UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE FÍSICA

Um Estudo da Teoria de Cordas e Supercordas

Saúl Josué Panibra Churata

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Orientador: Henrique Boschi Filho

Rio de Janeiro

Outubro de 2015

P187e Panibra Churata, Saúl Josué.

Um Estudo da Teoria de Cordas e Supercordas / Saúl Josué Panibra Churata.– Rio de Janeiro, 2015.

98f.

Orientador: Henrique Boschi Filho.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Física, 2015.

1. Cordas bosônicas. 2. Quantização Covariante, Cone de Luz e BRST . 3. Supersimetria 4. Formalismo RNS. 5. Formalismo GS. I. Boschi Filho, Henrique, orient. II.Título.

Resumo

Um Estudo da Teoria de Cordas e Supercordas

Saúl Josué Panibra Churata

Orientador: Henrique Boschi Filho

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Neste trabalho é feito um estudo da teoria de cordas e supercordas. Começamos por considerar aspectos básicos da corda clássica e, posteriormente, os aspectos da quantização da corda. Fazemos uma revisão da quantização covariante, na qual a invariância de Lorentz é manifesta. Consequentemente, são encontrados estados fantasma (estados com norma negativa). Posteriormente, consideramos quantizar a corda clássica no calibre do cone de luz, onde a invariância de Lorentz não é manifesta. Mas a teoria está livre de estados fantasmas. Também, esta quantização nos fornece a dimensionalidade crítica do espaço-tempo, $D = 26$.

Também, revisamos a quantização **BRST**. Nesta nova abordagem é livre dos estados fantasmas e também nos fornece a dimensionalidade crítica do espaço-tempo.

Estudamos também aspectos básicos da teoria das supercordas. Em primeiro lugar, nós revisamos o formalismo **RNS**. Este formalismo tem supersimetria na folha de mundo mas não tem supersimetria no espaço-tempo. Portanto, neste formalismo a quantização covariante é realizada apenas na folha de mundo. Finalmente, nós revisamos o formalismo **GS**. Este formalismo tem a supersimetria no espaço-tempo, exatamente o oposto do que acontece no formalismo **RNS**. A quantização no formalismo **GS** só é possível no calibre do cone de luz. Portanto, a invariância de Lorentz não é manifesta.

Palavras-chave: Cordas bosônicas, Calibre do cone de luz, Formalismo **RNS**, Formalismo **GS**.

Abstract

A Study of the theory of Strings and Superstrings

Saúl josué Panibra Churata

Orientador: Henrique Boschi Filho

Abstract da Tese de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

In this work is made a study the string and superstring theory. We start considering some basic aspects of classical string and subsequently aspects of quantization of the string. We make a review of the covariant quantization, where the Lorentz invariance is manifest. Consequently, states with negative norm (ghost states) are found. Subsequently, we will quantize the classical string in the light-cone gauge. Here the Lorentz invariance is not manifest, but is free from ghost states. This quantization also gives us the critical dimensionality of spacetime $D = 26$.

We review the **BRST** quantization. This new approach is free from ghost states and also gives us the critical dimensionality of spacetime.

We also study basic aspects of the superstring theory. First, we review the **RNS** formalism. This formalism have supersymmetry in the world sheet but not in the spacetime. Therefore, in this formalism the covariant quantization is performed only on the world sheet. Finally, we review the **GS** formalism. This formalism have supersymmetry in the spacetime, exactly the opposite of what happens in the **RNS** formalism. The quantization in the **GS** formalism is only possible in the light-cone gauge. Therefore, its Lorentz

invariance is not manifest.

Keywords: Bosonic strings, light-cone gauge, **RNS** formalism, **GS** formalism.

Agradecimentos

Primeiro eu gostaria de agradecer a minha família que me apoiou desde o início a continuar nesta bela aventura do conhecimento, porque sem o apoio deles não teria sido capaz de chegar até aqui.

Agradeço a minha namorada por seu apoio incondicional, a meus amigos do Peru, Colômbia e Brasil por ensinar-me, explicar-me, aconselhar-me e especialmente por todos os bons momentos que passei com eles.

Quero agradecer a meu orientador Henrique pela paciência durante todo meu aprendizado neste belo mundo da física. Agradeço ao Instituto de Física da UFRJ por receber-me e dar todas as comodidades que eu poderia pedir. Quero agradecer a CAPES pelo financiamento nestes dois anos.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A teoria de cordas é um dos resultados mais impressionantes da mente humana, querendo encontrar o sonho da física fundamental, uma teoria para tudo. A teoria de cordas propõe que os componentes mais elementares da natureza não são partículas, mas são objetos unidimensionais que vibram, chamadas cordas. Cada modo de vibração das cordas representa um estado quântico da partícula fundamental (elétrons, fótons, grávitons, etc).

A teoria de cordas em seus inícios na década de 60 era conhecida com o nome de teorias duais. Neste tempo a física experimental encontrou uma grande quantidade de hádrons (partículas que interagem fortemente) que satisfazem a relação,

$$J \sim m^2 \alpha', \tag{1.1}$$

onde J é o momento angular, m é a massa e α' é a inclinação de Regge.

A interações fortes tem uma miríade de hádrons. Portanto, fazer uma teoria quântica de campos de interações fortes exigiu a adição de mais campos. Além disso, os hádrons encontrados tinham spin maiores que um. Não se sabia construir uma teoria quântica de campos consistente para partículas massivas com spin maior que um. A matriz S surgiu em 1943. Esta foi uma boa ferramenta para os modelos duais. A dualidade foi descoberta experimentalmente em 1967 por Dolen, Horn e Schmid [1]. A partir desses resultados, os modelos da matriz S e a hipótese da *dualidade* eram conhecidos como modelos duais (para mais referências vide [2, 3]). Gabriele Veneziano ao estudar as interações fortes em altas energias [4], postulou em 1968 uma amplitude de espalhamento.

$$A(s,t) = \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s)-\alpha(t))}, \tag{1.2}$$

onde Γ é a função Gama, $\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha' s$ e s, t, u são as variávies de Mandelstam, $s = -(p_1 + p_2)^2$, $t = -(p_2 + p_3)^2$ e $u = -(p_1 + p_3)^2$, aqui p_i são os momentos.

Mas a amplitude de Veneziano para o espalhamento em altas energias em ângulos fixos ($s \to +\infty$, $t \to -\infty$, com s ou t fixos), não estavam de acordo com as experiências. Em seguida em torno de 1973 e 1974, foi proposta uma teoria de calibre não abeliana com o grupo de simetria $SU(3)$. Esta teoria é a Cromodinâmica Quântica (QCD). Esta nova teoria explica bem as interações fortes a altas energias e foi consistente com os dados experimentais. Então, os modelos duais sofreram uma queda, que felizmente, não durou muito tempo.

Nos anos 70 observou-se uma mudança de ponto de vista da teoria de cordas. O objetivo inicial foi descrever somente hadrons, mas mudou para descrever uma teoria das partículas elementares [5, pág. 173–175]. Em 1974, J. Scherk e J.H. Schwarz [6], descobriram que a teoria das cordas predizia uma partícula sem massa e de spin 2, que pode estar associada com a gravitação. A teoria novamente chamou a atenção para ser uma teoria da unificação.

A teoria das cordas foi criticada por algumas predições, como a apresentação de estados com norma negativa (fantasmas) e apresentação de táquions (estados com massa quadrática negativa). A solução destes problemas teve consequências que, em princípio, pareciam piorar a teoria, mas posteriormente foram o ponto forte da teoria de cordas. Particularmente uma predição foi a dimensão crítica do espaço-tempo $D = 26$ para cordas bosônicas. Uma estratégia para resolver o problema do táquion foi incorporar os campos fermiônicos. Esta incorporação dá como resultado um novo conceito chamado supersimetria. A supersimetria foi um trabalho original de Ramond [7] e Neveu-Schwarz [8](pelo ano de 1971). Eles realizaram uma supersimetria na *folha de mundo* ($2D$), que posteriormente foi generalizada por Wess e Zumino ao espaço-tempo $4D$, para mais referências vide [9].

A teoria de cordas com supersimetria agora é chamada teoria de supercordas. Portanto, é uma teoria para bósons e férmions. Porém, em 1985 tinham-se descoberto cinco teoria de supercordas: tipo I (vide [10, 11]), tipo IIA, tipo IIB, heterótica $SO(32)$ e heterótica $E_8 \times E_8$ (vide [12]). A teoria tipo I, e as duas teorias Heteróticas têm supersimetria $\mathcal{N} = 1$, as teorias tipo IIA e tipo IIB têm simetria $\mathcal{N} = 2$. A teoria tipo I não tem orientação enquanto as quatro teorias restantes têm orientação (diferenciam os movimentos esquerdos e direitos). A teoria de cordas tipo IIA tem quiralidades opostas e a tipo IIB têm a mesma quiralidade, as teorias heteróticas diferenciam-se pelos grupos de simetria $SO(32)$ e $E_8 \times E_8$. Mas a existência de cinco teorias de cordas é algo contraditório se nós queremos só uma. Em torno de 1995 surgiram certas ideias que resolveram ao menos em parte o problema. As cinco teorias de cordas estavam relacionadas por uma rede de dualidades, as mais conhecidas são a dualidade T e a dualidade S. Neste trabalho tratarei de explicar a formulação da teoria de cordas; desde cordas bosônicas até supercordas.

