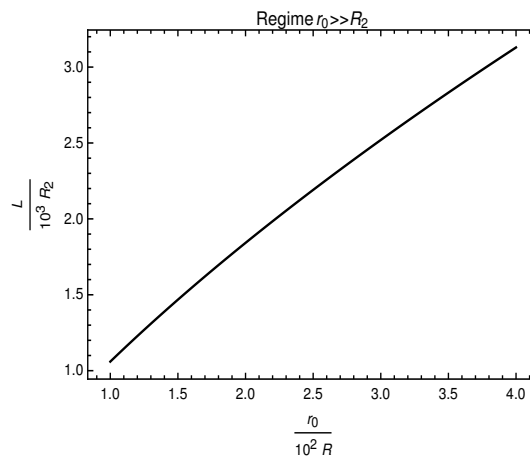


Figura 3.13: Distância entre quarks  $L/R_2$  na M2 brana como função de  $r_0/R_2$ , onde,  $r_1/R = 10^4$  e  $r_0/R_2 > 10^2$ .

Começamos analisando o comportamento da distância entre quarks  $L$  (eq.3.7) com respeito à posição  $r_0$ . Para isso, fazemos um plot que é mostrado na figura 3.13, onde podemos notar que neste regime  $L$  possui um comportamento crescente de forma contínua a medida que a posição  $r_0$  cresce. Também analisamos o comportamento do potencial de interação  $V$  com respeito à posição  $r_0$ . Para isso, fazemos um plot que é mostrado na figura 3.14, onde podemos observar que o potencial  $V$  é positivo e possui um comportamento crescente enquanto a posição  $r_0$  aumenta.

Finalmente, analisamos neste regime o comportamento do potencial  $V$  frente à distância  $L$ , o qual é mostrado no plot da figura 3.15. Neste plot, vemos que o potencial é positivo e crescente a medida que  $L$  cresce, o que significa que temos um potencial confinante neste regime. Este comportamento, apresentado também em [35], concorda com o obtido no



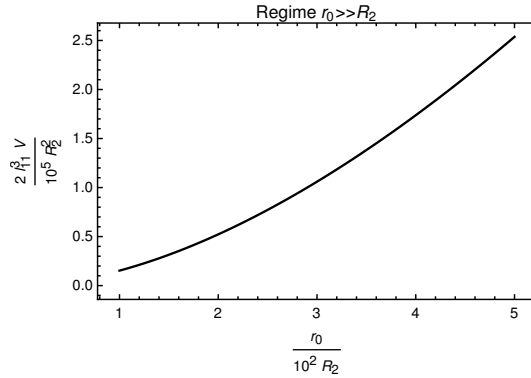


Figura 3.14: Potencial  $l_{11}^3 V/R_2^2$  entre quarks na M2 brana como função de  $r_0/R_2$ , onde,  $r_1/R = 10^4$  e  $r_0/R_2 > 10^2$ .

capítulo anterior e em [34]. Lembremos que neste regime, a teoria dual não é mais conforme, com o qual perdemos a forma do potencial não-confinante  $V \sim 1/L$  que tínhamos no caso da seção anterior.

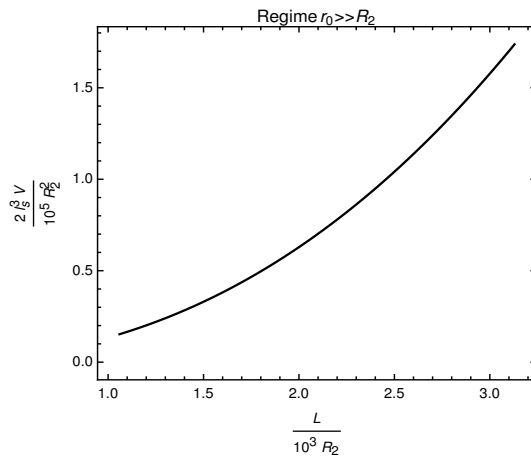


Figura 3.15: Potencial  $l_{11}^3 V/R_2^2$  com respeito a distância  $L/R_2$  entre quarks na M2 brana, onde,  $r_1/R = 10^4$  e  $r_0/R_2 > 10^2$ .

### 3.2.3 Transição desconfinamento/confinamento

Como já vimos nas seções anteriores, existe uma mudança de um estado de desconfinamento para o estado de confinamento, ao partir de um regime perto do horizonte  $r_0 \ll R$  a um regime longe do horizonte  $r_0 \gg R_2$ . Por consequência, nesta seção iremos discutir como acontece a transição de estados de confinamento. Razoavelmente, esperamos achar a transição em regiões intermediárias do espaço de fundo de M2 brana, definidas pelo

regime  $r_0 \sim R_2$ .

Em primeiro lugar, iremos fazer um plot do comportamento da distância entre quarks  $L$  com respeito a posição  $r_0$  neste regime. Este plot é mostrado na figura 3.16, onde podemos notar que existe um mínimo de  $L$  para  $r_0 = r^*$ . Analogamente ao que foi feito

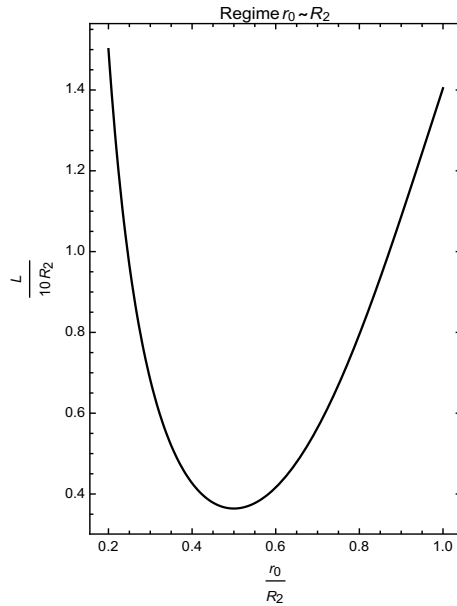


Figura 3.16: Distância entre quarks na M2 brana  $L/R_2$  com respeito a  $r_0/R_2$ , onde,  $r_1/R_2 = 10^4$ ,  $r_0/R_2 \leq 1$  e  $r^*/R_2 = 0.500$ .

na primeira seção deste capítulo, aqui também podemos, a partir da eq.(3.7), derivar a seguinte equação para achar os pontos  $r_0 = r^*$  onde  $L$  é mínimo:

$$\left[ \frac{d}{dr_0} L(r_0) \right]_{r_0=r^*} = 0. \quad (3.9)$$

Algumas soluções desta equação, para diferentes valores de corte  $r_1/R_2$ , são apresentadas na tabela 3.2. Agora faremos um plot do potencial  $l_{11}^3 V/R_2^2$  em função de  $r_0/R_2$ . Este plot

Tabela 3.2: Algumas soluções  $r^*/R_2$  da eq.(3.9) para diferentes valores de  $r_1/R_2$ .

$r^*/R_2$	$r_1/R_2$
0.500	$1 \times 10^4$
0.503	$8 \times 10^3$
0.510	$4 \times 10^3$
0.524	$1 \times 10^3$

é mostrado na figura 3.17, onde também podemos observar que  $V$  possui um mínimo no

ponto de  $r_m/R_2 = 0.590$ , como podemos notar  $r_m \neq r^*$ . A parte crescente do potencial corresponde a um comportamento confinante e a parte decrescente ao comportamento não-confinante. Para concluir, agora faremos neste regime, um plot do potencial  $l_{11}^3 V/R_2^2$

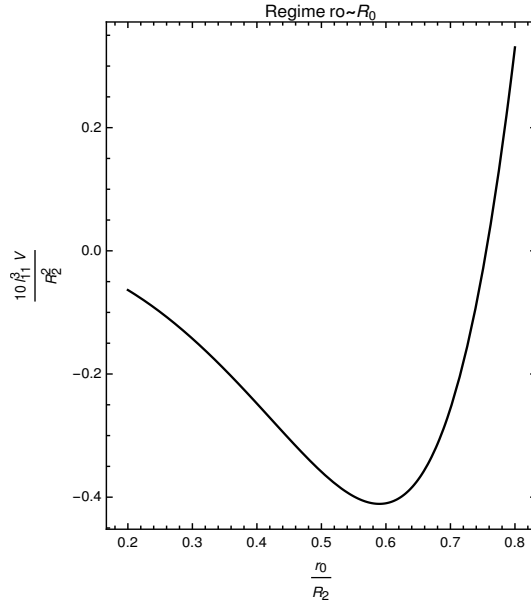


Figura 3.17: Potencial  $l_{11}^3 V/R_2^2$  entre quarks na M2 brana como função de  $r_0/R_2$ , onde,  $r_1/R_2 = 10^4$ ,  $r_0/R_2 \leq 1$  e  $r_m/R_2 = 0.590$ .

contra a distância da separação  $L/R_2$ . Este plot é mostrado na figura 3.18. Nesta figura podemos observar que o potencial  $V$  possui duas ramas: uma superior que descreve um potencial confinante e outra inferior que descreve um potencial não-confinante. Evidentemente, a transição entre estes estados de confinamento ocorre entre os pontos  $r_0 = r^*$  e  $r_0 = r_m$ , para valores  $r_0 < r^*$  o potencial é não-confinante e para valores  $r_0 > r_m$  o potencial passa a ser confinante. Estes resultados foram primeiro encontradas em [35].

### 3.3 Potenciais de interação quark-antiquark na M5 brana

Analogamente ao que foi feito nas seções anteriores, agora faremos uma análise numérica do comportamento do potencial de interação  $V$  entre um par quark-antiquark na M5 brana. Esta análise será feita para diferentes regimes geométricos que dependem da

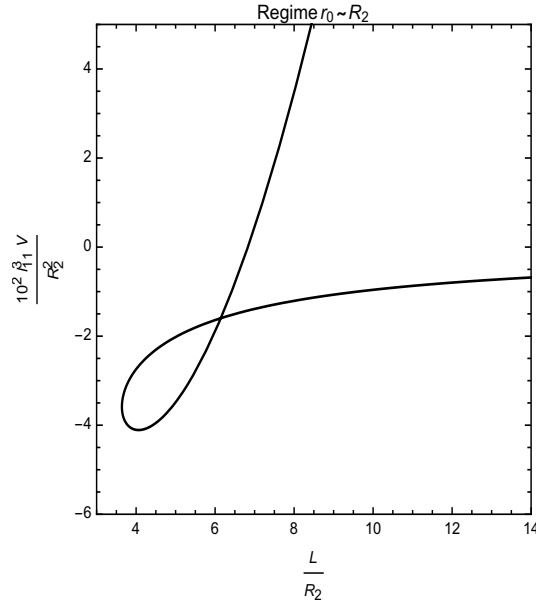


Figura 3.18: Potencial  $l_{11}^3 V/R_2^2$  entre quarks na M2 brana como função de  $L/R_2$ .

posição mínima da corda com respeito ao horizonte de eventos do espaço de fundo da M5 brana. Ainda, estamos interessados em estudar o caráter confinante ou não-confinante deste potencial nesses regimes e, principalmente saber de que forma poderiam ocorrer possíveis transições de estados de confinamento no potencial  $V$  ao ir de um regime ao outro.

Lembremos que no capítulo anterior foi obtida uma expressão para a distância da separação  $L$  entre um par quark-antiquark:

$$L = 2r_0 \int_1^{r_1/r_0} du \frac{(1 + \epsilon/u^3)^{1/2}}{(u^2 - 1)^{1/2}}, \quad (3.10)$$

onde,  $\epsilon = \frac{R_2^3}{r_0^3}$ , sendo que  $r_0$  e  $r_1$  são a posição mínima e máxima da corda no eixo da coordenada radial. Além disso, a correspondente expressão para o potencial de interação  $V$  entre este par de quarks na M5 brana é dada pela seguinte expressão:

$$V = \frac{r_0^2}{\pi l_{11}^3} \int_1^{r_1/r_0} du \frac{u^2(1 + \epsilon/u^3)^{1/2}}{(u^2 - 1)^{1/2}} - \frac{r_0^2}{\pi l_{11}^3} \int_0^{r_1/r_0} du u \sqrt{1 + \frac{\epsilon}{u^3}}. \quad (3.11)$$

### 3.3.1 Corda perto do horizonte

Nesta seção analisaremos o que acontece com o potencial de interação na região do espaço-tempo de fundo, definida pelo limite  $r_0 \ll R_5$ , que quer dizer que a corda tem sido posicionada perto do horizonte de eventos no espaço de fundo. Esta região do espaço possui a forma da geometria  $AdS_7 \times S^4$ . Analogamente feito nas seções anteriores, aqui iremos trabalhar como o limite de quarks muito pesados,  $r_1 \gg r_0$ . Então, neste regime a distância da separação  $L$  em função de  $r_0$  (eq.(3.10) pode ser graficada como mostrada na figura 3.19. Nesta figura podemos observar que distância  $L$  decai de forma monótona

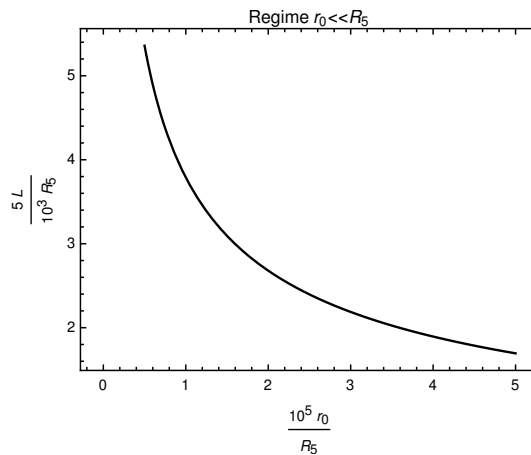


Figura 3.19: Distância  $L/R_5$  entre quarks na M5 brana como função de  $r_0/R_5$ , onde,  $r_1/R_5 = 10^2$  e  $r_0/R_5 < 5 \times 10^{-5}$ .

com a posição  $r_0$ .

Seguindo com a análise, agora faremos um gráfico do potencial de interação  $V$  em função de  $r_0$  (eq.(3.11)). Nesse gráfico mostrado na figura 3.20, pode-se observar que o potencial é negativo e decrescente conforme  $r_0$  aumenta.

Finalmente, fizemos um gráfico do potencial  $V$  em função da separação  $L$ . Neste gráfico mostrado na figura 3.21, nota-se que o potencial, encontrado primeiro em [35], é não-confinante e possui a forma  $V \sim 1/L$ , obtida analiticamente no capítulo anterior. Como já mencionado, este tipo de potencial é esperado para a teoria dual com simetria conforme.

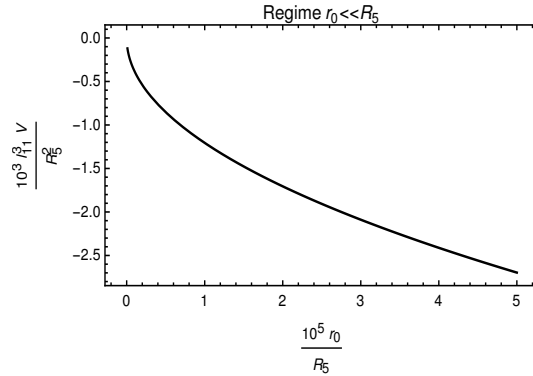


Figura 3.20: Potencial  $l_{11}^3 V/R_5^2$  entre quarks na M5 brana como função de  $r_0/R_5$ , onde,  $r_1/R_5 = 10^2$  e  $r_0/R_5 < 5 \times 10^{-5}$ .

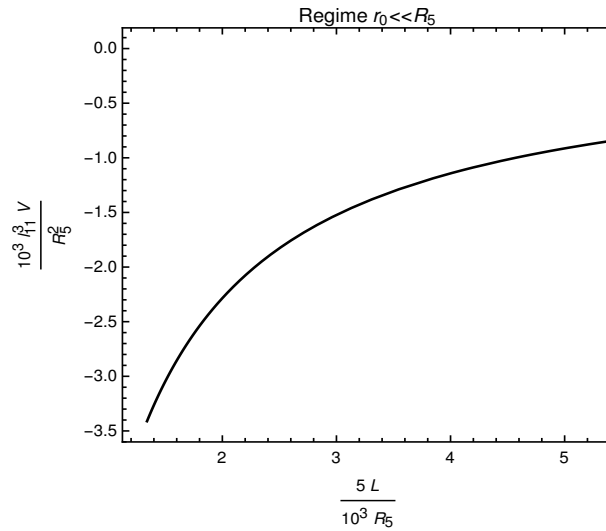


Figura 3.21: Potencial  $l_{11}^3 V/R_5^2$  entre quarks na M5 brana em função da distância  $L/R_5$ , onde,  $r_1/R_5 = 10^2$  e  $r_0/R_5 < 8 \times 10^{-5}$ .

### 3.3.2 Corda longe do horizonte

Nesta seção, analisaremos a região do espaço de fundo da M5 brana definida pelo limite  $r_0 \gg R_5$ , que significa que temos posicionado a corda muito distante do horizonte. Esta região do espaço possui uma geometria quase chata (espaço de Minkowski). Por outro lado, ainda continuamos considerando o limite de quarks muito massivos  $r_1 \gg r_0$ .

Para começar a análise, faremos um gráfico da distância entre quarks  $L/R_5$  em função de  $r_0$  (eq.3.10). No gráfico mostrado na figura 3.22, podemos observar o comportamento crescente de  $L$  com respeito a  $r_0$ .

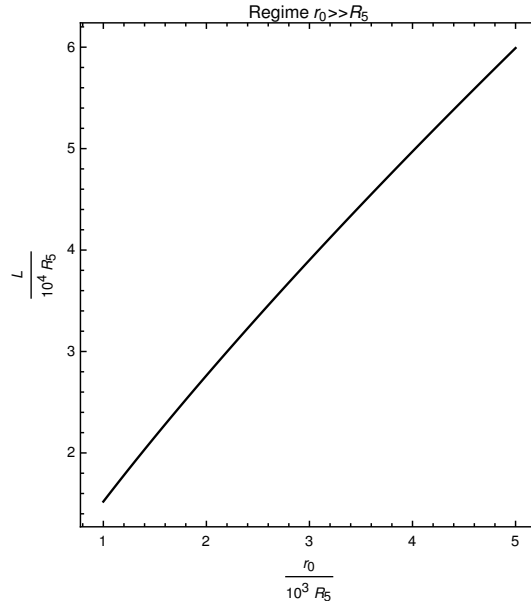


Figura 3.22: Distância  $L/R_5$  entre quarks na M5 brana em função de  $r_0/R_5$ , onde,  $r_1/R_5 = 10^6$  e  $r_0/R_5 > 10^3$ .

Seguindo com a nossa análise neste regime, agora faremos um gráfico do potencial  $V$  em função de  $r_0$  (eq.3.11). Este gráfico é apresentado na figura 3.23, onde podemos observar o comportamento crescente de  $V$  com respeito a  $r_0$ .

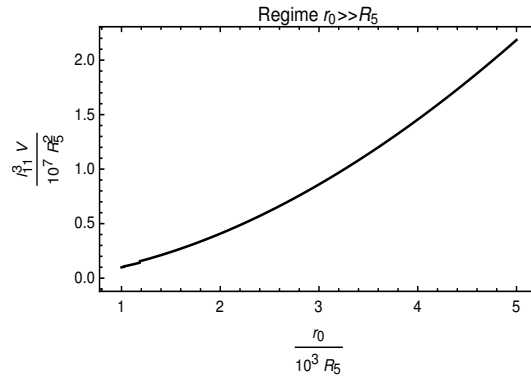


Figura 3.23: Potencial  $l_{11}^3 V/R_5^2$  entre quarks na M5 brana em função de  $r_0/R_5$ , onde,  $r_1/R_5 = 10^6$  e  $r_0/R_5 > 10^3$ .

Finalmente, fizemos um gráfico do potencial  $V$  em função da distância  $L$ . Este gráfico é mostrado na figura 3.24, podendo-se observar que o potencial  $V(L)$  é crescente e positivo em respeito a  $L$  e, portanto, trata-se de um potencial confinante, o qual concorda com o resultado obtido analiticamente no capítulo anterior. Este resultado foi primeiro

encontrado em [35].

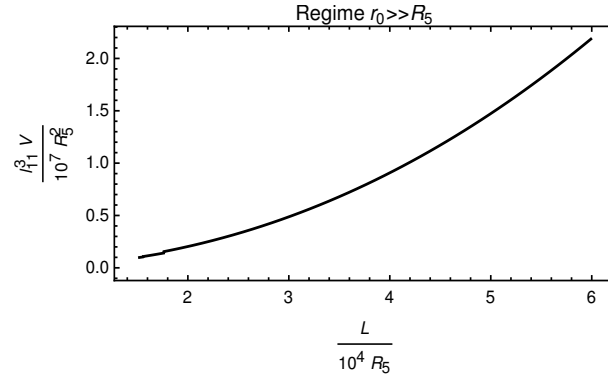


Figura 3.24: Potencial de interação  $l_{11}^3 V/R_5^2$  entre quarks na M5 brana como função da distância  $L/R_5$ , onde,  $r_1/R_5 = 10^6$  e  $r_0/R_5 > 10^3$ .

### 3.3.3 Transição do potencial de interação na M5 brana

Nas seções anteriores, discutimos o comportamento do potencial de interação em regimes opostos: em  $r_0 \gg R_5$  achamos confinamento e em  $r_0 \ll R_5$ , achamos um potencial não-confinante, portanto, agora analisaremos como ocorre a transição entre estes estados de confinamento. A transição entre eles deve ocorrer em uma região intermediária que designamos pelo regime  $r_0 \sim R_5$ .

Em primeiro lugar, faremos um gráfico da distância  $L$  da separação entre quarks (eq.3.10) como função da posição mínima  $r_0$ . O gráfico é mostrado na figura 3.25, onde podemos observar que  $L$  possui um mínimo no ponto  $r_0 = r^*$ . Este ponto pode ser achado a partir da seguinte equação:

$$\frac{d}{dr_0} L(r_0/R_5) = 0. \quad (3.12)$$

Algumas soluções desta equação são mostradas na tabela 3.3 para alguns valores de corte  $r_1/R_5$ .

Agora faremos um gráfico da dependência do potencial  $V$  com a posição  $r_0$ . Este gráfico é mostrado na figura 3.26, onde observamos que o potencial também possui um mínimo em algum ponto  $r_0 = r_m$ .



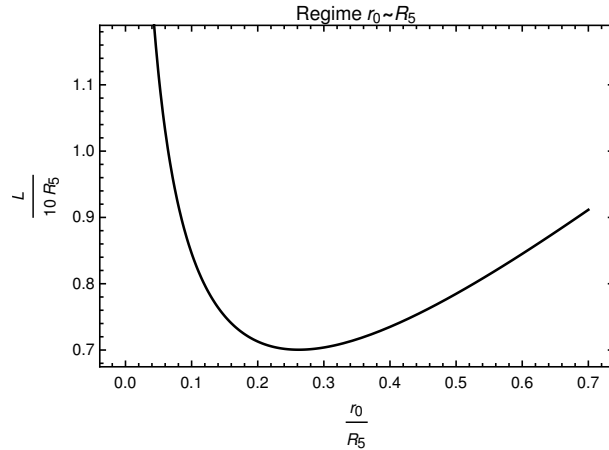


Figura 3.25: Distância  $L/R_5$  entre quarks na M5 brana em função de  $r_0/R_5$ , onde,  $r_1/R_5 = 10^2$ ,  $r_0/R_5 < 0.7$  e  $r^*/R_5 = 0.26$ .

Tabela 3.3: Algumas raízes  $r^*/R_5$  da eq.(3.12) para diferentes valores de  $r_1/R_5$ .

$r^*/R_5$	$r_1/R_5$
0.19	$1 \times 10^3$
0.21	$5 \times 10^2$
0.26	$1 \times 10^2$
0.42	10

Finalmente, faremos um gráfico do potencial de interação  $V$  como função da distância da separação  $L$ . Este gráfico está na figura 3.27, onde podemos observar que o potencial possui duas ramas. A rama inferior descreve um potencial não-confinante e negativo, enquanto que a superior descreve um potencial confinante. Evidentemente a transição se produz no ponto  $r_0 = r^*$ , assim, verificamos que para a região  $r_0 < r^*$  temos desconfinamento e para a região  $r_0 > r^*$  confinamento. Estes resultados foram encontrados primeiro em [35].

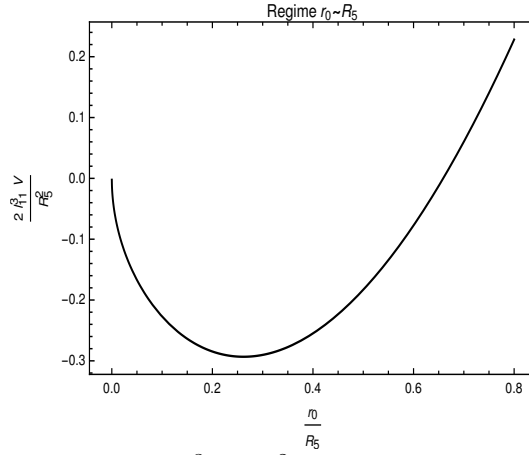


Figura 3.26: Potencial de interação  $l_{11}^3 V / R_5^2$  entre quarks na M5 brana em função de  $r_0 / R_5$ , onde,  $r_1 / R_5 = 10^2$  e  $r_0 / R_5 < 0.8$

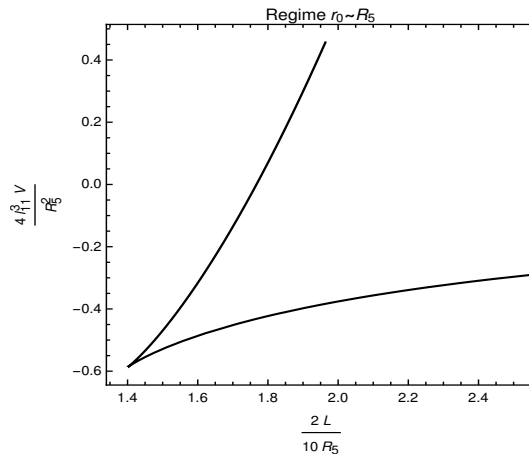


Figura 3.27: Potencial de interação  $l_{11}^3 V / R_5^2$  entre quarks na M5 brana em função da separação  $L / R_5$ , onde,  $r_1 / R_5 = 10^2$ ,  $r_0 / R_5 < 0.8$ .

## Capítulo 4

# Entropia de emaranhamento quântico em fundos de D3 branas, M2 branas e M5 branas.

Embora a entropia de emaranhamento e o laço de Wilson sejam objetos parecidos na forma em que são calculados na dualidade AdS/CFT, a interpretação física delas é diferente. O laço de Wilson depende da posição das partículas ou, na teoria dual, do movimento da corda aberta, cujos extremos são representados pelas partículas. Porém, a entropia de emaranhamento  $S_A$  depende unicamente das propriedades geométricas do espaço-tempo de fundo, no lado da teoria gravitacional, e da escolha do subsistema  $A$ , no lado da teoria de calibre.

Neste capítulo calcularemos e analisaremos a entropia de emaranhamento quântico via holografia, para as teorias de campos de super Yang-Mills duais às teorias de cordas/teoria M em espaços de fundo de D3 brana, M2 brana e M5 brana. O método holográfico utilizado neste trabalho para calcular a entropia, consiste em aplicar a fórmula de Ryu-Takayanagi [41] nesses espaços de fundo.

### 4.1 Entropia de emaranhamento na D3 brana

Começamos calculando a entropia de emaranhamento quântico de uma teoria de super Yang-Mills dual a uma teoria de cordas em um espaço de fundo gerado por  $N$  D3 branas

coincidentes. Lembremos que a geometria deste espaço de fundo é dada pela seguinte expressão:

$$ds^2 = dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu} = \left(1 + \frac{R^4}{r^4}\right)^{-1/2} (-dt^2 + dx_3^2) + \left(1 + \frac{R^4}{r^4}\right)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (4.1)$$

onde  $x^\mu = (t, x^a, r, \theta_b)$  são as coordenadas do espaço-tempo, sendo que,  $a = 1, 2, 3$  e  $b = 1, 2, \dots, 5$ . O tensor  $g_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço-tempo,  $R = (4\pi g N l_s^4)^{1/4}$  é o raio de curvatura da D3 brana,  $dx_3^2$  é o elemento de linha euclideano em  $\mathbb{R}^3$  e  $d\Omega_5^2$  é o elemento de linha sobre a 5-esfera, a qual só depende das coordenadas  $\theta_b$ .