Neste trabalho estudam-se as teorias de cordas bosônicas e supercordas. No capítulo 2, começa-se estudando, o funcional da área em $3D$, até sua generalização em mais dimensões. Estudamos a ação de Nambu-Goto, vemos suas simetrias e sua desvantagem ao momento de resolver sua equação de movimento. Também estudaremos a ação de Polyakov e notaremos a diferença com a ação de Nambu-Goto. As equações de movimento da ação de Polyakov é mais fácil de resolver. Esta ação tem duas simetrias importantes: a invariância pela reparametrização e a invariância de Weyl que serviram no desenvolvimento da teoria. No capítulo 3, estuda-se a quantização da corda. Começamos com a quantização covariante, onde surgem os fantasmas[1] e portanto precisa-se livrar-se deles. A

[1]Estados com norma negativa, portanto estados não físicos.

segunda maneira de quantizar é no calibre de cone de luz. Notaremos que a sua principal desvantagem é a perda da invariância manifesta de Lorentz, mas o cálculo da dimensão crítica do espaço-tempo é mais fácil. Faremos a demonstração da dimensão crítica do espaço-tempo ($D = 26$), com o método de regularização por corte e regularização pela função zeta. Por último também estudaremos uma quantização mais moderna chamada de **BRST** (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin), e notaremos que tem os mesmos resultados das anteriores. No capítulo 4, estudam-se as supercordas. O principal deste capítulo são os dois formalismos clássicos para incorporar supersimetria na teoria de cordas. O formalismo **RNS** (Ramond-Neveu-Schwarz) [7, 8] é um mapeamento ($X^\mu, \psi^\mu, \mu = 0 \ldots 9$) da folha de mundo supersimétrico para o espaço-tempo D-dimensional. Este formalismo permite quantizar covariantemente só na folha do mundo, mas não apresenta supersimetria no espaço-tempo. Porém, usando o formalismo **GSO** (Gliozzi-Scherk-Olive) [13] obtém-se a supersimetria desejada, além de eliminar os táquions. O formalismo **GS** (Green-Schwarz) é um mapeamento ($X^\mu, \theta^\alpha, \mu = 0, \ldots, 9; \alpha = 0 \ldots, 16$) da folha do mundo para um espaço-tempo supersimétrico. Neste formalismo a supersimetria é manifesta no espaço-tempo, mas é difícil quantizar de uma forma covariante. Veremos que a forma de quantizar o fosmalismo **GS** é no cone de luz, mas aí se perderá a invariância manifesta de Lorentz.

Capítulo 2

Cordas relativísticas

Neste capítulo é estudada a corda clássica relativística. A dinâmica da corda gera uma superfície no espaço-tempo, assim como é feito com a linha do mundo gerada por uma partícula relativística. A área própria desta superfície é proporcional à ação, que é chamada ação de Nambu-Goto. Veremos que a ação de Nambu-Goto apresenta equações de movimento que são difíceis de resolver. Por isso, nós mudamos para uma nova ação chamada ação de Polyakov, tal que esta nova ação apresenta equações de movimento resolúveis que servirão para construir uma teoria quântica. As referências desta parte podem ser encontradas em [14–20].

2.1 Funcional da área para superfícies no espaço

A ação de uma corda relativística deve ser o funcional do caminho da corda. A corda gera uma superfície que é chamada folha do mundo. As cordas abertas geram superfícies abertas como bandas no espaço-tempo e uma corda fechada gera uma superfície fechada como um tubo no espaço-tempo.

Sabemos que a ação da partícula relativística é proporcional ao tempo próprio decorrido sobre a linha do mundo da partícula relativística. O tempo próprio multiplicado por c é um invariante de Lorentz chamado comprimento próprio da linha do mundo. Para uma corda nós chamamos de área própria da folha do mundo. A ação de uma corda relativística será proporcional a esta área, e é chamada ação de Nambu-Goto.

O restante desta seção é focada apenas em estudar superfícies no espaço. Uma linha no espaço é parametrizada por um único parâmetro, mas no caso de uma área precisa-se de dois parâmetros ξ^1 e ξ^2. Tendo esta superfície parametrizada, podemos desenhar sobre a superfície linhas constantes de ξ^1 e ξ^2. Assim, cobrimos a superfície com uma malha. Chamamos espaço alvo o espaço onde a superfície em duas dimensões mora (este espaço é o $\mathbb{R}^3$). A superfície parametrizada é descrita por uma coleção das funções,

$$\vec{\mathbf{x}}(\xi^1,\xi^2) = \big(x^1(\xi^1,\xi^2), x^2(\xi^1,\xi^2), x^3(\xi^1,\xi^2)\big). \tag{2.1}$$

Estas funções fazem um mapeamento de um certo domínio no espaço alvo.

O espaço ou conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$ é definido pelos intervalos dos parâmetros ξ^1 e ξ^2. Este pode ser um quadrado, por exemplo se usamos os parâmetros ξ^1 e $\xi^2 \in [0,\pi]$. Desejamos encontrar a área de um pequeno retângulo, da superfície do espaço alvo. Começa-se olhando um retângulo infinitesimal no espaço alvo parametrizado. Os lados do retângulo são denotados por $d\xi^1$ e $d\xi^2$. Precisamos encontrar dA, que é a área diferencial no espaço alvo. Os lados do paralelogramo no espaço alvo são,

$$d\vec{\mathbf{v}}_1 = \frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial\xi^1}d\xi^1 \quad \text{e} \quad d\vec{\mathbf{v}}_2 = \frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial\xi^2}d\xi^2. \tag{2.2}$$

Nós conhecemos da geometria que a área é igual ao produto vetorial de dois vetores. Então, temos que,

$$\vec{A}\times\vec{B} = |A||B|\sin\theta.$$

Para os vetores $d\vec{\mathbf{v}}_1$ e $d\vec{\mathbf{v}}_2$, temos,

$$d\mathbf{a} = |d\vec{\mathbf{v}}_1||d\vec{\mathbf{v}}_2||\sin\theta|, \tag{2.3}$$

já que $\cos^2\theta + \sin^2 = 1$. Portanto, teremos,

$$
\begin{aligned}
d\mathbf{A} &= |d\vec{\mathbf{v}}_1||d\vec{\mathbf{v}}_2|\sqrt{1-\cos^2\theta}, \\
&= \sqrt{|d\vec{\mathbf{v}}_1||d\vec{\mathbf{v}}_2| - |d\vec{\mathbf{v}}_1||d\vec{\mathbf{v}}_2|\cos^2\theta}, \\
&= \sqrt{(d\vec{\mathbf{v}}_1\cdot d\vec{\mathbf{v}}_1)(d\vec{\mathbf{v}}_2\cdot d\vec{\mathbf{v}}_2) - (d\vec{\mathbf{v}}_1\cdot d\vec{\mathbf{v}}_2)^2}.
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

Agora substituímos as equações (2.2) em (2.4), obtendo

$$
\begin{aligned}
d\mathbf{A} &= \sqrt{\Big(\frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial\xi^1}d\xi^1\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial\xi^1}d\xi^1\Big)\Big(\frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial\xi^2}d\xi^2\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial\xi^2}d\xi^2\Big) - \Big(\frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial\xi^1}d\xi^1\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial\xi^2}d\xi^2\Big)^2}, \\
&= d\xi^1 d\xi^2\sqrt{\Big(\frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial\xi^1}\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial\xi^1}\Big)\Big(\frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial\xi^2}\Big) - \Big(\frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial\xi^1}\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial\xi^2}\Big)^2}.
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Esta é a área infinitesimal no espaço alvo. Portanto, a funcional da área é,

$$
\mathbf{A} = \int d\xi^1 d\xi^2\sqrt{\Big(\frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial\xi^1}\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial\xi^1}\Big)\Big(\frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial\xi^2}\Big) - \Big(\frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial\xi^1}\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial\xi^2}\Big)^2}. \tag{2.6}
$$

Temos que ter em conta que, até agora só tentamos o espaço em $\mathbb{R}^3$.[1]

2.1.1 Invariância da área por reparametrização

A invariância da área por reparametrização nos permite escrever a área de forma explícita. A área de uma superfície, ou melhor, a área de qualquer pedaço da superfície, deve ser independente da parametrização escolhida. Dizemos que a área é invariante por reparametrização.