### 4.1.1 Faixa retangular

Em primeiro lugar, para calcular a entropia de emaranhamento, devemos definir um subsistema  $A \in \mathbb{R}^3$ . Este subsistema é escolhido como sendo uma faixa retangular da seguinte forma:

$$X \equiv x^1 \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right], \quad x^2, x^3 \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]. \quad (4.2)$$

Por outro lado, como foi explicado no capítulo 1 deste trabalho, a entropia de emaranhamento quântico  $S_A$  é proporcional à área da superfície mínima  $\gamma_A$ . Esta superfície tem neste caso três dimensões ( $d = 3$ ) e está contida no espaço da D3 brana, vezes uma dimensão extra dada pela coordenada radial  $r$  ( $\gamma_A \subset \mathbb{R}^3 \times \{\hat{r}\}$ ). Ainda, a fronteira desta superfície está contida na D3 brana e coincide com a fronteira do subsistema  $A$  ( $\partial\gamma_A = \partial A$ ).

Além disso, a área geral de uma superfície qualquer em um espaço curvo pode ser expressada como:

$$\mathcal{A} = \int d^3\sigma \sqrt{\det(G_{\alpha\beta})}, \quad (4.3)$$

onde,  $G_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha x^m \partial_\beta x^n g_{mn}$  é chamada de métrica induzida na superfície em questão. No caso da superfície  $\gamma_A$  temos que  $x^m = \{x^1, x^2, x^3, r\}$ .

Vamos considerar que a faixa retangular é suficientemente grande ( $\frac{L}{l} \gg 1$ ) e, portanto, podemos supor que a superfície  $\gamma_A$  é invariante por translações nas coordenadas  $x^2$

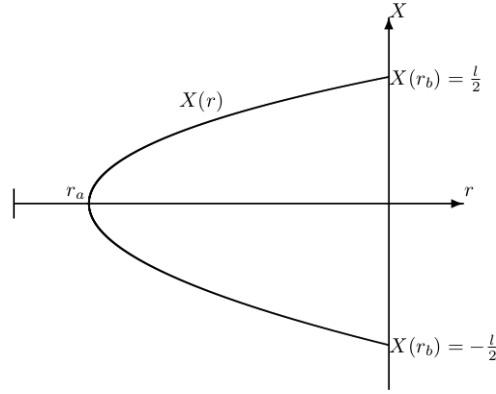


Figura 4.1: Perfil  $X(r)$  da superfície  $\gamma_A$ .

e  $x^3$ . Como consequência, utilizamos a seguinte parametrização na superfície  $\gamma_A$ :

$$x^1 = X(\sigma_1),$$

$$x^2 = \sigma_2,$$

$$x^3 = \sigma_3,$$

$$r = \sigma_1.$$

Como podemos notar, esta parametrização da superfície  $\gamma_A$  é basicamente determinada pelo perfil  $x_1 = X(r)$  desta superfície, tal como é mostrada na figura (4.1).

Por consequência, usando esta parametrização na equação (4.3), obtemos uma expressão funcional para a área da superfície  $\gamma_A$ :

$$\mathcal{A} = L^2 \int \frac{dr}{f(r)} \sqrt{\frac{X'^2}{f(r)} + f(r)}, \quad (4.4)$$

onde,  $f(r) = \sqrt{1 + R^4/r^4}$  e  $X' \equiv dX/dr$ . Como podemos observar, a lagrangiana é:

$$\mathcal{L}(X', r) = \frac{1}{f(r)} \sqrt{\frac{X'^2}{f(r)} + f(r)}. \quad (4.5)$$

Usando as equações de Euler-Lagrange nesta lagrangiana, podemos encontrar o perfil  $X(r)$  que minimiza a área  $\mathcal{A}$ :

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'(r)} \right)' = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = 0. \quad (4.6)$$

Como consequência, obtemos a seguinte equação para  $X'(r)$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'(r)} = \frac{X'(r)}{f^2(r) \sqrt{\frac{[X'(r)]^2}{f(r)} + f(r)}} = \frac{1}{f^{3/2}(r_a)},$$

onde foi utilizada a condição de contorno  $X'(r_a) \rightarrow \infty$ . Resolvendo esta equação temos:

$$\frac{dX}{dr} = \pm \frac{f^{5/2}(r)}{\sqrt{f^3(r_a) - f^3(r)}}, \quad (4.7)$$

onde,  $r_a$  é a posição mínima da superfície  $\gamma_A$  a respeito da coordenada  $r$ , nesta posição  $X(r_a) = 0$  (ver figura 4.1). Além disso, a posição da superfície  $\gamma_A$  na D3 brana é  $r_b$ , ainda nesta posição temos:

$$X(r_b) = \pm \frac{l}{2}. \quad (4.8)$$

Usando estas condições de contorno para  $X(r)$ , podemos integrar a equação (4.7) para obter a largura  $l$  da faixa:

$$\frac{l}{2} = \int_{r_a}^{r_b} dr \frac{f^{5/2}(r)}{\sqrt{f^3(r_a) - f^3(r)}}. \quad (4.9)$$

Note que,  $r_a$  poderia ser resolvida em termos de  $l$  e  $r_b$ . Depois de substituir a equação (4.7) na equação (4.4) e levando em conta os limites de integração utilizados na equação (4.9), finalmente achamos uma expressão para a área mínima:

$$\mathcal{A} = L^2 \int_{r_a}^{r_b} dr \frac{f^{3/2}(r_a)}{\sqrt{f(r)[f^3(r_a) - f^3(r)]}}. \quad (4.10)$$

A função  $f(r)$  é monótona decrescente, onde os máximos e mínimos são  $f(r_a)$  e  $f(\infty) = 1$ , respectivamente. Como resultado, a expressão dentro desta integral tende a um valor constante no limite  $r \rightarrow \infty$ , de modo que  $\mathcal{A}$ , irá divergir quando  $r_b \rightarrow \infty$ . Assim, para obter um resultado finito, precisamos tirar a parte divergente de  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{div}} + \mathcal{A}_{\text{finito}}. \quad (4.11)$$

A parte divergente de  $\mathcal{A}$  pode ser definida a partir de (4.10) da seguinte forma:

$$\mathcal{A}_{\text{div}} = L^2 \int_0^{r_b} dr \frac{f^{3/2}(r_a)}{\sqrt{f(r)[f^3(r_a) - 1]}}. \quad (4.12)$$

Por outro lado, segundo a fórmula de Ryu-Takayanagi [41], podemos escrever a entropia de emaranhamento da seguinte forma:

$$S_A = \frac{\mathcal{A}}{4G_N^5} = S_{\text{div}} + \frac{L^2 R}{4G_N^5} s\left(\frac{l}{R}\right), \quad (4.13)$$

sendo que,  $S_{\text{div}} = \frac{\mathcal{A}_{\text{div}}}{4G_N^5}$  é a parte divergente da entropia e  $s(\frac{l}{R})$  é a entropia de emaranhamento finita e adimensional como uma função de  $l/R$ . Porém, em geral, só obteremos esta função de forma numérica, já que esta função existe de forma implícita, mas nem sempre podemos encontrá-la de forma analítica como uma função de  $l/R$ . Assim, em geral, só podemos escrever esta entropia adimensional como uma expressão em termos de  $r_a$  e  $r_b$ .

$$s(r_a) = \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{R} \frac{f^{3/2}(r_a)}{\sqrt{f(r)[f^3(r_a) - f^3(r)]}} - \int_0^{r_b} \frac{dr}{R} \frac{f^{3/2}(r_a)}{\sqrt{f(r)[f^3(r_a) - 1]}}. \quad (4.14)$$

Nas próximas seções iremos analisar o comportamento da entropia de emaranhamento adimensional  $s(\frac{l}{R})$  para casos limites da geometria do espaço de fundo, obtendo nesses casos, expressões analíticas para esta função. Além disso, analisaremos o caso geral de forma numérica e compararemos com os resultados analíticos obtidos nos casos limites.

### 4.1.2 Limite perto do horizonte

Este caso limite é obtido levando em conta a aproximação  $r \ll R$ , a qual implica  $f(r) \approx \frac{R^2}{r^2}$ . Esta aproximação corresponde com a região perto do horizonte do espaço de fundo, a qual possui aproximadamente uma geometria  $AdS_5 \times S^5$ . Neste limite, a expressão para a largura da faixa é:

$$\frac{l}{R} = \frac{2R}{r_a} \int_1^{\frac{r_b}{r_a}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^6 - 1}} = \frac{R}{r_a} c \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{r_a^4}{r_b^4}\right) \right], \quad (4.15)$$

onde,  $c = \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/6)}$ . De agora em diante iremos considerar o limite  $r_a \ll r_b$ , então podemos desconsiderar os termos de ordem superior  $\mathcal{O}\left(\frac{r_a^4}{r_b^4}\right)$ .

Ainda mais, neste caso limite, a expressão para a entropia (4.13) fica:

$$S_A = \frac{L^2 r_a^2}{4G_N^5 R} \int_1^{\frac{r_b}{r_a}} dx \frac{x^4}{\sqrt{x^6 - 1}} = \frac{L^2 r_b^2}{24G_N^5 R} - \frac{L^2 c r_a^2}{16G_N^5 R}. \quad (4.16)$$

A partir desta equação e da equação (4.15), podemos eliminar o parâmetro  $r_a$  a fim de ter uma expressão da entropia  $S_A$  em termos da largura  $l$  e  $r_b$ :

$$S_A = \frac{r_b^2 L^2}{8G_N^5 R} - \frac{L^2 c^3 R^3}{16G_N^5 l^2}. \quad (4.17)$$

Note que, o primeiro termo da equação corresponde com a parte divergente da entropia, a qual também pode ser obtida a partir da fórmula (4.12). Além disso, o resultado coincide (a menos de um fator constante na parte divergente) com o resultado obtido em [41]. Portanto, neste caso limite, a entropia adimensional  $s(\frac{l}{R})$  resulta:

$$s(l/R) = -\frac{c^3 R^2}{108 l^2}. \quad (4.18)$$

### 4.1.3 Limite longe do horizonte

Neste caso, o limite corresponde com a região muito distante do horizonte no espaço de fundo, a qual possui uma geometria quase-chata (espaço de Minkowski). É obtido ao considerar a aproximação  $R \ll r$ , a qual implica que  $f(r) \approx 1 + \frac{R^4}{2r^4}$ . Neste limite, a expressão para a largura (4.9) será:

$$\frac{l}{R} \approx \frac{2\sqrt{2/3}}{R^2} r_a^3 \int_1^{\frac{r_b}{r_a}} dx \frac{x^2}{\sqrt{x^4 - 1}} \approx 2\sqrt{2/3} \left(\frac{r_a}{R}\right)^2 \frac{r_b}{R}. \quad (4.19)$$

Note que esta expressão diverge quando  $r_b \rightarrow \infty$ .

Ainda, a partir da equação (4.10), a expressão para a entropia  $S_A$  neste limite fica:

$$S_A \approx \frac{L^2}{4G_N^5} \frac{\sqrt{2/3}}{R^2} r_a^3 \int_1^{\frac{r_b}{r_a}} dx \frac{x^2}{\sqrt{x^4 - 1}} = \frac{\sqrt{2/3} L^2 r_a^2 r_b}{16G_N^5 R^2} - \frac{c^* \sqrt{2/3} L^2 r_a^3}{4G_N^5 R^2}, \quad (4.20)$$

onde,  $c^* = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}$ . Note que o primeiro termo desta expressão corresponde com a parte divergente da entropia, dito termo também, pode ser obtido a partir da fórmula (4.12).

Portanto, a partir das equações (4.20) e (4.19) podemos eliminar o parâmetro  $r_a$ , a fim de obter a entropia  $S_A$  em função de  $l$  e  $r_b$ :

$$S_A = \frac{L^2 l}{32G_N^5 R} - \frac{c^* (3/8)^{\frac{1}{4}} L^2 R}{8G_N^5} \left(\frac{l}{r_b}\right)^{3/2}. \quad (4.21)$$



O primeiro termo continua correspondendo com a parte divergente da entropia, desde que  $l \sim r_b$  (ver equação 4.19). Logo, a entropia adimensional neste limite resulta ser:

$$s(l/R) = -\frac{c^*(3/8)^{\frac{1}{4}}}{2} \left(\frac{l}{r_b}\right)^{3/2}. \quad (4.22)$$

Embora nesta expressão ainda apareça o valor de corte  $r_b$ , a função  $s(\frac{l}{R})$  permanecerá finita. Isso devido a que  $l \sim r_b$  (ver equação 4.19) e, portanto, o cociente  $\frac{l}{r_b}$  permanece finito. Estes resultados são novos e foram apresentados recentemente em [49].

#### 4.1.4 Análise numérica da entropia de emaranhamento quântico no fundo de D3 brana

Nesta seção, pretendemos analisar o caso geral da entropia de emaranhamento quântico para um espaço de fundo da D3 brana. Para tal fim, iremos fazer alguns gráficos da largura da faixa  $l$  e da entropia adimensional  $s(\frac{l}{R})$ , logo, os compararemos com os casos limites anteriormente estudados, visando conhecer o comportamento da entropia no trânsito entre aquelas geometrias de fundo.

Começamos nossa análise apresentando na figura 4.2, um gráfico da largura  $l/R$  (4.9) como uma função de  $r_a/R$ . Na verdade, este gráfico mostra uma comparação entre a

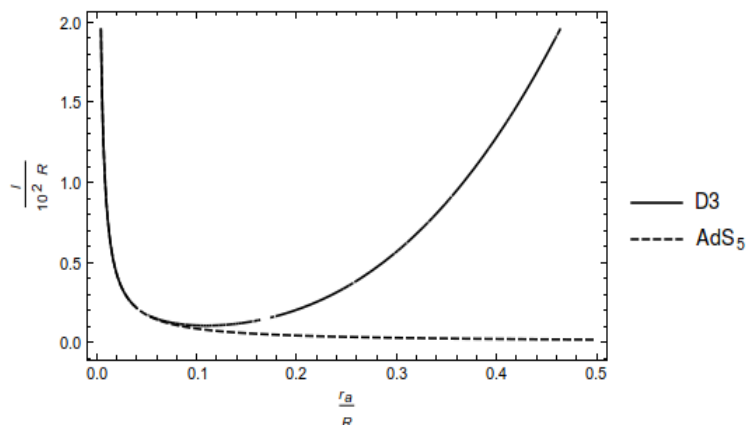


Figura 4.2: Largura da faixa  $l/R$  em função de  $r_a/R$ , onde,  $r_b/R = 10^3$  e  $r_a/R < 0.4$ .

largura  $l$  para caso geral da D3 brana e para o caso limite da geometria  $AdS_5$ . Como

podemos observar, ambas larguras coincidem notavelmente na região  $r_a/R \lesssim 0.1$ . Neste gráfico escolhemos  $r_b/R = 10^3$  como o valor de corte.

O próximo gráfico mostra, na figura (4.3), a largura  $l/R$  como função de  $r_a/R$ . Na verdade, o gráfico mostra uma comparação entre os casos correspondentes a da D3 brana e ao caso limite do espaço quase-chato (geometria de Minkowski). Neste gráfico, utilizamos o valor de corte de  $r_b/R = 10^4$ . Ainda, na região  $r_a/R > 10$  que foi considerada, podemos apreciar que a coincidência das larguras é muito satisfatória.

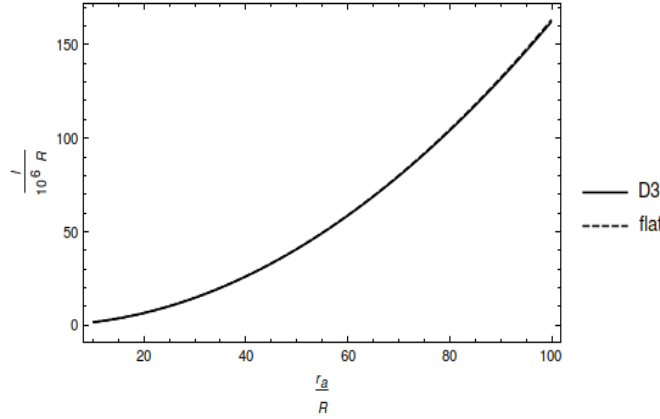


Figura 4.3: Largura da faixa  $l/R$  em função de  $r_a/R$ , onde,  $r_b/R = 10^4$  e  $r_a/R > 10$ .

Por outro lado, na figura (4.4), é mostrada a função adimensional da entropia  $s(\frac{l}{R})$ . De fato, o que é apresentado na figura, é uma comparação entre o caso geral da entropia no fundo gravitacional de D3 brana e o caso limite de  $AdS_5$ . Este gráfico foi feito considerando o valor de corte de  $r_b/R = 10^3$  e também a região  $r_a/R < 0.4$ . Além disso, na figura, observamos que no caso da D3 brana, a função da entropia  $s(\frac{l}{R})$  possui duas ramas, sendo que a superior pertence à região  $r_a/R < 0.1$  e a inferior, à região  $r_a/R > 0.1$ . Note que a rama superior tem uma boa coincidência com o caso limite do  $AdS_5$ .

Finalmente, na figura (4.5) mostra-se uma comparação entre as respectivas funções  $s(\frac{l}{R})$  para os casos da D3 brana e ao caso limite do espaço quase-chato. Neste gráfico, consideramos o valor de corte de  $r_b/R = 10^4$  e consideramos a região  $r_a/R > 10$ . Podemos observar na figura, que a coincidência de ambas funções nessa região é muito boa. Estes

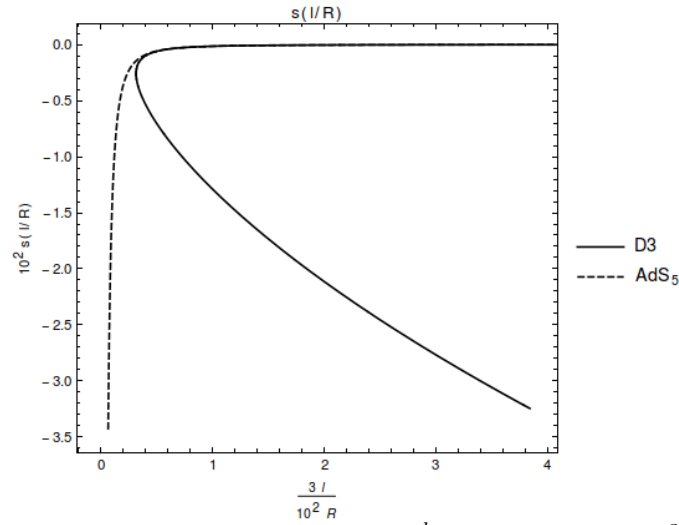


Figura 4.4: Entropia de emaranhamento  $s(\frac{l}{R})$  para  $r_b/R = 10^3$  e  $r_a/R < 0.4$ .

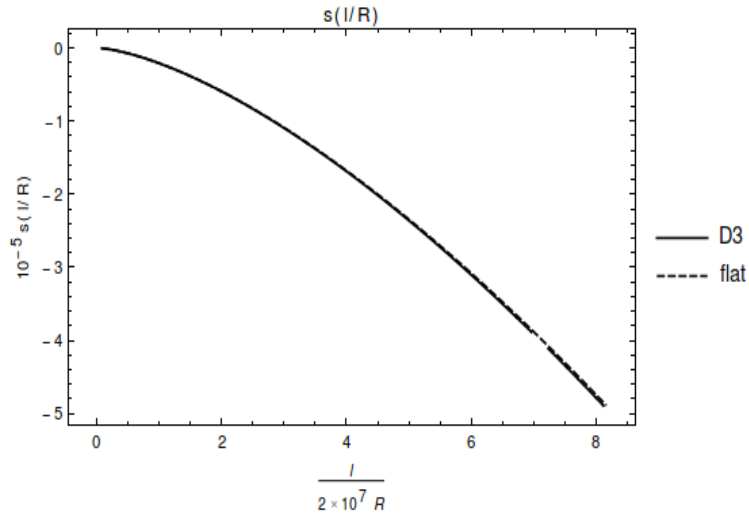


Figura 4.5: Entropia de emaranhamento  $s(\frac{l}{R})$  para  $r_b/R = 10^4$  e  $r_a/R > 10$ .

resultados para a D3-brana são novos e foram apresentados recentemente em [49].

## 4.2 Entropia de emaranhamento quântico para um fundo de M2 brana

Nesta seção, calcularemos e analisaremos a entropia de emaranhamento quântico  $S_A$  correspondente a uma teoria de Yang-Mills dual à teoria M em um fundo gravitacional gerado por  $N$  M2 branas coincidentes.

Começemos lembrando que a solução da M2 brana da supergravidade em  $D = 11$  é

dada por (ver [9]):

$$ds_{\text{M2}}^2 = dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu} = \left(1 + \frac{R_2^6}{r^6}\right)^{-2/3} (-dt^2 + dx_2^2) + \left(1 + \frac{R_2^6}{r^6}\right)^{1/3} (dr^2 + r^2 d\Omega_7^2), \quad (4.23)$$

onde,  $x^\mu = (t, x^a, r, \theta_b)$  são as coordenadas do espaço-tempo, sendo que,  $a = 1, 2$  e  $b = 1, 2, \dots, 7$ ,  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico,  $R_2 = (32\pi N l_{11}^6)^{1/6}$  é o raio de curvatura da M2 brana,  $l_{11}$  é o comprimento de Plack em  $D = 11$ ,  $dx_2^2$  é o elemento diferencial de linha em  $\mathbb{R}^2$  e  $d\Omega_7^2$  é o elemento diferencial de linha sobre a 7-esfera, a qual só depende das coordenadas  $\theta_b$ .

### 4.2.1 Faixa retangular

Analogamente ao que se fez na seção anterior, a fim de calcular a entropia de emaranhamento, devemos primeiro definir um subsistema  $A \in \mathbb{R}^2$ , do qual dependerá o cálculo da entropia  $S_A$ . Logo, este subsistema 2-dimensional ( $d = 2$ ) é escolhido aqui como sendo uma faixa retangular definida por:

$$X = x^1 \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right], \quad x^2 \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]. \quad (4.24)$$

Por outro lado, a fórmula geral para calcular a área de uma superfície de  $d = 2$  dimensões em um espaço curvo é dada pela seguinte expressão:

$$\mathcal{A} = \int d^2\sigma \sqrt{\det(G_{\alpha\beta})}, \quad (4.25)$$

onde,  $G_{\alpha\beta} = \partial_\alpha x^m \partial_\beta x^n g_{mn}$  é a métrica induzida na superfície, sendo que  $x^m = \{x^1, x^2, r\}$ .

Similarmente visto na seção anterior, nesta também assumimos que a faixa é muito grande  $\frac{L}{l} \gg 1$ , de modo que teremos uma invariância por translações no eixo  $x^2$ , e portanto, podemos parametrizar a superfície  $\gamma_A \subset \mathbb{R}^2 \times \hat{r}$  da seguinte forma:

$$x^1 = X(\sigma_1),$$

$$x^2 = \sigma_2,$$

$$r = \sigma_1.$$

A partir dessa parametrização, é evidente que a superfície  $\gamma_A$  está basicamente determinada pelo perfil  $x^1 = X(r)$ .

Utilizando essa parametrização na fórmula (4.25), obtemos a expressão funcional para a área da superfície no fundo gravitacional de M2 brana:

$$\mathcal{A} = L \int dr \sqrt{\frac{X'^2}{f^4(r)} + \frac{1}{f(r)}} \quad (4.26)$$

onde,  $f(r) = \left(1 + \frac{R_2^6}{r^6}\right)^{1/3}$  e  $X' = \frac{dX}{dr}$ . Note que a lagrangiana que corresponde com esta funcional é:

$$\mathcal{L}(X', r) = \sqrt{\frac{X'^2}{f^4(r)} + \frac{1}{f(r)}} \quad (4.27)$$

Utilizando as equações de Euler-Lagrange, podemos obter a função  $X(r)$  que minimiza a área  $\mathcal{A}$ :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'(r)}\right)' = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = 0, \quad (4.28)$$

consequentemente, obtemos a seguinte equação algébrica para  $X'(r)$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'(r)} = \frac{X'(r)}{f^4(r) \sqrt{\frac{[X'(r)]^2}{f^4(r)} + \frac{1}{f(r)}}} = \frac{1}{f^2(r_a)}, \quad (4.29)$$

onde a condição de contorno  $X'(r_a) \rightarrow \infty$  foi utilizada. A partir desta equação, finalmente obtemos que:

$$\frac{dX}{dr} = \pm \sqrt{\frac{f^7(r)}{f^4(r_a) - f^4(r)}}. \quad (4.30)$$

Similarmente visto na seção anterior, nesta utilizamos condições de contorno com a mesma forma, portanto, vamos definir o valor de corte  $r_b$  de modo que:

$$X(r_b) = \pm \frac{l}{2}. \quad (4.31)$$

Além disso, temos  $X(r_a) = 0$ . Portanto, se integramos (4.30) sujeito a estas condições de contorno, podemos obter a largura  $l$  da faixa em termos de  $r_a$  e  $r_b$ :

$$\frac{l}{2} = \int_{r_a}^{r_b} dr \sqrt{\frac{f^7(r)}{f^4(r_a) - f^4(r)}}. \quad (4.32)$$

Note também que  $r_a$  pode ser determinada em termos de  $l$  e  $r_b$ .

Logo ao substituir (4.31) em (4.26), obtemos a expressão para a área mínima da superfície  $\gamma_A$ :

$$\mathcal{A} = L \int_{r_a}^{r_b} dr \sqrt{\frac{f^4(r_a)}{f(r)[f^4(r_a) - f^4(r)]}}. \quad (4.33)$$

Novamente podemos observar que, sendo  $f(r) = \left(1 + \frac{R_2^6}{r^6}\right)^{1/3}$  uma função monótona decrescente com máximo  $f(r_a)$  e mínimo  $f(\infty) \rightarrow 1$ , a expressão dentro da integral tende para um valor constante quando  $r \rightarrow \infty$ . Dessa maneira, a integral em (4.33) diverge quando  $r_b \rightarrow \infty$ . A parte divergente desta integral pode ser definida do seguinte modo:

$$\mathcal{A}_{\text{div}} = L \int_0^{r_b} dr \sqrt{\frac{f^4(r_a)}{f(r)[f^4(r_a) - 1]}}. \quad (4.34)$$

Portanto, a entropia de emaranhamento quântico, que pode ser obtida aplicando a fórmula de Ryu-Takayanagi na área (4.33), deve ser escrita substraindo a parte divergente:

$$S_A = \frac{\mathcal{A}}{4G_N^4} = S_{\text{div}} + \frac{LR_2}{4G_N^4} s\left(\frac{l}{R_2}\right), \quad (4.35)$$

onde,  $S_{\text{div}}$  é a parte divergente da entropia e  $s(\frac{l}{R_2})$  é a entropia finita adimensional que é escrita como uma função de  $l/R_2$ .

Porém, nem sempre é possível obter analiticamente a entropia adimensional  $s$  como uma função de  $l/R_2$ , somente em alguns casos é possível, como nos limites que veremos nas seguintes seções. Em geral, esta função existe de maneira implícita e podemos obtê-la numericamente. Porém, sempre poderemos expressar  $s$  como função do parâmetro  $r_a$ :

$$s(r_a) = \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{R_2} \sqrt{\frac{f^4(r_a)}{f(r)[f^4(r_a) - f^4(r)]}} - \int_0^{r_b} \frac{dr}{R_2} \sqrt{\frac{f^4(r_a)}{f(r)[f^4(r_a) - 1]}}. \quad (4.36)$$

## 4.2.2 Limite perto do horizonte

Neste caso, o limite é definido ao considerar a aproximação  $R_2 \gg r$  em nossos cálculos. Ainda mais, a região do espaço fundo que corresponde com este limite possui geometria

$AdS_4 \times S^7$ . Por outro lado, temos  $f \approx \frac{R_2^2}{r^2}$ , e, portanto, a largura da faixa (4.32) se simplifica:

$$\frac{l}{R_2} = \frac{2R_2^2}{r_a^2} \int_1^{\frac{r_b}{r_a}} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^8 - 1}} = \frac{R_2^2}{r_a^2} c_2 \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{r_a^6}{r_b^6}\right) \right], \quad (4.37)$$

onde,  $c_2 = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}$ . Já que nesta seção também iremos considerar o limite  $r_a \ll r_b$ , as ordens superiores em  $\frac{r_a}{r_b}$  podem ser ignoradas.