Uma boa escolha de parametrização, permite resolver as equações de movimento da corda de forma elegante.

Proposição 2.1. *A área é invariante pelas seguintes reparametrizações,*

$$
\tilde{\xi}^1 = \tilde{\xi}^1(\xi^1), \quad e \quad \tilde{\xi}^2 = \tilde{\xi}^2(\xi^2). \tag{2.7}
$$

[1] A extensão para $\mathbb{R}^n$ é imediata.

Demonstração.

$$d\tilde{\xi}^1 = \frac{\partial \tilde{\xi}^1}{\partial \xi^1} d\xi^1, \quad \tilde{\xi}^2 = \frac{\partial \tilde{\xi}^2}{\partial \xi^2} d\xi^2.$$

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^1} = \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\xi}^1} \frac{\partial \tilde{\xi}^1}{\partial \xi^1}, \quad \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\xi}^2} \frac{\partial \tilde{\xi}^2}{\partial \xi^2}.$$

Substituímos na equação (2.6), então teremos,

$$\begin{aligned}
A &= \int \frac{\partial \xi^1}{\partial \tilde{\xi}^1} d\tilde{\xi}^1 \frac{\partial \xi^2}{\partial \tilde{\xi}^2} d\tilde{\xi}^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\xi}^1} \frac{\partial \tilde{\xi}^1}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\xi}^2} \frac{\partial \tilde{\xi}^2}{\partial \xi^2}\right)\left(\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\xi}^2} \frac{\partial \tilde{\xi}^2}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\xi}^2} \frac{\partial \tilde{\xi}^2}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\xi}^1} \frac{\partial \tilde{\xi}^1}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\xi}^2} \frac{\partial \tilde{\xi}^2}{\partial \xi^2}\right)^2} \\
&= \int \frac{\partial \xi^1}{\partial \tilde{\xi}^1} d\tilde{\xi}^1 \frac{\partial \xi^2}{\partial \tilde{\xi}^2} d\tilde{\xi}^2 \frac{\partial \tilde{\xi}^1}{\partial \xi^1} \frac{\tilde{\xi}^2}{\partial \xi^2} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\xi}^1} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\xi}^1}\right)\left(\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\xi}^2} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\xi}^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\xi}^1} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\xi}^2}\right)^2} \\
&= \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\xi}^1} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\xi}^1}\right)\left(\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\xi}^2} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\xi}^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\xi}^1} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\xi}^2}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Mostra-se assim que a área é invariante pelas reparametrizações (2.7). □

Há uma forma mais efetiva para provar a invariância por reparametrização de modo mais geral (vide apendice A).

2.2 A ação de Nambu-Goto

Nós encontramos a funcional de área para o espaço alvo (que é $\mathbb{R}^3$). Então podemos fazer de forma análoga para procurar uma funcional de área para o espaço-tempo (ou espaço de Minkowski)[2]. Neste caso só fazemos uma mudança dos parâmetros ξ^1 e ξ^2 pelos parâmetros novos σ e τ. Também mudamos as funções $x^\mu(\tau, \sigma)$ por uma letra maiúscula $X^\mu(\tau, \sigma)$. Note-se que X^μ é uma função chamada coordenada da corda, e não devem ser confundidas com as coordenadas do espaço-tempo.

Temos agora um mapeamento do espaço dos parâmetros (τ, σ), para uma superfície no espaço-tempo; pelas funções $X^\mu = X^\mu(\tau, \sigma)$.

[2]Espaço de Minkowski $\mathcal{M}_0 = (\mathbb{R}^4, \eta)$, é uma variedade de Lorentz de quatro dimensões e curvatura zero, usado para descrever fenômenos físicos no âmbito da teoria da relatividade especial de Einstein, a métrica η tem assinatura $(-, +, +, +)$.

O funcional da área no espaço-tempo é,

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}\frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}\frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right)\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}\frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)} \tag{2.8}$$

$$= \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2}. \tag{2.9}$$

Note que as dimensões da equação (2.9) são de área, L^2. Agora nós estamos procurando uma ação análoga à ação de uma partícula relativística. A ação procurada será então encontrada usando análise dimensional[3],

$$S = -\frac{T}{c}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}. \tag{2.10}$$

Aqui T é uma força que chamaremos tensão da corda. Também temos as abreviações,

$$\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \quad \text{e} \quad X^{\mu\prime} \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}. \tag{2.11}$$

A ação de Nambu-Goto é manifestamente invariante pela reparametrização

$$-ds^2 = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta. \tag{2.12}$$

A métrica induzida é

$$\gamma_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta = \frac{\partial X}{\partial \xi^\alpha}\cdot\frac{\partial X}{\partial \xi^\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta, \tag{2.13}$$

ou mais explicitamente,

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} (\dot{X})^2 & \dot{X}\cdot\dot{X} \\ X'\cdot X' & (X')^2 \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Assim temos a ação de Nambu-Goto[4] [21],

$$S = -\frac{T_\circ}{c}\int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}, \qquad \gamma = det(\gamma_{\alpha\beta}). \tag{2.15}$$

Esta é a ação para uma corda que está evoluindo no espaço-tempo. O sinal negativo é uma conveniência. A ação Nambu-Goto tem duas simetrias diferentes, uma global e a

[3] A dimensão da ação é $\frac{ML^2}{T}$, e a dimensão do parâmetro T é mesmo que uma força $\frac{ML}{T^2}$. Mais adiante nós adotamos as unidades naturais onde $\hbar = 1$ e $c = 1$.

[4] Esta ação foi primeiro escrita por Nambu (1970), depois por O. Hara (1971), T. Goto (1971), M. Minami (1972) e J. Mansouri (1972).

outra local. A invariância de Poincaré $X^\mu \to X^\mu + \omega^\mu{}_\nu X^\nu + b^\mu$, é uma simetria global, aqui $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ e b^μ são constantes. A invariância por reparametrização, $\sigma^\alpha \to \tilde{\sigma}^\alpha(\sigma)$, é uma transformação para cada ponto na folha do mundo e portanto é uma simetria local. Esta ação é muito adequada por razões pedagógicas. Mas é difícil quantiza-la pelo fato dela apresentar uma raiz quadrada.

2.2.1 Equações de movimento

Para achar as equações de movimento se faz o mesmo que em mecânica de uma partícula clássica. Encontramos as equações de movimento pelo principio de Hamilton.

Temos a ação de Nambu-Goto,

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X^{\mu\prime}), \tag{2.16}$$

onde $\mathcal{L}$, é o Lagrangiano,

$$\mathcal{L} = -\frac{T_\circ}{c}\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}. \tag{2.17}$$

Fazendo a variação da ação (2.16). Então, teremos que,

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}\delta X^\mu\right]_{\tau_i}^{\tau_f} + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu\prime}}\delta X^\mu\right]_0^{\sigma_1} \\ & - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}\Big) + \frac{\partial}{\partial \sigma}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu\prime}}\Big)\right)\delta X^\mu. \end{aligned} \tag{2.18}$$

A partir daqui podemos analisar três termos da equação (2.18). O primeiro termo desaparece porque no tempo inicial e no tempo final não há variação. Pode-se ver que $\delta X^\mu(\tau_i, \sigma) = \delta X^\mu(\tau_f, \sigma) = 0$, é análoga à análise da partícula clássica.

O segundo termo tem que ver com as condições na fronteira. Então temos que impor critérios na fronteira para que esse termo desapareça. O primeiro critério é a condição de Neumann na fronteira. Temos que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu}} = \mathcal{P}^\sigma_\mu(\sigma_*, \tau) = 0$. Notando que σ_* representa ambos extremos $\sigma = 0$ e $\sigma = \sigma_1$. Esta condição diz que os extremos se movem livremente[5]. Também, esta condição satisfazem à condição de conservação da energia.

[5] Na verdade os extremos da corda se movem com velocidade c transversal à corda.

O segundo critério é a condição de Dirichlet na fronteira. Temos que $\delta X^\mu(\sigma_*, \tau) = 0$ ou também $\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} = 0$ onde $\mu \neq 0$. Aqui a coordenada da corda X^0 pode mudar em relação ao parâmetro τ. Este parâmetro está relacionado com o tempo. Mas as coordenadas X^i $(i = 1, 2, \ldots N)$ não mudam com o tempo. No início da teoria de cordas as condições de Dirichlet não foram consideradas porque eles não estavam em conformidade com a conservação da energia (com essas condições não se pode conservar a energia). Mas agora são consideradas, pela introdução de alguns objetos chamados Dp-branas[6]. Então as cordas são vinculadas a esses objetos e, portanto, pode-se conservar a energia.