Por outro lado, nesse limite a entropia de emaranhamento quântico pode ser obtida a partir de (eq.4.35):

$$S_A = \frac{Lr_a^2}{4R_2G_N^4} \int_1^{r_b/r_a} dx \frac{x^5}{\sqrt{x^8 - 1}} = \frac{Lr_b^2}{4R_2G_N^4} - \frac{Lc_2r_a^2}{8G_N^4R_2}. \quad (4.38)$$

Note que o primeiro termo dessa expressão é divergente sempre que  $r_b \rightarrow \infty$ . Esse termo também pode ser obtido a partir da equação (4.34).

Se eliminarmos o parâmetro  $r_a$  das equações anteriores, obteremos a seguinte expressão para a entropia  $S_A$  como função da largura  $l$ :

$$S_A = \frac{Lr_b^2}{4G_N^4R_2} - \frac{Lc_2^2R_2^2}{8G_N^4l}. \quad (4.39)$$

Esse resultado concorda com o obtido em [41], a menos de um fator constante na parte divergente dessa entropia. Portanto, a entropia adimensional  $s(\frac{l}{R_2})$  neste limite resulta:

$$s(l/R_2) = -\frac{c_2^2R_2}{2l}. \quad (4.40)$$

### 4.2.3 Limite longe do horizonte

Este limite é definido ao considerar a aproximação  $R_2 \ll r$  em nossos cálculos. Assim, a região do espaço de fundo que corresponde com esta aproximação é descrita por uma geometria quase-chata. Ainda mais, neste limite temos  $f \approx 1 + \frac{R_2^6}{3r^6}$ , e, portanto, a largura da faixa (4.32) é simplificada:

$$\frac{l}{R_2} \approx \frac{\sqrt{3}r_a^4}{R_2^4} \int_1^{\frac{r_b}{r_a}} dx \frac{x^3}{\sqrt{x^6 - 1}} \approx \sqrt{3} \left(\frac{r_a}{R_2}\right)^3 \frac{r_b}{R_2}. \quad (4.41)$$

Por outro lado, neste limite a entropia de emaranhamento quântico pode ser obtida a partir de (4.35):

$$S_A \approx \frac{\sqrt{3}L}{8G_N^4 R_2^3} r_a^4 \int_1^{r_b/r_a} dx \frac{x^3}{\sqrt{x^6 - 1}} = \frac{\sqrt{3}L r_a^3 r_b}{48G_N^4 R_2^3} - \frac{\sqrt{3}L r_a^4 c'}{8G_N^4 R_2^3}, \quad (4.42)$$

onde,  $c' = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)}$ . O primeiro termo desta entropia diverge sempre que  $r_b \rightarrow \infty$ . Este termo divergente também pode ser obtido a partir da equação (4.34).

Se eliminarmos o parâmetro  $r_a$  destas equações, obteremos a entropia  $S_A$  em função da largura  $l$ :

$$S_A = \frac{Ll}{48G_N^4} - \frac{Lc'R_2}{8(3)^{1/6}G_N^4} \left(\frac{l}{r_b}\right)^{4/3}. \quad (4.43)$$

O primeiro termo dela continua sendo divergente, já que  $l \sim r_b$  (ver eq.4.41). Portanto, neste limite a entropia de emaranhamento adimensional  $s(\frac{l}{R_2})$  resulta:

$$s(l/R_2) = -\frac{c'}{2(3)^{1/6}} \left(\frac{l}{r_b}\right)^{4/3}. \quad (4.44)$$

Embora esta entropia contenha o valor de corte  $r_b$ , ela é finita desde que, como já vimos,  $l \sim r_b$ , e, portanto, o cociente desta entropia permanece finito. Este resultado é novo e foi apresentado recentemente [49].

#### 4.2.4 Análise numérica da entropia de emaranhamento quântico no fundo de M2 brana

Nesta seção, apresentaremos um estudo numérico do comportamento da entropia de emaranhamento quântico no fundo de M2 brana. Pois, como já mencionado, em geral, só podemos obter a função  $s(\frac{l}{R_2})$  de maneira numérica.

Em primeiro lugar, na figura (4.6), apresentamos um gráfico da largura em função do parâmetro  $r_a$  (posição mínima da superfície  $\gamma_A$ ). De fato, no gráfico fizemos uma comparação entre as larguras correspondentes ao caso do limite de  $AdS_4$  (eq.4.37) e ao caso geral de M2 brana (eq.4.32). Este gráfico foi feito utilizando o valor de corte de  $r_b/R_2 = 10^2$  e considerando a região  $r_a/R_2 < 2$ . Por outro lado, as larguras coincidem na



região  $r_a/R < 0.32$ , sendo justamente  $r_a/R_2 = 0.32$  o ponto onde a largura  $l/R_2$  para o caso geral da M2 brana, atinge seu mínimo valor  $l/R_2 = 8.32$ .

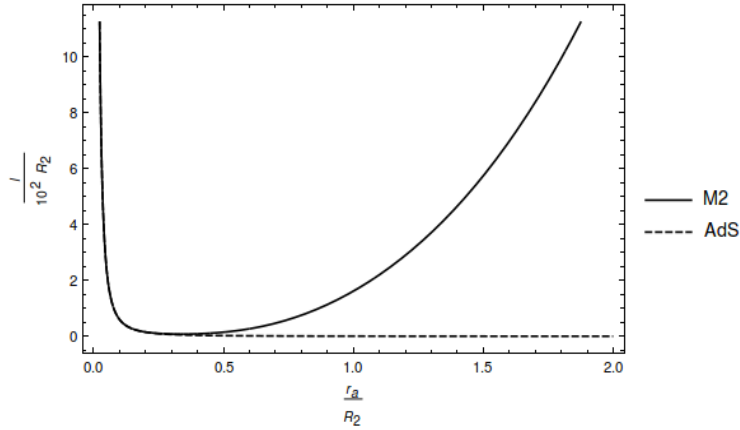


Figura 4.6: Largura  $l/R_2$  em função de  $r_a/R_2$ , sendo o valor de corte  $r_b/R_2 = 10^2$ .

Em seguida, apresentamos na figura (4.7), uma comparação entre as larguras correspondentes ao caso geral da M2 brana (eq.4.32) e ao caso do espaço quase-chato (eq.4.41). Este gráfico foi feito considerando o valor de corte de  $r_b/R_2 = 10^3$  e a região  $r_a/R_2 > 5$ . Como podemos verificar na figura, a coincidência de ambas larguras é muito boa naquela região.

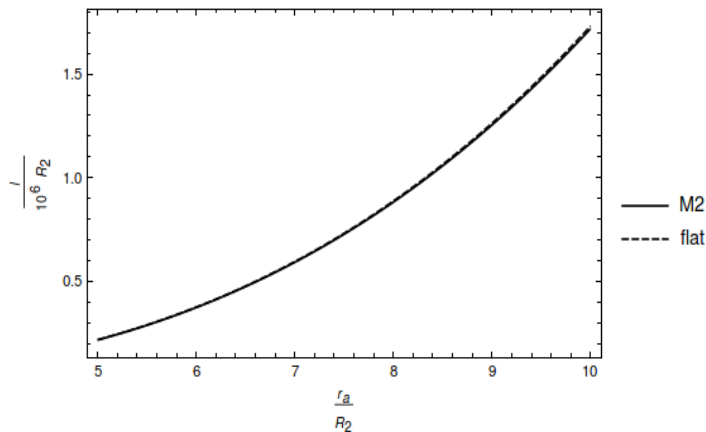


Figura 4.7: Largura  $l/R_2$  em função de  $r_a/R_2$ , sendo o valor de corte  $r_b/R_2 = 10^3$ .

Na continuação na figura (4.8), mostramos um gráfico onde comparamos as entropias de emaranhamento adimensionais  $s(\frac{l}{R_2})$  correspondentes ao caso limite da geometria  $AdS_4$

(eq.4.40) e ao caso geral de M2 brana (eq.4.35). Neste gráfico foram considerados o valor de corte de  $r_b/R_2 = 10^2$  e a região  $r_a/R_2 < 1$ . Como podemos observar, existem duas ramas para o caso de M2 brana, sendo que a rama superior corresponde à região  $r_a/R_2 < 0.32$ , e a inferior à região  $r_a/R_2 > 0.32$ . Ainda, podemos ver que essas entropias coincidem na região da rama superior.

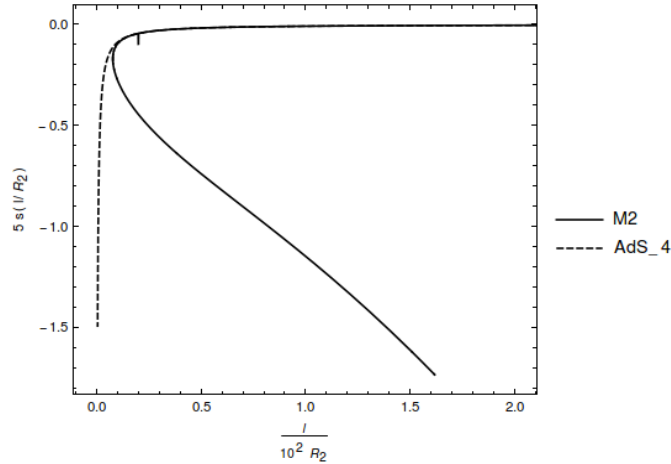


Figura 4.8: Entropia  $s(\frac{l}{R_2})$ , sendo o valor de corte  $r_b/R_2 = 10^2$ .

Por outro lado, na figura (4.9), mostramos uma comparação entre as entropias adimensionais  $s(\frac{l}{R_2})$  correspondentes ao caso limite de geometria quase-chata ( eq.4.44) e ao caso geral de M2 brana (eq.4.35). Além disso, neste caso utilizamos o valor de corte de  $r_b/R_2 = 10^3$  e consideramos a região  $r_a/R_2 > 5$ . Como podemos observar, ambas entropias coincidem muito bem nessa região. Estes resultados para a M2-brana são novos e foram apresentados recentemente em [49].

### 4.3 Entropia de emaranhamento quântico para um fundo de M5 brana

Nesta seção, calcularemos e analisaremos a entropia de emaranhamento quântico correspondente a uma teoria de Yang-Mills em  $D = 6$ , dual à teoria M em um fundo de supergravidade gerado por  $N$  M5 branas coincidentes. Lembremos que a solução da su-

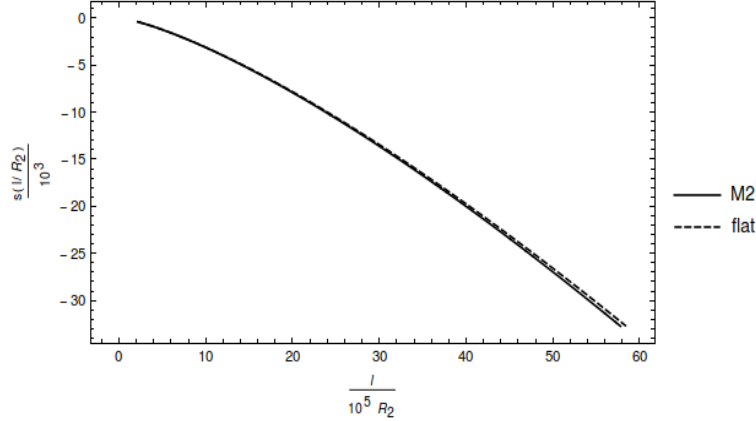


Figura 4.9: Entropia adimensional  $s(l/R_2)$  para o valor de corte  $r_b/R_2 = 10^3$ .

pergravidade em  $D = 11$  de M5 brana é dada por (ver [9]):

$$ds_{M5}^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \left(1 + \frac{R_5^3}{r^3}\right)^{-1/3} dx_6^2 + \left(1 + \frac{R_5^3}{r^3}\right)^{2/3} (dr^2 + r^2 d\Omega_4^2), \quad (4.45)$$

onde,  $x^\mu = (t, x^a, r, \theta_b)$ , sendo que,  $a = 1, 2, \dots, 5$  e  $b = 1, 2, \dots, 4$ , são as coordenadas do espaço-tempo,  $g_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço-tempo,  $R_5 = (\pi N l_{11}^3)^{1/3}$  é o raio de curvatura da M5 brana,  $l_{11}$  é o comprimento de Plack,  $dx_5^2$  é o elemento de linha euclidiano em  $\mathbb{R}^3$  e  $d\Omega_4^2$  é o elemento de linha sobre a 4-esfera, a qual só depende das coordenadas  $\theta_b$ .

### 4.3.1 Faixa retangular

Analogamente ao que já vimos nas seções passadas, começaremos nosso estudo da entropia no fundo de supergravidade definindo o subsistema  $A \in \mathbb{R}^5$  ( $d = 5$ ) como a seguinte faixa retangular:

$$X \equiv x^1 = \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right], \quad x^{2,3,4,5} = \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right] \quad (4.46)$$

Por outro lado, a fórmula geral para calcular a área de uma superfície em um espaço curvo de 6 dimensões é dada por:

$$\mathcal{A} = \int d^5\sigma \sqrt{\det(G_{\alpha\beta})}, \quad (4.47)$$

onde,  $G_{\alpha\beta} = \partial_\alpha x^m \partial_\beta x^n g_{mn}$  é a métrica induzida sobre a superfície, sendo  $x^m = \{x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, r\}$  as coordenadas dessa superfície.

A superfície  $\gamma_A$  está contida no espaço composto pela M5 brana e uma dimensão extra (coordenada radial na métrica 4.45), ou seja,  $\gamma_A \in \mathbb{R}^5 \times \{\hat{r}\}$ . Ainda, nesta seção, também assumimos que a faixa é muito grande,  $\frac{L}{l} \gg 1$ , e, portanto, podemos utilizar a seguinte parametrização para a superfície:

$$\begin{aligned} x^1 &= X(\sigma_1), \\ x^i &= \sigma_i, \quad \text{sendo que } i = 2, \dots, 5, \\ r &= \sigma_1. \end{aligned}$$

Portanto, como podemos observar, basicamente a parametrização de  $\gamma_A$  está determinada pelo perfil  $x^1 = X(r)$  da superfície.

Conseqüentemente, utilizando esta parametrização na fórmula (4.47), podemos obter a área da superfície  $\gamma_A$ , a qual é uma funcional que depende do perfil  $X(r)$  desta superfície:

$$\mathcal{A} = L^4 \int dr \sqrt{\frac{X'^2}{f^5} + \frac{1}{f^2}}, \quad (4.48)$$

onde,  $f = \left(1 + \frac{R_5^3}{r^3}\right)^{1/3}$  e  $X' \equiv \frac{dX}{dr}$ . Por outro lado, a lagrangiana correspondente nesta funcional é:

$$\mathcal{L}(X', r) = \sqrt{\frac{X'^2}{f^5(r)} + \frac{1}{f^2(r)}}. \quad (4.49)$$

Portanto, podemos usar as equações de Euler-Lagrange nesta lagrangiana para encontrar a função  $X(r)$  que minimiza a área:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'(r)}\right)' = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = 0, \quad (4.50)$$

daqui obtemos a seguinte equação algébrica para  $X'(r)$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'(r)} = \frac{X'(r)}{f^5(r) \sqrt{\frac{X'^2}{f^5(r)} + \frac{1}{f^2(r)}}} = \frac{1}{f^{5/2}(r_a)}, \quad (4.51)$$

onde, a condição de contorno  $X'(r_a) \rightarrow \infty$  foi utilizada, sendo que,  $r_a$  é a posição mínima da superfície  $\gamma_A$  com respeito a origem da coordenada radial  $r$ , além disso,  $X(r_a) = 0$ .

Isolando  $X'(r)$  nesta equação, finalmente obtemos:

$$\frac{dX}{dr} = \pm \frac{f^4(r)}{\sqrt{f^5(r_a) - f^5(r)}}. \quad (4.52)$$

Por outro lado, novamente definimos o valor de corte  $r_b$ , de modo que este satisfaça a seguinte condição de contorno:

$$X(r_b) = \pm \frac{l}{2}. \quad (4.53)$$

Então, integrando a equação (4.52), sujeita as condições de contorno, podemos obter a largura da faixa  $l$  em termos de  $r_a$  e  $r_b$ .

$$\frac{l}{2} = \int_{r_a}^{r_b} dr \frac{f^4(r)}{\sqrt{f^5(r_a) - f^5(r)}}. \quad (4.54)$$

Note que  $r_a$  poderia ser resolvida em termos de  $l$  e  $r_b$ .

Por outro lado, logo ao substituir (4.52) em (4.48), obtemos a área mínima:

$$\mathcal{A} = L^4 \int_{r_a}^{r_b} dr \frac{1}{f(r)} \sqrt{\frac{f^5(r_a)}{f^5(r_a) - f^5(r)}}. \quad (4.55)$$

Já que  $f(r)$  é monótona decrescente, com valor máximo  $f(r_a)$  e mínimo  $f(\infty) = 1$ , temos a expressão dentro da integral em (4.55), tendendo a um valor constante sempre que  $r \rightarrow \infty$ . Portanto, a integral diverge quando  $r_b \rightarrow \infty$ . Analogamente como feito nas seções anteriores, aqui também subtraímos a parte divergente da área mínima:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{div}} + \mathcal{A}_{\text{fin}}, \quad (4.56)$$

onde, a parte divergente é definida em termos do valor de corte:

$$\mathcal{A}_{\text{div}} = L^4 \int_0^{r_b} dr \frac{1}{f(r)} \sqrt{\frac{f^5(r_a)}{f^5(r_a) - 1}}. \quad (4.57)$$

Logo, a partir de (4.56) e da fórmula de Ryu-Takayanagi, podemos escrever finalmente a expressão da entropia de emaranhamento quântico:

$$S_A = \frac{\mathcal{A}}{4G_N^7} = S_{\text{div}} + \frac{L^4 R_5}{4G_N^7} s \left( \frac{l}{R_5} \right), \quad (4.58)$$

onde,  $S_{\text{div}}$  é a parte divergente da entropia e  $s(\frac{l}{R_5})$  é a função da entropia de emaranhamento quântico finita e adimensional.

Porém, encontrar de forma analítica a entropia adimensional  $s$  como função de  $\frac{l}{R_5}$  nem sempre é possível, já que esta é uma função implícita e em geral, só poderá ser descrita em forma numérica. Geralmente, só podemos expressar essa entropia adimensional, em termos do parâmetro  $r_a$ :

$$s(r_a) = \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{R_5} \frac{1}{f(r)} \sqrt{\frac{f^5(r_a)}{f^5(r_a) - f^5(r)}} - \int_0^{r_b} \frac{dr}{R_5} \frac{1}{f(r)} \sqrt{\frac{f^5(r_a)}{f^5(r_a) - 1}}. \quad (4.59)$$

Nas seguintes seções apresentaremos a obtenção analítica das funções de entropia adimensional  $s(\frac{l}{R_5})$  para os limites perto e longe do horizonte.

### 4.3.2 Limite perto do horizonte

O limite é definido ao considerar a aproximação  $R_5 \gg r$  em nossos cálculos. A região do espaço de fundo que corresponde com este limite, possui uma geometria  $AdS_7 \times S^4$ . Neste limite, temos  $f \approx \frac{R_5}{r}$ , e, portanto, a largura da faixa (4.54) é dada por:

$$\frac{l}{R_5} = \frac{2R_5^{1/2}}{r_a^{1/2}} \int_1^{\frac{r_b}{r_a}} dx \frac{1}{\sqrt{x^3(x^5 - 1)}} = \frac{4R_5^{1/2} c_5}{r_a^{1/2}} \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{r_a^3}{r_b^3}\right) \right], \quad (4.60)$$

onde,  $c_5 = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3/5)}{\Gamma(1/10)}$ . Similarmente ao considerado nas seções anteriores, também utilizamos a aproximação  $r_a \ll r_b$ , e então, podemos ignorar as ordens superiores em  $\frac{r_a}{r_b}$ .

Por outro lado, a entropia de emaranhamento (4.58) neste limite é dada por:

$$S_A = \frac{L^4 r_a^2}{4G_N^7 R_5} \int_1^{\frac{r_b}{r_a}} dx \sqrt{\frac{x^7}{x^5 - 1}} = \frac{L^4 r_b^2}{20G_N^7 R_5} - \frac{c_5 L^4 r_a^2}{8G_N^7 R_5}. \quad (4.61)$$

Note que o primeiro termo desta expressão corresponde com a parte divergente da entropia. Este termo também pode ser obtido a partir da fórmula (4.57).

Se eliminarmos o parâmetro  $r_a$  das equações anteriores, obteremos a entropia  $S_A$  como função de  $\frac{l}{R_5}$ :

$$S_A = \frac{L^4 r_b^2}{20G_N^7 R_5} - \frac{32L^4 c_5^5 R_5^5}{G_N^7 l^4}. \quad (4.62)$$

Este resultado concorda com o obtido em [41], a menos de um fator constante na parte divergente. Portanto, a entropia adimensional é dada por:

$$s(l/R_5) = -\frac{128c_5^5 R_5^4}{l^4}. \quad (4.63)$$

### 4.3.3 Limite longe do horizonte

Este limite é definido ao considerar a aproximação  $R_5 \ll r$  em nossos cálculos. A região do espaço de fundo correspondente a esta aproximação possui uma geometria quase-chata. Neste limite, temos  $f \approx 1 + \frac{R_5^3}{3r^3}$ , e, portanto, a largura da faixa (4.54) resulta:

$$\frac{l}{R_5} \approx \frac{2\sqrt{3/5}r_a^{5/2}}{R_5^{5/2}} \int_1^{\frac{r_b}{r_a}} dx \sqrt{\frac{x^3}{x^3-1}} \approx 2\sqrt{3/5} \left(\frac{r_a}{R_5}\right)^{3/2} \frac{r_b}{R_5}. \quad (4.64)$$

Por outro lado, a entropia de emaranhamento (4.58) neste limite fica:

$$S_A \approx \frac{\sqrt{3/5}L^4 r_a^{5/2}}{4G_N^7 R_5^{3/2}} \int_1^{\frac{r_b}{r_a}} dx \sqrt{\frac{x^3}{x^3-1}} = \frac{\sqrt{3/5}L^4 r_a^{3/2} r_b}{12G_N^7 R_5^{3/2}} - \frac{\sqrt{3/5}c_5^* L^4 r_a^{5/2}}{4G_N^7 R_5^{3/2}}, \quad (4.65)$$

onde,  $c_5^* = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/6)}$ . Note que o primeiro termo desta expressão corresponde com a parte divergente da entropia. Este termo também pode ser obtido a partir da fórmula (4.57).

Se eliminarmos o parâmetro  $r_a$  destas equações, obteremos a entropia de emaranhamento  $S_A$  como função de  $\frac{l}{R_5}$ :

$$S_A = \frac{L^4 l}{24G_N^7} - \frac{c_5^* L^4 R_5}{2^{11/3}(3/5)^{1/3}G_N^7} \left(\frac{l}{r_b}\right)^{5/3}. \quad (4.66)$$

O primeiro termo desta equação continua sendo o termo divergente, já que, segundo a expressão (4.64),  $l \sim r_b$ . Similarmente, o segundo termo desta equação, embora contenha o valor de corte  $r_b$ , é finito desde que o cociente  $\frac{l}{r_b}$  permanece finito neste limite. Portanto, a entropia adimensional neste caso resulta:

$$s(l/R_5) = -\frac{c_5^*}{2^{5/3}(3/5)^{1/3}} \left(\frac{l}{r_b}\right)^{5/3}. \quad (4.67)$$

Este resultado é novo e foi apresentado recentemente em [49].

### 4.3.4 Análise numérica da entropia de emaranhamento quântico no fundo de M5 brana

Nesta seção, apresentamos uma análise numérica do comportamento da entropia de emaranhamento quântico no fundo de M5 brana. Lembre que como já mencionado anteriormente, a função  $s(\frac{l}{R_5})$ , em geral, só pode ser obtida de maneira numérica.

Em primeiro lugar, apresentaremos um gráfico ( figura 4.10) onde comparamos as larguras da faixa ( $\frac{l}{R_5}$ ) para o fundo de M5 brana (4.54) e o fundo de  $AdS_7 \times S^4$  (4.60). Neste gráfico, podemos ver que o mínimo da largura ( $l/R_5 = 6.08$ ) para o caso geral de M5 brana é atingido no ponto  $r_a/R_5 = 0.048$ . Estes gráficos foram feitos na região  $r_a/R_5 < 0.2$ , usando o valor de corte  $r_b/R_5 = 10^3$ .

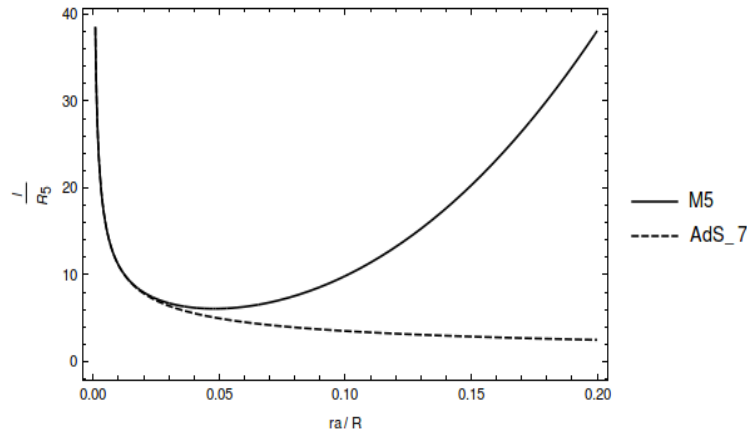


Figura 4.10: Largura  $l/R_5$  em função de  $r_a/R_5$  na região  $r_a/R_5 < 0.2$ , sendo o valor de corte  $r_b/R_5 = 10^3$ .

A seguir, apresentamos outro gráfico ( figura 4.11) onde há uma comparação entre as entropias de emaranhamento adimensionais  $s(\frac{l}{R_5})$  para o caso geral do fundo de M5 brana (4.58) e o fundo de  $AdS_7$  (4.63). Como podemos observar a partir da figura, a entropia adimensional  $s(\frac{l}{R_5})$  para o fundo de M5 brana possui duas ramas, sendo que, a superior corresponde à região  $r_a/R_5 < 0.048$ , e a inferior, à região  $r_a/R_5 > 0.048$ . Note que a rama superior coincide com a entropia adimensional para o fundo de  $AdS_7$ .

Por outro lado, na próxima figura (4.12), apresentamos um gráfico onde comparamos



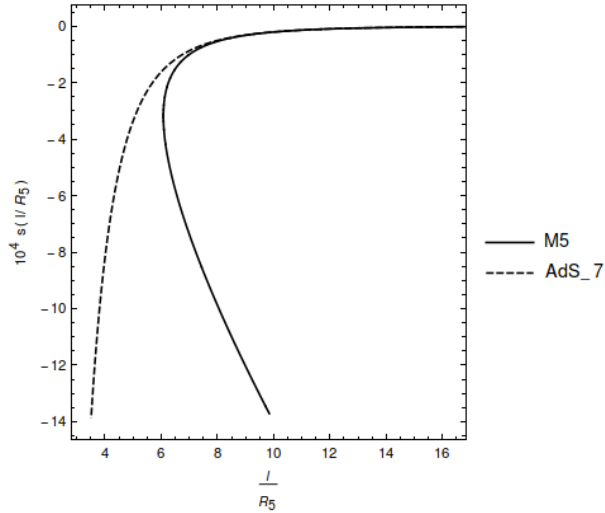


Figura 4.11: Entropia de emaranhamento adimensional  $s(l/R_5)$  para o valor de corte de  $r_b/R_5 = 10^3$ .

a largura da faixa ( $\frac{l}{R_5}$ ) para o fundo de M5 brana (4.54) e para o fundo de geometria quase-chata (4.64). Para este gráfico foram considerados a região  $r_a/R_5 > 4$  e o valor de corte  $r_b/R_5 = 5 \times 10^3$ . Como podemos observar na figura, essas larguras coincidem muito bem naquela região.