Uma corda ligada a um ponto fixo seria uma corda vinculada numa $D0$-brana. Uma corda que pode-se mover em uma linha seria uma corda vinculada numa $D1$-Brana, e assim por diante.

Do terceiro termo da equação (2.18) e com o Lagrangiano (2.17), pode-se encontrar as equações de movimento. Então temos que,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_\circ}{c} \frac{[(\dot{X} \cdot X')X'_\mu - \dot{X}_\mu (X')^2]}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} = \mathcal{P}^\tau_\mu \quad \text{e} \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu\prime}} = -\frac{T_\circ}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X')\dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} = \mathcal{P}^\sigma_\mu. \tag{2.20}$$

A equação de movimento podem ser expressa de uma forma compacta,

$$\frac{\partial \mathcal{P}^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial \sigma} = 0. \tag{2.21}$$

Esta equação é muito difícil de ser resolvida na forma geral. Mas podem-se incluir alguns vínculos resultantes da liberdade da parametrização, para atingir uma forma mais simples das equações de movimento, e portanto, mais fácil de resolver. Para obter mais informações a esse respeito consulte o livro de B. Zwiebach [15, págs. 134–136] e o *review* de J. Scherk [19]. Mas não vamos ir por este caminho. Na próxima seção, vamos ver uma ação equivalente à ação de Nambu-Goto que nos permitirá ir mais longe no nosso caminho para a quantização da corda.

[6]As Dp-branas são uma classe especial de p-Branas, D refere-se a Dirichlet.

2.3 A corda Bosônica livre

Em geral, podemos descrever objetos estendidos mais gerais. Por exemplo, um ponto será um objeto 0-dimensional, a corda será um objeto 1-dimensional, a casca esférica será um objeto 2-dimensional e assim por diante. A generalização da ação pode ser feita com um volume invariável $(n+1)$-dimensional do espaço-tempo que é gerado por um objeto n-dimensional. Portanto, a constante (T) que deixa adimensional a ação tem que ter dimensão $(massa)^{n+1}$.

No entanto, estamos apenas tentando descrever os graus bosônicos de liberdade. A geometria intrínseca varrida pelo objeto n-dimensional é uma variedade $(n+1)$-dimensional que se caracteriza por uma métrica $h_{\alpha\beta}(\sigma)$.

Então a ação generalizada é,

$$S = -\frac{T}{2} \int d^{n+1}\sigma \sqrt{h} h^{\alpha\beta}(\sigma) g_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu, \tag{2.22}$$

onde $\sigma^0 = \tau$ e as coordenadas espaciais são σ^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Estas coordenadas especificam um objeto n-dimensional.

Também, $h^{\alpha\beta}$ é o inverso de $h_{\alpha\beta}$ e h é o valor absoluto do determinante; $h = |det(h_{\alpha\beta})|$. A métrica $h_{\alpha\beta}$ tem uma assinatura de Minkowski. Então, um de seus valores próprios é negativo (*timelike*) e os outros n valores permanecem positivos (*spacelike*). A função $X^\mu(\sigma) : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ é uma aplicação, onde $\mathcal{N} \in \mathbb{R}^{n+1}$ é o conjunto onde moram os parâmetros τ, σ e $\mathcal{M}$ é a variedade do *espaço-tempo*. A métrica $g_{\mu\nu}$ descreve o espaço-tempo D-dimensional e a métrica $h_{\alpha\beta}$ descreve a variedade $(n+1)$-dimensional gerada por um objeto n-dimensional que é chamado *world-manifold* (em duas dimensões esta variedade é chamada *folha de mundo*), em geral $D \geq n+1$.

Da relatividade se conhece que o elemento de volume $d^{n+1}\sigma\sqrt{h}$ é invariante e $h^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu$ também são invariantes já que os índices são contraídos apropriadamente. Como no caso da partícula relativística (veja o Apêndice B) se pode fazer uma escolha onde $h_{\alpha\beta}$ é eliminado. Mas h não pode ser eliminado simplesmente por reparametrização da *world-*

manifold. Porém, existe uma simetria local adicional que ocorre apenas no caso de objetos 1-dimensional (neste caso a corda), então devemos ter em conta esta simetria. A simetria adicional é a invariância de Weyl,

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow \Lambda(\sigma) h_{\alpha\beta},$$

pelo qual

$$\sqrt{h} h^{\alpha\beta} \rightarrow \Lambda^{\frac{1}{2}(n+1)-1} \sqrt{h} h^{\alpha\beta}.$$

Essa simetria deixa a ação (2.22) invariante para $n = 1$. A simetria de Weyl é central para o desenvolvimento da teoria das cordas. Portanto, esta simetria é o que distingue as cordas em comparação com objetos de maior dimensão. As membranas ou objetos de maior dimensionalidade têm outro grande problema, não são renormalizáveis de acordo com o critério de *contagem de potência* [7]. As cordas são uma teoria renormalizável de acordo com o critério referido. Então podemos concluir que para $n = 1$ a teoria é renormalizável e para $n > 1$ é não renormalizável. Portanto, podemos concluir que os objetos de maior dimensionalidade não são uma boa maneira de desenvolver uma teoria da gravidade quântica, para mais detalhes veja M. Grenn, J. Schwarz, E. Witten [20, pág. 60].

A partir de agora estudaremos apenas a corda livre (objeto 1-dimensional). Na ação (2.22) fazemos a substituição $n = 1$, e teremos a ação para a corda bosônica livre. Livre porque não inclui interações e bosônica porque os campos obedecem uma estatística bosônica. Esta nova ação chama-se de Polyakov[8] [22].

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}. \tag{2.23}$$

Há três grupos de simetria para a ação de Polyakov.

[7] A contagem de potência de um Lagrangiano diz se uma teoria é renormalizável ou não. Num espaço de d dimensões, a dimensionalidade c do Lagrangiano obtém-se desta forma, $dim[\mathcal{L}] = L^{-c}$, se $c \geq d$ é renormalizável e se $c < d$ é não renormalizável.

[8] Esta ação foi descoberta independentemente por Brink, Di Vecchia e Howe e por Deser e Zumino, em 1981 e foi usada por Polyakov para a quantização da corda mediante integrais de caminho. Existem pequenas diferenças na definição da ação de Polyakov no livro de *M.B.Green,J.H.Schwarz,E.Witten* e o livro de *K.Becker,M.Becker,J.H.Schwarz*, aqui seguimos a definição do primeiro.

- Simetria de Poincaré: Os campos da folha do mundo transformam-se da seguinte maneira,

$$\delta X^\mu = a^\mu_\nu X^\nu + b^\mu, \qquad \delta h^{\alpha,\beta} = 0.$$

- Simetria por reparametrização: A reparametrização não muda a ação. Esta fica invariante por reparametrização,

$$\sigma^\alpha \longrightarrow f^\alpha(\sigma) = \sigma'^\alpha, \qquad h_{\alpha\beta} = \frac{\partial f^\gamma}{\partial \sigma^\alpha}\frac{\partial f^\delta}{\partial \sigma^\beta} h_{\gamma\delta}(\sigma').$$

- Simetria de Weyl: A ação é invariante por transformação de escala,

$$h_{\alpha\beta} \longrightarrow e^{\phi(\tau,\sigma)} h_{\alpha\beta}, \qquad \delta X^\mu = 0.$$

Portanto, as equações de movimento da ação Polyakov podem ser calculadas. Primeiro, encontramos a equação de movimento associada com a métrica $h_{\alpha\beta}$. De fato, a variação da ação em relação à métrica nos dá uma quantidade especial $T_{\alpha\beta}$ chamado *tensor energia-momento.*

O tensor pode ser calculado como se segue,

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2}{T}\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}}, \tag{2.24}$$

então temos que,

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\rho\delta} \partial_\rho X^\mu \partial_\delta X_\mu = 0. \tag{2.25}$$

O tensor de energia-momento pode-se encontrar com $\delta h = -h h_{\alpha\beta} \delta h^{\alpha\beta}$ (derivada de uma matriz).

Em seguida, as equações do movimento correspondentes para X^μ também são encontradas. Esta é calculada da forma convencional (a partir da equação de Euler-Lagrange). Então temos,

$$\partial_\alpha(\sqrt{h} h^{\alpha\beta}(\sigma) \partial_\beta X_\mu(\sigma)) = 0. \tag{2.26}$$

Esta é a equação de movimento. Note a dependência do parâmetro σ na métrica. Esta é uma forma complexa para resolver esta equação. Então vamos procurar uma forma mais simplificada aproveitando as simetrias da ação de Polyakov.