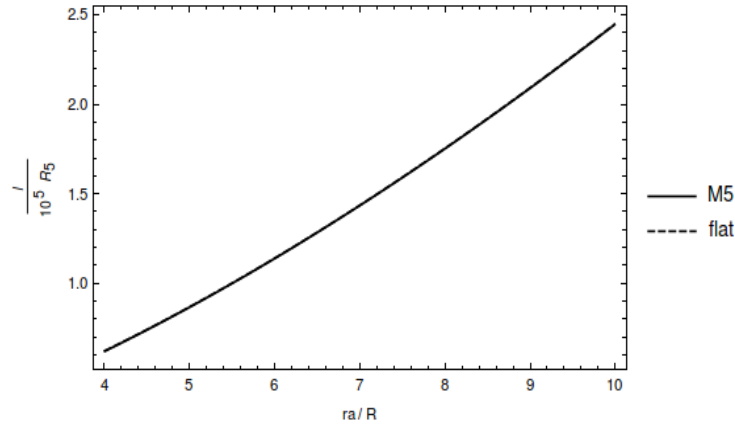


Figura 4.12: Largura  $l/R_5$  como função de  $r_a/R_5$  para a região  $r_a/R_5 > 4$  e valor de corte  $r_b/R_5 = 5 \times 10^3$ .

A seguir, apresentamos um gráfico (figura 4.13), onde mostramos uma comparação entre a entropia de emaranhamento adimensional  $s(\frac{l}{R_5})$  para o fundo de M5 brana (4.58) e para o fundo de geometria quase-chata (4.67). Para este gráfico foram considerados

a região  $r_a/R_5 > 4$  e o valor de corte  $r_b/R_5 = 5 \times 10^3$ , observando, como as entropias coincidem muito bem naquela região. Estes resultados para a M5-brana são novos e foram

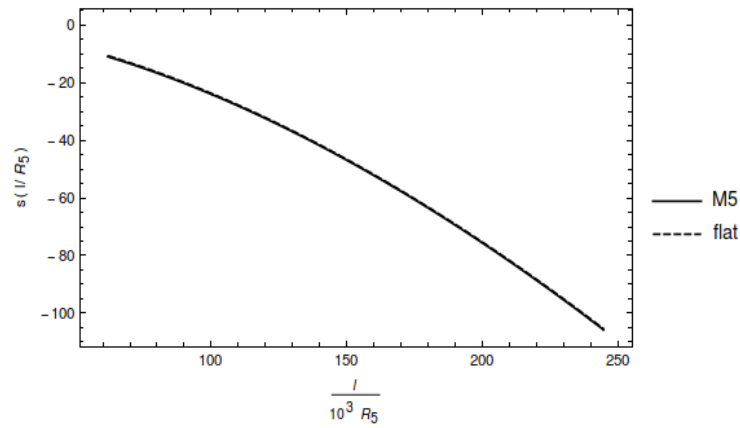


Figura 4.13: Entropia de emaranhamento adimensional  $s(l/R_5)$  para região  $r_a/R_5 > 4$  e valor de corte  $r_b/R_5 = 5 \times 10^3$ .

apresentados recentemente em [49].

## Capítulo 5

# Considerações Finais

No capítulo 2, estudamos os laços de Wilson correspondentes aos espaços de fundo de M2 e M5 branas, graças à formulação da membrana na teoria M. Principalmente, obtemos potenciais quark-antiquark nesses mundos brana. Pelo menos, quando os espaços de fundo de M2 e M5 são reduzidos aos espaços perto do horizonte  $AdS_4 \times S^7$  e  $AdS_7 \times S^4$ , respectivamente, sabemos que essas teorias correspondem às teorias conformes supersimétricas  $SU(N)$  com  $N$  grande em espaços chatos de Minkowski  $M^3$  e  $M^6$ , respectivamente [63].

No caso do limite perto do horizonte que possui geometria anti de Sitter, obtivemos potenciais tipo Coulomb não-confinantes, os quais são esperados nas teorias conformes duais. O outro limite analisado foi a aproximação longe do horizonte, a qual possui uma geometria quase-chata, obtendo potenciais confinantes para os casos de M2 e M5 branas. É interessante notar que esta situação, pelo menos para os casos de M2 e M5 branas, se parece com o caso do comportamento da QCD, sendo que, nas baixas energias temos confinamento e nas altas, liberdade assintótica. Estes resultados sugerem uma transição geométrica de confinamento/desconfinamento que foi estudado no capítulo 3. Nesse capítulo, estudamos as transições geométricas de confinamento/desconfinamento a temperatura zero para os fundos de D3, M2 e M5 branas. Em geral, nesses casos, estas transições ocorrem devido a não-monotonicidade da distância da separação quark-antiquark  $L$  como função da posição mínima da corda  $r_0$ .  $L$  é decrescente na região perto do

horizonte (região com potencial não-confinante), atingindo um mínimo valor para algum valor de  $r_0$ , é aqui onde a transição nos casos da M2 e M5 branas ocorre, já que  $L$  vira crescente assim que  $r_0$  aumenta de valor (região com potencial confinante). No caso da D3 brana, concluímos que não existe uma transição geométrica a temperatura zero de confinamento/desconfinamento.

Nas referências [64, 65], os laços de Wilson em  $\mathcal{N} = 4$  SYM foram relacionados com as D3 branas em  $AdS_5 \times S^5$ . Baseado nesses resultados, podemos esperar que relações análogas possam ser estabelecidas entre os laços de Wilson nas teorias de calibre e as M2 e M5 branas em  $AdS_4$  e  $AdS_7$ .

Recentemente, uma proposta para calcular as correções da forma  $1/N$  aos laços de Wilson foi dada em [66, 67, 68]. Esperamos que dito enfoque possa ser também aplicado ao caso de laços de Wilson em M2 e M5 branas.

No capítulo 4, temos investigado alguns aspectos da entropia de emaranhamento quântico para as teorias de calibre com  $N$  grande utilizando a holografia, em especial, utilizamos a fórmula de Ryu-Takayanagi para calcular a entropia de emaranhamento quântico para espaços de fundo de D3, M2 e M5 branas. Isto foi feito de forma analítica para as geometrias limites de  $AdS$  e espaço quase-chato. Para o caso geral, foram apresentados gráficos numericamente obtidos, os quais foram comparados com os resultados obtidos analiticamente. Os comportamentos para estes diferentes fundos gravitacionais são parecidos, sendo que, em geral a função da entropia finita adimensional  $s(l/R)$  é sempre negativa, sendo crescente perto do horizonte e decrescente longe do horizonte, havendo um ponto de transição entre estes comportamentos na região  $r_a < R$ .

Do outro lado, notamos que a eleição do corte UV tem um papel importante no comportamento da função de entropia de emaranhamento finita.

# Apêndice A

## Potenciais de interação quark-antiquark para D3-brana

Nesta parte revisamos os resultados obtidos na referência [20] acerca dos potenciais de interação entre um par quark-antiquark no espaço-tempo de D3-brana.

Começamos considerando a solução solitônica extrema sem dílaton da supergravidade em  $D=10$  (ver [11, 7]):

$$ds^2 = dX^N dX^M g_{NM} = \left(1 + \frac{R^4}{r^4}\right)^{-1/2} (-dt^2 + dx_3^2) + \left(1 + \frac{R^4}{r^4}\right)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (\text{A.1})$$

onde,  $N, M = 0, \dots, 9$  são os índices das coordenadas  $X^N$  do espaço-tempo com métrica  $g_{NM}$ . O raio de curvatura é definido por  $R = (4\pi g_s N_s)^{1/4} l_s$ , sendo que  $N_s$  é o número de branas coincidentes,  $g_s$  é a constante de acoplamento das cordas e  $l_s$  é a escala de comprimento das cordas.

Para calcular os potenciais de interação entre o par quark-antiquark usando o método MRY vamos partir da ação clássica de Nambu-Goto [60] para a corda em  $D = 10$ :

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{-\det(g_{NM} \partial_\alpha X^N \partial_\beta X^M)}, \quad (\text{A.2})$$

onde,  $\alpha' = l_s^2$  e  $X^N(\sigma, \tau)$  são as coordenadas da folha do mundo da corda. Neste estudo é considerado que o par quark-antiquark está contido na D3-brana, sendo que o quark (ou antiquark) está colado a uma ponta da corda aberta que se move em  $D = 10$ . Por simplicidade, trabalhamos em uma configuração de corda estática, a qual é representada na fig.A.1.

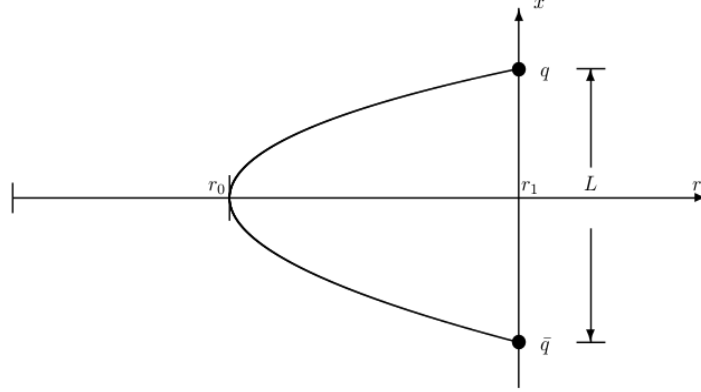


Figura A.1: Posição do quark  $q$  e do anti-quark  $\bar{q}$  na D3-brana (representada aqui pelo eixo  $x$ ) junto com a corda estática representada pela curva que conecta  $q$  e  $\bar{q}$  através de  $r_0$ .

Nesta configuração estática temos:  $X^0 = \tau$  e  $X^1 \equiv x = \sigma$ . Também supomos que o perfil da corda é determinado por  $r = r(x)$ . Por simplicidade, faremos que o resto das coordenadas estejam fixas.

Agora, procedemos calcular a ação  $S$  (eq.A.2) no fundo de supergravidade (eq.A.1) e na configuração estática. A métrica induzida  $G_{\alpha\beta} \equiv g_{NM}\partial_\alpha X^N\partial_\beta X^M$  nestas condições resulta em:

$$G_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\left(1 + \frac{R^4}{r^4}\right)^{-1/2} & 0 \\ 0 & \left(1 + \frac{R^4}{r^4}\right)^{-1/2} + (r')^2 \left(1 + \frac{R^4}{r^4}\right)^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

onde,  $r' \equiv \frac{dr}{dx}$ . Assim obtemos a ação da corda:

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{\det(-G_{\alpha\beta})} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(1 + \frac{R^4}{r^4}\right)^{-1} + (r')^2}.$$

Nesta configuração estática definimos  $\int d\tau = T$ , então temos:

$$S = \frac{T}{\alpha'} \int dx \sqrt{f^2(r) + (r')^2}, \quad (\text{A.4})$$

onde,  $f^2(r) = \frac{r^4}{r^4 + R^4}$ . A partir desta ação  $S$ , obtemos a lagrangiana:

$$\mathcal{L}(r, r') = \sqrt{f^2(r) + (r')^2}. \quad (\text{A.5})$$

Seguidamente, obtemos a hamiltoniana, a qual é uma constante do movimento:

$$\mathcal{H}(r, r') = \frac{-f^2(r)}{\sqrt{f^2(r) + (r')^2}} = \mathcal{H}(r_0, 0) = -f(r_0), \quad (\text{A.6})$$

onde foram utilizadas as condições de contorno  $r(0) = r_0$  e  $r'(0) = 0$ . A partir desta última relação, podemos obter  $r'(x)$ :

$$\frac{dr}{dx} = \pm \frac{f(r)}{f(r_0)} \sqrt{f^2(r) - f^2(r_0)}. \quad (\text{A.7})$$

Como resultado de integrar esta equação, obtemos a distância da separação  $L$  entre o par quark-antiquark( ver [16, 20]):

$$L = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} dx = 2 \int_{r_0}^{r_1} dr \frac{f(r_0)}{f(r) \sqrt{f^2(r) - f^2(r_0)}}, \quad (\text{A.8})$$

onde  $r_1$  é a posição da D3-brana onde os quarks estão contidos. Este parâmetro também representa o corte ultravioleta na escala de energia. Se substituirmos o valor da função  $f(r) = \frac{r^2}{\sqrt{r^4 + R^4}}$  na expressão anterior, obtemos:

$$L = \frac{2r_0^3}{R^2} \int_1^{\frac{r_1}{r_0}} \frac{u^2 du}{\sqrt{u^4 - 1}} + \frac{2R^2}{r_0} \int_1^{\frac{r_1}{r_0}} \frac{du}{u^2 \sqrt{u^4 - 1}}. \quad (\text{A.9})$$

Agora, queremos calcular a energia de interação quark-antiquark usando a proposta MRY. Para isso, partimos da equação para a ação (A.4):

$$E = \frac{S}{T} = \frac{2}{l_s^2} \int_0^{\frac{L}{2}} dx \sqrt{f^2(r) + (r')^2} = \frac{2}{l_s^2} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r'} \sqrt{f^2(r) + (r')^2}.$$

Agora, substituiremos  $r'$  ( eq.A.7) na expressão anterior, com o qual obtemos a energia de interação seguinte:

$$E = \frac{2}{l_s^2} \int_{r_0}^{r_1} dr \frac{f(r)}{\sqrt{f^2(r) - f^2(r_0)}}. \quad (\text{A.10})$$

Substituindo a função  $f(r) = \frac{r^2}{\sqrt{r^4 + R^4}}$  na expressão anterior, obtemos a seguinte integral para a energia:

$$E = \frac{\sqrt{r_0^4 + R^4}}{\pi l_s^2 R^2} \int_{r_0}^{r_1} dr \frac{r^2}{\sqrt{r^4 - r_0^4}}. \quad (\text{A.11})$$