2.3.1 Fixando um *calibre* para $h_{\alpha\beta}$

É muito conveniente usar todo o poder das simetrias de calibre. Podemos escolher coordenadas para simplificar nossa ação (2.23). Primeiro torna-se a métrica conformalmente plana [23],

$$h_{\alpha\beta} = e^{2\phi}\eta_{\alpha\beta},$$

onde $\phi = \phi(\sigma, \tau)$, é uma função da folha de mundo. Agora utilizamos a simetria de Weyl e fazemos $\phi = 0$. Em seguida, conseguimos o que queríamos,

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}. \tag{2.27}$$

Esta é uma métrica plana em duas dimensões com assinatura de Minkowski $(-, +)$. Então teremos para a métrica $\eta_{\alpha\beta}$[9],

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

onde $\eta = det(\eta_{\alpha\beta}) = -1$.

A ação de Polyakov com a métrica plana é

$$S = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\nu. \tag{2.29}$$

A equação de movimento associada a X^μ é mais simples que (2.26). Portanto, a equação de movimento é,

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu = 0. \tag{2.30}$$

A equação de movimento com a métrica $\eta_{\alpha\beta}$ é,

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\rho\delta}\partial_\rho X^\mu \partial_\delta X_\mu = 0. \tag{2.31}$$

Da equação de movimento $T_{\alpha\beta} = 0$, temos que,

$$T_{10} = T_{01} = \dot{X} \cdot X' = 0$$
$$T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + X'^2) = 0 \tag{2.32}$$

[9]Fazemos a distinção da métrica do espaço-tempo $\eta^{\mu\nu}$ com a métrica da folha de mundo $\eta^{\alpha\beta}$ da seguinte forma: as primeiras letras do alfabeto grego $\alpha\beta$ refere-se para a métrica da folha de mundo e $\mu\nu$ são utilizadas para a métrica do espaço-tempo.

Como resultado disto, temos a equação de movimento da corda é a equação de onda (2.30) sujeitas aos vínculos (2.32).

2.3.2 Coordenadas do *cone de luz*

Pode-se mudar para outro sistema de coordenadas que nos ajudará a resolver melhor os problemas discutidos mais adiante. Estas são conhecidas como coordenadas do *cone de luz*. Estas novas coordenadas facilitam nosso desenvolvimento no momento de quantizar a teoria. Mas também tem uma grande desvantagem. Nestas coordenadas a invariância de Lorentz é não manifesta.

Como exemplo, tomamos o espaço-tempo em $4D$ com assinatura $(-,+,+,+)$. Então definimos que as coordenada no cone de luz[10].

$$x^0 = \frac{x^+ + x^-}{\sqrt{2}}, \quad \text{e} \quad x^1 = \frac{x^+ - x^-}{\sqrt{2}}. \tag{2.33}$$

Também procuramos sua forma diferencial. Portanto temos que,

$$dx^0 = \frac{dx^+ + dx^-}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad dx^1 = \frac{dx^+ - dx^-}{\sqrt{2}}, \tag{2.34}$$

e ds^2 em termos de coordenadas do cone de luz é,

$$ds^2 = 2dx^+dx^- - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \tag{2.35}$$

Logo a métrica do espaço-tempo em coordenadas do cone de luz é,

$$\tilde{\eta}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

Também é importante definir as coordenas da folha de mundo em coordenadas do cone de luz. Então temos que,

$$\sigma^+ = \tau + \sigma \quad \text{e} \quad \sigma^- = \tau - \sigma, \tag{2.37}$$

[10]Notamos que nós tomamos somente a coordenada temporal x^0 e uma das coordenadas espaciais neste caso x^1, as outras coordenadas permanecem inalteradas.

já que $d\sigma^+ = d\tau + d\sigma$ e $d\sigma^- = d\tau - d\sigma$. Portanto, teremos que,

$$ds^2 = -d\sigma^+ d\sigma^-. \tag{2.38}$$

A métrica da folha de mundo em coordenadas do cone de luz é,

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.39}$$

onde a inversa é,

$$\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

Pode-se escrever a ação de Polyakov usando as coordenadas do cone de luz. Assim, teremos

$$S = -T \int d^2\sigma \partial_+ X^\mu \partial_- X^\nu \eta_{\mu\nu}, \tag{2.41}$$

desta ação pode-se achar as equações de movimento. Portanto, fazendo a variação δS à ação (2.41). Achamos a equação de movimento,

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0. \tag{2.42}$$

Esta é a equação da corda relativística em coordenadas do cone de luz.

2.4 Solução da equação da onda

A solução da equação de onda pode ser expressada em termos da superposição de duas ondas em movimento para a direita e para a esquerda (solução de D'Alembert). Portanto tem-se,

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma). \tag{2.43}$$

As soluções mais gerais que satisfazem as condições na fronteira são:

$$X_L^\mu(\tau + \sigma) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\ell_s^2 p^\mu(\tau + \sigma) + \frac{i}{2}\ell_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)}, \tag{2.44}$$

$$X_R^\mu(\tau - \sigma) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\ell_s^2 \bar{p}^\mu(\tau - \sigma) + \frac{i}{2}\ell_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n}\bar{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)}, \tag{2.45}$$

onde α_n^μ e $\bar{\alpha}_n^\mu$ são os modos de Fourier. Também, x^μ é a posição do centro de massa, p^μ é o momento total da corda e ℓ_s é o comprimento da corda. Estas soluções são mostradas na referência[11] [20]. O comprimento da corda está relacionado com a tensão T, a qual está relacionada ao parâmetro de declive α' por,

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}, \qquad \frac{1}{2}\ell_s^2 = \alpha'. \tag{2.46}$$

Pode-se também derivar as seguintes condições de realidade física,

$$(\alpha_k^\mu)^* = \alpha_{-k}^\mu \quad \text{e} \quad (\bar{\alpha}_n^\mu)^* = \bar{\alpha}_{-n}^\mu. \tag{2.47}$$

Agora impomos condições na fronteira. Já que temos duas classes diferentes de cordas (abertas e fechadas), vamos tratar as duas separadamente.

2.4.1 Cordas abertas

Agora vamos aplicar as condições na fronteira. Começamos com cordas abertas com extremos livres. As cordas abertas satisfazem as condições de Neumann

$$\left.\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta X'^\mu}\right|_{\bar{\sigma},\sigma=0} = 0.$$

Neste caso teremos,

$$X'^\mu(\tau,\sigma)|_{\sigma=0,\pi} = 0.$$

Aplica-se a derivada em relação de σ às equações (2.44) e (2.45). Agora temos

$$\frac{\partial X_L^\mu}{\partial\sigma} = \frac{1}{2}\ell_s^2 p^\mu + \ell_s \sum_{n\neq 0} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)}, \tag{2.48}$$

$$\frac{\partial X_R^\mu}{\partial\sigma} = -\frac{1}{2}\ell_s^2 \bar{p}^\mu - \ell_s \sum_{n\neq 0} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)}. \tag{2.49}$$

Somamos estas equações com a condição $\sigma = 0$. Portanto, teremos,

$$X'^\mu|_{\sigma=0} = \frac{\ell_s^2}{2}(p^\mu - \bar{p}^\mu) + \ell_s \sum_{n\neq 0} e^{-2in\tau}(\alpha_n^\mu - \bar{\alpha}_n^\mu) = 0, \tag{2.50}$$

onde se,

[11]Há uma variedade de livros que mostram as soluções da equação de onda de corda com algumas diferenças menores, mas elas não são transcendentais. O livro de B. Zwiebach [15, págs. 183–186] mostra em detalhes a solução da equação de onda.

$p^\mu = \bar{p}^\mu$	as cordas não podem enrolar-se nelas mesmas e,
$\alpha_n^\mu = \bar{\alpha}_n^\mu$	mesmos modos para ondas direitas e esquerdas.

Quando fazemos $\sigma = \pi$, chegamos à conclusão de que n é um inteiro. Portanto podemos escrever a equação de movimento, da seguinte forma,

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu + \ell_s^2 p^\mu \tau + i\ell_s \sum_{n\neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-2in\tau} \cos(2n\sigma). \tag{2.51}$$

Também podemos calcular a posição e momentum de centro de massa da corda,

$$X_{CM}^\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\sigma X^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu + \ell_s^2 p^\mu \tau. \tag{2.52}$$

Antes de prosseguir, fazemos a seguinte derivada da solução (2.51),

$$\dot{X}^\mu = 2\ell_s \sum_{n=0} \alpha_n^\mu e^{-2in\tau} \cos 2n\sigma, \tag{2.53}$$

onde $\alpha_0^\mu = \frac{\ell_s}{2} p^\mu$. Portanto, temos que.

$$\begin{aligned} p_{CM}^\mu = 2T \int_0^\pi d\sigma \dot{X}^\mu &= \frac{1}{2\pi\ell_s^2}\int_0^\pi d\sigma 2\ell_s \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-2in\tau}\cos 2n\sigma \\ &= 2\frac{1}{2\ell_s^2\pi} 2\ell_s \alpha_0^\mu \pi \\ &= p^\mu, \end{aligned} \tag{2.54}$$

aqui $T = \frac{1}{2\pi\ell_s^2}$, é a tensão[12] da corda. Assim notamos que a posição (2.52) e momento (2.54) são do centro de massa da corda.