Como podemos observar, quando  $\frac{r_1}{r_0} \rightarrow \infty$ , esta integral diverge. Devemos retirar aquela parte divergente da energia, para isso, definimos a massa dos quarks muito pesados:

$$2m_q = \frac{\sqrt{r_0^4 + R^4}}{\pi l_s^2 R^2} \int_0^{r_1} dr = \frac{\sqrt{r_0^4 + R^4} r_1}{\pi l_s^2 R^2}. \quad (\text{A.12})$$

Esta massa será subtraída da energia  $E$  para obter uma quantidade finita para o potencial de interação  $V$ :

$$V = \frac{r_0 \sqrt{r_0^4 + R^4}}{\pi l_s^2 R^2} \int_1^{\frac{r_1}{r_0}} du \frac{u^2}{\sqrt{u^4 - 1}} - \frac{\sqrt{r_0^4 + R^4} r_1}{\pi l_s^2 R^2}. \quad (\text{A.13})$$



## Referências Bibliográficas

- [1] Jeff Greensite, “An Introduction to the Confinement Problem,” Lecture Notes in Physics (LNP, volume **821**), Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011. 2
- [2] V. Gribov, “Quantization of Nonabelian Gauge Theories,” Nucl. Phys. B **139**, 1-19 (1978). 2
- [3] D. Zwanziger, “Vanishing of zero-momentum lattice gluon propagator and color confinement,” Nucl. Phys. B **364**, 127-161 (1991). 2
- [4] D. Zwanziger, “Renormalization in the Coulomb gauge and order parameter for confinement in QCD,” Nucl. Phys. B **518**, 237-272 (1998). 2
- [5] E. Witten, “Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories,” Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 505 (1998) [hep-th/9803131]. 2
- [6] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,” Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999) [Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998)] [hep-th/9711200]. 2, 11
- [7] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from noncritical string theory,” Phys. Lett. B **428**, 105 (1998) [hep-th/9802109]. 3, 7, 79
- [8] E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998) [hep-th/9802150]. 3, 7

- [9] J. L. Petersen, “Introduction to the Maldacena conjecture on AdS / CFT,” *Int. J. Mod. Phys. A* **14**, 3597 (1999) [hep-th/9902131]. 3, 20, 26, 62, 69
- [10] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys. Rept.* **323**, 183 (2000) [hep-th/9905111]. 3, 20, 26
- [11] G. T. Horowitz and A. Strominger, “Black strings and P-branes,” *Nucl. Phys. B* **360** (1991) 197. 3, 79
- [12] K. G. Wilson, “Confinement of Quarks,” *Phys. Rev. D* **10**, 2445 (1974). 8
- [13] Y. Makeenko, “A Brief Introduction to Wilson Loops and Large N,” *Phys. Atom. Nucl.* **73**, 878 (2010) [arXiv:0906.4487 [hep-th]]. 8
- [14] J.M.Maldacena, “Wilson loops in Large-N field theories,” *Phys. Rev. Lett.* **80**(1998) 4859 [hep-th/9803002]. 9, 10, 16, 18, 25, 30, 34
- [15] S. J. Rey and J. T. Yee, “Macroscopic strings as heavy quarks in large N gauge theory and anti-de Sitter supergravity,” *Eur. Phys. J. C* **22**, 379 (2001) [hep-th/9803001]. 9, 16
- [16] Y. Kinar, E. Schreiber and J. Sonnenschein, “Q anti-Q potential from strings in curved space-time: Classical results,” *Nucl. Phys. B* **566**, 103 (2000) [hep-th/9811192]. 10, 81
- [17] A. Brandhuber, N. Itzhaki, J. Sonnenschein and S. Yankielowicz, “Wilson loops in the large N limit at finite temperature,” *Phys. Lett. B* **434**, 36 (1998) [hep-th/9803137]. 10
- [18] A.Brandhuber, N. Itzhaki, J.Sonnenschein and S. Yankielowicz “Wilson Loops, Confinement and Phase Transitions in Large  $N$  Gauge Theories from Supergravity,” *JHEP* **06** (1998) 001 [hep-th/9803263]. 10

- [19] E. Witten, “Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 505 (1998) [hep-th/9803131]. 10
- [20] H. Boschi-Filho and N. R. F. Braga, “Wilson loops for a quark anti-quark pair in D3-brane space,” *JHEP* **0503**, 051 (2005) [hep-th/0411135].
- [21] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys. Rept.* **323**, 183 (2000) doi:10.1016/S0370-1573(99)00083-6 [hep-th/9905111]. 10, 18, 33, 34, 37, 79, 81
- [22] I. R. Klebanov and G. Torri, “M2-branes and AdS/CFT,” *Int. J. Mod. Phys. A* **25**, 332 (2010) doi:10.1142/S0217751X10048652 [arXiv:0909.1580 [hep-th]]. 11
- [23] E. Witten, “Five-brane effective action in M theory,” *J. Geom. Phys.* **22**, 103 (1997) doi:10.1016/S0393-0440(97)80160-X [hep-th/9610234]. 11
- [24] E. Witten, “AdS / CFT correspondence and topological field theory,” *JHEP* **9812**, 012 (1998) doi:10.1088/1126-6708/1998/12/012 [hep-th/9812012]. 11
- 11
- [25] H. Boschi-Filho, N. R. F. Braga and C. N. Ferreira, “Static strings in Randall-Sundrum scenarios and the quark anti-quark potential,” *Phys. Rev. D* **73**, 106006 (2006) [Erratum-ibid. *D* **74**, 089903 (2006)] [hep-th/0512295]. 11
- [26] O. Andreev and V. I. Zakharov, “Heavy-quark potentials and AdS/QCD,” *Phys. Rev. D* **74**, 025023 (2006) [hep-ph/0604204]. 11
- [27] H. Boschi-Filho, N. R. F. Braga and C. N. Ferreira, “Heavy quark potential at finite temperature from gauge/string duality,” *Phys. Rev. D* **74**, 086001 (2006) [hep-th/0607038]. 11

- [28] S. W. Hawking and D. N. Page, “Thermodynamics of Black Holes in anti-De Sitter Space,” *Commun. Math. Phys.* **87**, 577 (1983). 11
- [29] C. P. Herzog, “A Holographic Prediction of the Deconfinement Temperature,” *Phys. Rev. Lett.* **98**, 091601 (2007) [hep-th/0608151]. 11
- [30] C. A. Ballon Bayona, H. Boschi-Filho, N. R. F. Braga and L. A. Pando Zayas, “On a Holographic Model for Confinement/Deconfinement,” *Phys. Rev. D* **77**, 046002 (2008) [arXiv:0705.1529 [hep-th]]. 11
- [31] O. Andreev and V. I. Zakharov, “The Spatial String Tension, Thermal Phase Transition, and AdS/QCD,” *Phys. Lett. B* **645**, 437 (2007) [hep-ph/0607026]. 11
- [32] O. Andreev and V. I. Zakharov, “On Heavy-Quark Free Energies, Entropies, Polyakov Loop, and AdS/QCD,” *JHEP* **0704**, 100 (2007) [hep-ph/0611304]. 11
- [33] K. Kajantie, T. Tahkokallio and J. T. Yee, “Thermodynamics of AdS/QCD,” *JHEP* **0701**, 019 (2007) [hep-ph/0609254]. 11
- [34] E. Quijada and H. Boschi-Filho, “Wilson loops on M2-branes and M5-branes,” *Phys. Rev. D* **92** (2015) 6, 066010 [arXiv:1503.05982 [hep-th]]. 11, 24, 25, 29, 30, 43
- [35] E. Quijada and H. Boschi-Filho, “A Study of confinement for  $Q\bar{Q}$  potentials on D3, M2 and M5 branes,” *Adv. High Energy Phys.* **2017**, 6124619 (2017) doi:10.1155/2017/6124619 [arXiv:1611.03483 [hep-th]]. 36, 39, 41, 42, 45, 47, 50, 51
- [36] J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy,” *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973). 13
- [37] S. W. Hawking, “Black Holes and Thermodynamics,” *Phys. Rev. D* **13**, 191 (1976).

- [38] A. Strominger and C. Vafa, “Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy,” *Phys. Lett. B* **379**, 99 (1996) [hep-th/9601029]. 13
- [39] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. W. Peet, “Entropy and temperature of black 3-branes,” *Phys. Rev. D* **54**, 3915 (1996) [hep-th/9602135]. 13
- [40] S. Hawking, J. M. Maldacena and A. Strominger, “de Sitter entropy, quantum entanglement and AdS / CFT,” *JHEP* **0105**, 001 (2001) [hep-th/0002145]. 13
- [41] S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT,” *Phys. Rev. Lett.* **96**, 181602 (2006) [hep-th/0603001]. 13, 53, 57, 58, 65, 73
- [42] T. Nishioka, S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic Entanglement Entropy: An Overview,” *J. Phys. A* **42**, 504008 (2009) [arXiv:0905.0932 [hep-th]]. 14
- [43] S. Ryu and T. Takayanagi, “Aspects of Holographic Entanglement Entropy,” *JHEP* **0608**, 045 (2006) [hep-th/0605073]. 14
- [44] V. E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, “A Covariant holographic entanglement entropy proposal,” *JHEP* **0707**, 062 (2007) [arXiv:0705.0016 [hep-th]]. 14
- [45] M. Fujita, T. Nishioka and T. Takayanagi, “Geometric Entropy and Hagedorn/Deconfinement Transition,” *JHEP* **0809**, 016 (2008) [arXiv:0806.3118 [hep-th]]. 14
- [46] J. Maldacena and G. L. Pimentel, “Entanglement entropy in de Sitter space,” *JHEP* **1302**, 038 (2013) [arXiv:1210.7244 [hep-th]]. 14
- [47] Y. Bea, J. D. Edelstein, G. Itsios, K. S. Kooner, C. Nunez, D. Schofield and J. A. Sierra-Garcia, “Compactifications of the Klebanov-Witten CFT and new AdS<sub>3</sub> backgrounds,” *JHEP* **1505**, 062 (2015) [arXiv:1503.07527 [hep-th]]. 14, 31

- [48] C. Cao, S. M. Carroll and S. Michalakis, “Space from Hilbert Space: Recovering Geometry from Bulk Entanglement,” *Phys. Rev. D* **95**, no. 2, 024031 (2017) [arXiv:1606.08444 [hep-th]]. 15
- [49] E. Quijada and H. Boschi-Filho, “Entanglement Entropy for D3-, M2- and M5-brane backgrounds,” arXiv:1711.08505 [hep-th]. 59, 61, 66, 68, 73, 76
- [50] M.J.Duff, P.S.Howe, T.Inami and K.S.stelle, “Superstrings in D=10 from supermembranes in D=11” *Phys. Lett.B* **191**(1987). 16
- [51] D. Farquet and J. Sparks, “Wilson loops on three-manifolds and their M2-brane duals,” *JHEP* **1412**, 173 (2014) [arXiv:1406.2493 [hep-th]]. 18
- [52] S. A. Hartnoll, “Lectures on holographic methods for condensed matter physics,” *Class. Quant. Grav.* **26**, 224002 (2009) [arXiv:0903.3246 [hep-th]]. 18
- [53] C. P. Herzog, “Lectures on Holographic Superfluidity and Superconductivity,” *J. Phys. A* **42**, 343001 (2009) [arXiv:0904.1975 [hep-th]]. 18
- [54] J. McGreevy, “Holographic duality with a view toward many-body physics,” *Adv. High Energy Phys.* **2010**, 723105 (2010) [arXiv:0909.0518 [hep-th]]. 18
- [55] G. T. Horowitz, “Introduction to Holographic Superconductors,” *Lect. Notes Phys.* **828**, 313 (2011) [arXiv:1002.1722 [hep-th]]. 18
- [56] N. Seiberg and E. Witten, “Comments on string dynamics in six-dimensions,” *Nucl. Phys. B* **471**, 121 (1996) [hep-th/9603003]. 18
- [57] E. Witten, “New ‘gauge’ theories in six-dimensions,” *JHEP* **9801**, 001 (1998) [*Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 61 (1998)] [hep-th/9710065]. 18
- [58] E. Bergshoeff, E. Sezgin and P. K. Townsend, “Properties of the Eleven-Dimensional Super Membrane Theory,” *Annals Phys.* **185**, 330 (1988). 19

- [59] S. A. Hartnoll and C. Nunez, “Rotating membranes on  $G(2)$  manifolds, logarithmic anomalous dimensions and  $N=1$  duality,” *JHEP* **0302**, 049 (2003) [hep-th/0210218].  
19
- [60] K. Becker, M. Becker and J. H. Schwarz, “String theory and M-theory: A modern introduction,” Cambridge, UK: Cambridge Univ. Pr. (2007) 739 p 19, 79
- [61] M. J. Duff and K. S. Stelle, “Multimembrane solutions of  $D = 11$  supergravity,” *Phys. Lett. B* **253**, 113 (1991). 20
- [62] C. Nunez, M. Piai and A. Rago, “Wilson Loops in string duals of Walking and Flavored Systems,” *Phys. Rev. D* **81**, 086001 (2010) [arXiv:0909.0748 [hep-th]]. 31
- [63] N. Itzhaki, J. M. Maldacena, J. Sonnenschein and S. Yankielowicz, “Supergravity and the large  $N$  limit of theories with sixteen supercharges,” *Phys. Rev. D* **58**, 046004 (1998) [hep-th/9802042]. 77
- [64] J. Gomis and F. Passerini, “Holographic Wilson Loops,” *JHEP* **0608**, 074 (2006) [hep-th/0604007]. 78
- [65] J. Gomis and F. Passerini, “Wilson Loops as D3-Branes,” *JHEP* **0701**, 097 (2007) [hep-th/0612022]. 78
- [66] A. Faraggi and L. A. Pando Zayas, “The Spectrum of Excitations of Holographic Wilson Loops,” *JHEP* **1105**, 018 (2011) [arXiv:1101.5145 [hep-th]]. 78
- [67] E. I. Buchbinder and A. A. Tseytlin, “ $1/N$  correction in the D3-brane description of a circular Wilson loop at strong coupling,” *Phys. Rev. D* **89**, no. 12, 126008 (2014) [arXiv:1404.4952 [hep-th]]. 78
- [68] A. Faraggi, J. T. Liu, L. A. Pando Zayas and G. Zhang, “One-loop structure of higher rank Wilson loops in AdS/CFT,” *Phys. Lett. B* **740**, 218 (2015) [arXiv:1409.3187 [hep-th]]. 78