Porém, também pode-se impor condições de contorno de Dirichlet. Os extremos da corda são mantidas em um objeto chamado D_p-brana[13].

2.4.2 Cordas fechadas

As cordas fechadas geram tubos no espaço-tempo. Elas não tem extremos. Portanto, as condições na fronteira são periódicas,

$$X^\mu(\tau,\sigma+2\pi) = X^\mu(\tau,\sigma). \tag{2.55}$$

[12] A tensão da corda esta relacionada com o parâmetro de declive α' da seguinte forma $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$, e o parâmetro de declive esta relacionado com o comprimento da corda ℓ_s como segue $\alpha' = \ell_s^2$, vide o livro de B.Zwiebach [15, págs. 168 – 170].

[13] Aqui não estudamos as Branas, as Branas são estudadas no livro de J.Polchinski *String Theory Vol II.*

Agora, a condição na fronteira (2.55) é introduzida nas soluções (2.44) e (2.45). Em consequência, o número n é um inteiro. Portanto temos,

$$X_L^\mu(\tau+\sigma) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\ell_s^2 p^\mu(\tau+\sigma) + \frac{i}{2}\ell_s \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-2in(\tau+\sigma)} \tag{2.56}$$

$$X_R^\mu(\tau-\sigma) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\ell_s^2 \bar{p}^\mu(\tau-\sigma) + \frac{i}{2}\ell_s \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{\bar{\alpha}_n^\mu}{n} e^{-2in(\tau-\sigma)}. \tag{2.57}$$

Define-se,

$$\alpha_0^\mu = \frac{1}{2}\ell_s p^\mu \quad \text{e} \quad \bar{\alpha}_0^\mu = \frac{1}{2}\ell_s \bar{p}^\mu. \tag{2.58}$$

Então as derivadas de (2.56) e (2.57) podem-se escrever,

$$\partial_+ X_L^\mu = \ell_s \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)} \text{e} \tag{2.59}$$

$$\partial_- X_R^\mu = \ell_s \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)}, \tag{2.60}$$

onde $\partial_\pm \to \frac{\partial}{\partial\sigma^\pm}$ e $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$. A condição de periodicidade impõe $p^\mu = \bar{p}^\mu$.

A posição do centro de masa é

$$X_{CM}^\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma X^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu + \ell_s^2 p^\mu \tau, \tag{2.61}$$

e momento do centro de massa é,

$$\begin{aligned} p_{CM}^\mu &= 2T\int_0^{2\pi} d\sigma \dot{X}^\mu \\ &= \frac{1}{\pi\ell_s^2}\int_0^{2\pi} d\sigma \ell_s \sum_{n=0}(\alpha_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)}) \\ &= \frac{1}{\ell_s}(\alpha_0^\mu + \bar{\alpha}_0^\mu) = p^\mu. \end{aligned} \tag{2.62}$$

A equação (2.61), em $\tau = 0$, tem a mesma equação de movimento de uma partícula livre. As duas equações anteriores, representam o movimento da corda. A corda pode-se mover como um todo. O movimento é descrito pela posição x^μ, momentum p^μ e os modos de Fourier α_n^μ e $\bar{\alpha}_n^\mu$. A corda não só move-se como um todo, mas também pode vibrar de muitas formas.

Também pode-se calcular o momento angular da seguinte forma

$$J^{\mu\nu} = T\int_0^{2\pi} d\sigma(X^\mu \dot{X}^\nu - X^\nu \dot{X}^\mu), \tag{2.63}$$

então temos

$$J^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha^\mu_{-n}\alpha^\nu_n - \alpha^\nu_{-n}\alpha^\mu_n) - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\bar{\alpha}^\mu_{-n}\bar{\alpha}^\nu_n - \bar{\alpha}^\nu_{-n}\bar{\alpha}^\mu_n). \tag{2.64}$$

A partir daqui vemos que o momento angular da corda tem contribuições de movimento do centro de masa e das vibrações da corda.

2.5 Vínculos de Virasoro

Os componentes T_{--} e T_{++} do tensor energia-momento em coordenadas do cone de luz são,

$$T_{--} = \frac{1}{2}(\partial_- X)^2 = 0 \quad \text{e} \quad T_{++} = \frac{1}{2}(\partial_+ X)^2 = 0. \tag{2.65}$$

Pode-se definir os operadores de Virasoro em relação aos modos de Fourier do tensor energia-momemto. Então para cordas fechadas tem-se.

$$L_m = 2T\int_0^{2\pi} d\sigma T_{--} e^{im(\tau-\sigma)}, \tag{2.66}$$

$$\bar{L}_m = 2T\int_0^{2\pi} d\sigma T_{++} e^{im(\tau-\sigma)}. \tag{2.67}$$

Também, pode-se expressar em termos dos modos de oscilação,

$$L_m = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_{m-n}\cdot\alpha_n, \tag{2.68}$$

$$\bar{L}_m = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{\alpha}_{m-n}\cdot\bar{\alpha}_n. \tag{2.69}$$

Com as condições de realidade física $L^*_m = L_{-m}$ e $\bar{L}^*_m = \bar{L}_m$. Portanto, o Hamiltoniano pode-se expressar da seguinte forma,

$$H = L_0 + \bar{L}_0. \tag{2.70}$$

Porém, para cordas abertas define-se os operadores de Virasoro

$$L_m = 2T \int_0^\pi d\sigma (T_{--} e^{im(\tau-\sigma)} + T_{++} e^{im(\tau+\sigma)}). \tag{2.71}$$

Em termos de modos de oscilação,

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n. \tag{2.72}$$

Portanto o Hamiltoniano é,

$$H = L_0. \tag{2.73}$$

Em consequência, com ajuda dos parênteses de Poisson para os modos de oscilação, pode-se derivar os parênteses para os operadores de Virasoro. Eles formam uma álgebra chamado álgebra de Virasoro clássica,

$$\{L_m, L_n\}_{CP} = -i(m-n) L_{m+n}, \tag{2.74}$$

$$\{\bar{L}_m, \bar{L}_n\}_{CP} = -i(m-n) \bar{L}_{m+n}, \tag{2.75}$$

$$\{L_m, \bar{L}_n\}_{CP} = 0. \tag{2.76}$$

Para cordas abertas $L_m = \bar{L}_m$. Portanto $\bar{L}_m$ esta ausente para cordas abertas. Os vínculos de Virasoro L_0 são importantes porque eles incluem uma quantidade muito importante. O quadrado do quadrimomento (ou momento no espaço-tempo) p^μ. Mas, o quadrimomento ao quadrado é igual à massa de uma partícula em repouso.

$$p_\mu p^\mu = -M^2. \tag{2.77}$$

Assim os vínculos L_0 e $\bar{L}_0$, dizem que a massa efetiva de uma corda em termos de modos de oscilação é,

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} \sum_{n>0} \alpha_n \cdot \alpha_{-n} = \frac{4}{\alpha'} \sum_{n>0} \bar{\alpha}_n \cdot \bar{\alpha}_{-n}. \tag{2.78}$$

Esta massa ao quadrado obtida será muito importante no desenvolvimento da teoria. Nós veremos o que acontece com a massa após da quantização da teoria.

Capítulo 3

Quantização da corda

Até agora nós tratamos as cordas de uma forma clássica. Agora precisamos quantizar a teoria. Neste capítulo tentamos três abordagens para quantizar as cordas. Primeiro vamos fazer a quantização covariante. Nesta quantização se utiliza o calibre de Lorentz, o método de quantização é análogo à quantização de Gupta Bleuer para QED. Depois fazemos quantização em coordenadas do cone de luz. Nesta abordagem a invariância de Lorentz é não manifesta, portanto, não é muito conveniente para aplicações futuras. Finalmente fazemos a quantização BRST. Como consequências da quantização, achamos que o espaço-tempo tem dimensão crítica $D = 26$. Para a corda bosônica também são encontrados estados com norma negativa, normalmente conhecidos como fantasmas. Esses fantasmas surgem na quantização covariante. A fixação de um calibre ajuda a eliminar esses fantasmas[1]. Outra consequência importante são os estados de vibração fundamental. Estes estados fundamentais têm massa ao quadrado negativas e são chamados os táquions. Estes táquions são estados não físicos. Portanto, nós precisaremos de alguma teoria que elimine essas incoerências não físicas. Uma teoria para eliminar essas incoerências, é a incorporação da Supersimetria (SUSY) na teoria das cordas, como veremos no capítulo 4.

[1]Tenha em mente que estes estados fantasma são diferentes dos campos fantasma da quantização BRST. A quantização covariante da QED também apresenta este tipo de problema. Os estados com norma negativa são eliminados com o método de quantização de Gupta-Bleuer.

3.1 Quantização covariante das cordas

Vamos a quantizar D campos X^μ que são governados pela ação de Polyakov (2.29) (vide a seção § 2.3, e depois imporemos os vínculos,

$$\dot{X} \cdot X' = \dot{X}^2 + X'^2 = 0. \tag{3.1}$$

As coordenadas da corda $X^\mu(\tau, \sigma)$, são promovidas para operadores. Portanto, precisamos o momento conjugado $\mathcal{P}^\mu_\tau$. Da dinâmica Lagrangiana temos

$$\mathcal{P}_{\tau\mu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\tau X^\mu)}. \tag{3.2}$$

Da ação,

$$S = \frac{T}{2} \int d^2\sigma \Big(\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu - \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu \Big), \tag{3.3}$$

temos a Lagrangiana,

$$L = \frac{T}{2} \Big(\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu - \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu \Big). \tag{3.4}$$

Agora pode-se calcular o momento conjugado,

$$\mathcal{P}_{\tau\mu}(\tau, \sigma) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\tau X^\mu)} = T \partial_\tau X_\mu. \tag{3.5}$$

Portanto, pode-se quantizar a teoria mudando os comutadores clássicos para comutadores quânticos. O método padrão para passar da física clássica à física quântica é substituir os parênteses de Poisson por comutadores via $[\ldots]_{B.P} \to i[\ldots]$.

$$[P^\mu_\tau(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')] = -i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma - \sigma') \tag{3.6}$$

$$[X^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')] = 0 \tag{3.7}$$

$$[\mathcal{P}^\mu_\tau(\tau, \sigma), \mathcal{P}^\nu_\tau(\tau, \sigma')] = 0. \tag{3.8}$$

As relações de comutação são tomadas num mesmo tempo. As posições espaciais são tomadas em diferentes regiões da corda. Agora as relações de comutação para os modos de Fourier x^μ, p^μ, α_n^μ e $\bar{\alpha}_n^\mu$ são:

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}, \tag{3.9}$$

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n}, \tag{3.10}$$

$$[\bar{\alpha}_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n}, \tag{3.11}$$

$$[\alpha_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu] = 0, \tag{3.12}$$

onde,

$$\delta_{m+n} = \begin{cases} 0 & \text{se } m+n \neq 0 \\ 1 & \text{se } m+n = 0 \end{cases}$$

Definimos agora

$$a_\nu^\mu = \frac{1}{\sqrt{m}}\alpha_m^\mu, \qquad a_m^{\mu\dagger} = \frac{1}{\sqrt{m}}\alpha_{-m}^\mu \qquad \forall m > 0. \tag{3.13}$$

As relações de comutação (3.10) e (3.11) com esta nova definição são:

$$[a_m^\mu, a_n^{\nu\dagger}] = [\bar{a}_m^\mu, \bar{a}_n^{\nu\dagger}] = \eta^{\mu\nu}\delta_{m,n} \qquad \forall m, n > 0. \tag{3.14}$$

Note-se que isto vale para cordas fechadas. Portanto, para cordas abertas, temos só a relação de comutação,

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0}. \tag{3.15}$$

Os operadores α_m^μ e $\bar{\alpha}_m^\mu$, são semelhantes aos operadores de criação e destruição do oscilador harmônico da mecânica quântica. Aqui o operador α_m^μ (ou $\bar{\alpha}_m^\mu$) para $m < 0$, são os operadores de criação e para $m > 0$ são os operadores de aniquilação. Estes operadores atuam sobre um estado que pertence ao espaço de Fock. Podemos definir o estado de vácuo da corda como $|0\rangle$. Este estado se comporta da seguinte forma,

$$\alpha_m^\mu |0\rangle = \bar{\alpha}_m^\mu |0\rangle = 0, \qquad m > 0. \tag{3.16}$$

É importante distinguir o estado de vácuo de uma *teoria quântica dos campos* (TQC) e o estado de vácuo de uma corda. O estado de vácuo no TQC é um vácuo do espaço-tempo, enquanto que, um vácuo de uma corda está relacionado ao estado fundamental de vibração de uma corda.

O estado também traz informações de momemtum linear, então temos um operador de momentum linear que aplica-se ao estado $|p^\mu;0\rangle$, como se segue,

$$\hat{p}^\mu \,|p^\mu;0\rangle = p^\mu \,|p^\mu;0\rangle\,. \tag{3.17}$$

Podemos agora construir o espaço de Fock com ajuda dos operadores de criação (os modos vibracionais da corda). Os operadores de criação α^μ_m ou $\bar{\alpha}^\mu_m$ com $m<0$ atuam no vácuo $|0;p^\mu\rangle$ e desta forma você pode criar novos estados. Qualquer estado pode ser definido como segue,

$$(\alpha^{\mu 1}_{-1})^{n_{\mu 1}}(\alpha^{\mu 2}_{-2})^{n_{\mu 2}}\ldots(\bar{\alpha}^{\nu 1}_{-1})^{n_{\nu 1}}(\bar{\alpha}^{\nu 2}_{-2})^{n_{\nu 2}}\ldots|0;p^\mu\rangle\,. \tag{3.18}$$

Cada estado que pertence ao espaço de Fock trata-se de um diferente estado excitado da corda. Cada um destes estados tem uma interpretação no espaço-tempo. Estes estados do espaço de Fock representam uma partícula no espaço-tempo.

Aqui há um problema. Nós construímos um espaço de Fock com estados que tem norma negativa. Isto pode ser analisado a partir dos comutadores (3.14) e (3.15). O comutador das componentes temporais tem sinal negativo. Assim,

$$[\alpha^0_m,\alpha^0_{-m}] = -m, \qquad [a^0_m,a^{0\dagger}_m] = -1. \tag{3.19}$$

Este resultado tem como consequência a existência de estados com norma negativa. Daqui e com a relação de comutação (3.19), temos o estado $a^{0\dagger}_m\,|0\rangle$ com norma

$$\langle 0|\,a^0_m a^{0\dagger}_m\,|0\rangle = -1. \tag{3.20}$$

Nós pomos nossa atenção por um momento aqui. Em uma teoria da natureza é essencial que os estados físicos tenha normas positivas para não violar princípios de unitariedade e causalidade. Porem, há formas para eliminar esses estados com norma negativa do espectro físico como veremos na próxima seção § 3.2.

Agora, tal qual como em mecânica quântica, podemos construir o operador número em função dos modos,

$$N_m = \alpha_{-m}\alpha_m, \qquad m>0. \tag{3.21}$$

Da mesma forma do oscilador harmônico pode-se defenir os estados e valores próprios do operador número. Então temos que

$$N_m \left|\phi\right\rangle = n_m \left|\phi\right\rangle . \tag{3.22}$$

O operador número total é

$$N = \sum_{m=1}^{\infty} N_m = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}\alpha_m. \tag{3.23}$$

3.1.1 Vínculos de Virasoro

Em termos dos modos de Fourier, o vínculo clássico pode ser escrito como, $L_m = \bar{L}_m = 0$. Onde,

$$L_m = \frac{1}{2}\sum_n \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n, \tag{3.24}$$

o mesmo para $\tilde{L}_m$.

Os vínculos são os geradores de Virasoro. Em uma teoria quântica os geradores de Virasoro são promovidos para operadores quânticos. A álgebra clássica é,

$$[L_m, L_n]_{B.P} = i(m-n)L_{m+n}. \tag{3.25}$$

Nós não imporemos todas essas equações para os operadores no espaço de Hilbert. Na verdade, só podemos exigir que os operadores L_m e $\tilde{L}_m$ eliminem os elementos de matriz entre dois estados físicos $\left|\phi\right\rangle$ e $\left|\phi'\right\rangle$.

$$\left\langle\phi'\right| L_m \left|\phi\right\rangle = \left\langle\phi'\right| \bar{L}_m \left|\phi\right\rangle = 0. \tag{3.26}$$

Se $L_m^\dagger = L_{-n}$, então é suficiente que,

$$L_m \left|\phi\right\rangle = \bar{L}_m \left|\phi\right\rangle = 0, \qquad \forall n > 0. \tag{3.27}$$

Até agora não foi explicado como impor os vínculos para L_0 e $\bar{L}_0$. O problema é que, ao contrário dos operadores L_m com $m \neq 0$, o operador L_0 não é unicamente definido quando passamos à teoria quântica. Há uma ambiguidade na ordem entre os operadores causada pelas relações de comutação (3.11). Para resolver essa ambiguidade, vamos escolher apenas uma opção de ordenamento. Vamos definir os operadores para ter ordenamento normal.

O ordenamento normal é denotado por : : , esto denota que todos os operadores de aniquilação vai para a direita. Assim temos para os vínculos,

$$L_m = \frac{1}{2}\sum_n : \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n : . \tag{3.28}$$

O comutador para os operadores α_{m-n} e α_n com $m \neq 0$, é

$$[\alpha_{m-n}, \alpha_n] = 0. \tag{3.29}$$

Então, quando $m \neq 0$ nós não precisamos do ordenamento normal. Portanto podemos colocar os operadores onde quiséramos. Os vínculos para L_0 e $\tilde{L}_0$ são,

$$L_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \frac{1}{2}\alpha_0^2 = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{L}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_0^2 = 0. \tag{3.30}$$

Em seguida, a ambiguidade se manifesta nas diferentes equações de vínculo que pudéramos impor.

$$(L_0 - a)\,|\phi\rangle = (\tilde{L}_0 - a)\,|\phi\rangle = 0. \tag{3.31}$$

A constante a é o resultado da ambiguidade.

Agora, como na teoria clássica aqui encontramos também o espectro de massa ao quadrado para a corda. Os operadores L_0 e $\tilde{L}_0$ são importantes porque estão relacionados com o momento ao quadrado $p^\mu p_\mu = p^2$. Os modos α_0 e $\tilde{\alpha}_0$ estão relacionados ao momento desta forma $\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \sqrt{\alpha'/2}p^\mu$. Usando a condição de *camada de massa* $p^\mu p_\mu = -M^2$, pode-se encontrar uma relação com os operadores. Em consequência esses operadores desempenham um papel muito importante no espectro da corda. Levando-se em conta a ambiguidade da ordem e a camada de massa (mass-shell), temos que,

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}\Big(-a + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n\Big) = \frac{4}{\alpha'}\Big(-a + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n\Big). \tag{3.32}$$

Daqui vemos que constante a tem um efeito físico para alterar o espectro de massa da corda. A condição de não existência de fantasmas em uma teoria da natureza, faz que a constante a e os campos escalares X^μ tenham um número fixo. O número para a constante a é 1 e o número de campos escalares X^μ é $D = 26$. O formalismo de quantização covariante pode-se consultar com mais detalhes no livro de Green, Schwarz e Witten [20, págs. 81–86]. Nós teremos que calcular o número de campos escalares (*dimensão crítica*) e a constante a através do formalismo da quantização do cone de luz na seção § 3.2.

O operador de Virasoro L_0 é

$$L_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n, \tag{3.33}$$

e L_0 também pode ser definido desta forma,

$$L_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n. \tag{3.34}$$

Portanto, fazendo alguns cálculos, temos que

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot \alpha_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \alpha_{-n}. \tag{3.35}$$

Daqui podemos chegar a uma forma interessante (para mais detalhes vide o apêndice C),

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \frac{D}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n. \tag{3.36}$$

Isso é o que procuramos. Da equação (3.36), nós olhamos o último termo da equação. Esta série diverge. Mas na história da física já se teve problemas parecidos. Por exemplo, no cálculo da energia de Casimir também se encontra esta série. O método de cálculo aqui é parecido com a energia de Casimir. Mais adiante apresentaremos dois métodos para calcular esta série.

3.2 Quantização no cone de luz

Pode-se ainda aproveitar as simetrias que tem a corda bosônica. Há uma simetria residual da corda (para mais detalhes vide [14, págs. 40–41]), que será útil para escolher o *calibre* *do cone de luz*. Quando se faz esta escolha é possível construir um espaço de Fock livre de fantasmas (estados como norma negativa). Mas a consequência desta escolha é a perda da invariância manifesta de Lorentz (o argumento desta seção pode-se encontrar em [15,23]).

Definimos as coordenadas do cone de luz,

$$X^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{D-1}). \tag{3.37}$$

O produto de dois vetores é,

$$v \cdot w = -v^+ w^- - v^- w^+ + \sum_i v^i w^i. \tag{3.38}$$

A regra para levantar e abaixar os índices é,

$$v^- = -v_+, \qquad v^+ = -v_-, \quad \text{e} \quad v^i = v_i \tag{3.39}$$

Uma vez que as coordenadas são tratadas diferentemente umas das outras, a invariância de Lorentz já não é manifesta. A solução da equação de movimento em coordenadas do cone de luz é,

$$X^+ = X_L^+(\sigma^+) + X_R^+(\sigma^-). \tag{3.40}$$

Agora, vamos escolher o calibre. Há liberdade de escolha de calibre pela invariância por reparametrização. Então fazendo a seguinte escolha,

$$X_L^+ = \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha' p^+ \sigma^+ \quad \text{e} \quad X_R^+ = \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha' p^+ \sigma^-. \tag{3.41}$$

Substituindo estas equações em (3.40) e sabendo que $\tau = \frac{1}{2}(\sigma^+ + \sigma^-)$, temos que,

$$X^+ = x^+ + \alpha' p^+ \tau, \tag{3.42}$$

este é o *calibre do cone de luz*. Aqui é feita a escolha $\alpha_n^+ = 0$ para $n \neq 0$. Quando fazemos esta escolha não covariante podem aparecer anomalias quânticas. No calibre de cone de luz são removidos os modos vibracionais de X^+.

É possível determinar os modos vibracionais de X^-. Os vínculos de Virasoro em coordenadas do cone de luz são,

$$(\dot{X} \pm X^{-\prime})^2 = 0, \tag{3.43}$$

e os vínculos no calibre do cone de luz são,

$$\dot{X}^- \pm X^{-\prime} = \frac{1}{2\alpha' p^+}(\dot{X}^i \pm X^{i\prime})^2. \tag{3.44}$$

Pode-se demostrar que a equação de movimento para X^+ é,

$$\partial_+\partial_- X^- = 0. \tag{3.45}$$

A solução geral para esta equação é,

$$X^- = X_L^-(\sigma^+) + X_R^-(\sigma^-). \tag{3.46}$$

Os vínculos em termos de $\sigma^\pm$ são,

$$(\partial_+ X)^2 = (\partial_- X)^2. \tag{3.47}$$

Daqui pode-se determinar totalmente X^-. Utilizamos o calibre do cone de luz, então temos,

$$\partial_+ X_L^- = \frac{1}{\alpha' p^+}\sum_{i=1}^{D-2} \partial_+ X^i \partial_+ X^i, \tag{3.48}$$

da mesma forma para

$$\partial_- X_L^- = \frac{1}{\alpha' p^+}\sum_{i=1}^{D-2} \partial_- X^i \partial_- X^i. \tag{3.49}$$

Até uma constante de integração, a função $X^-(\sigma^+, \sigma^-)$ é determinada em termos dos campos. Então pode-se escrever os campos para $X_{L/R}^-$ desta forma,

$$X_L^- = \frac{1}{2}x^- + \frac{1}{2}\alpha' p^- \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_n^- e^{-in\sigma^+}, \tag{3.50}$$

$$X_R^- = \frac{1}{2}x^- + \frac{1}{2}\alpha' p^- \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_n^- e^{-in\sigma^-}. \tag{3.51}$$

Aqui x^- é uma constante de integração indeterminada. Entanto p^-, α_n^- e $\tilde{a}_n^-$ são fixados pelos vínculos (3.48) e (3.49). Os modos de oscilação para α_n^- são,

$$\alpha_n^- = \sqrt{\frac{1}{2\alpha'}}\frac{1}{p^+}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{D-2}\alpha_{n-m}^i\alpha_m^i. \tag{3.52}$$

Um caso especial é $\alpha_0^- = \sqrt{\alpha'/2}p^-$,

$$\frac{\alpha' p^-}{2} = \frac{1}{2p^+}\sum_{i=1}^{D-2}\big(\frac{1}{2}\alpha' p^i p^i + \sum_{n\neq 0}\alpha_n^i\alpha_{-n}^i\big). \tag{3.53}$$

Também temos outras equações para p^-. Do vínculo (3.48), temos que,

$$\frac{\alpha' p^-}{2} = \frac{1}{2p^+}\sum_{i=1}^{D-2}\big(\frac{1}{2}\alpha' p^i p^i + \sum_{n\neq 0}\tilde{\alpha}_n^i\tilde{\alpha}_{-n}^i\big). \tag{3.54}$$

Usando os vínculos pode-se construir a condição da camada de massa,

$$M^2 = 2p^+p^- - \sum_{i=1}^{D-2}p^ip^i = \frac{4}{\alpha'}\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n>0}\alpha_{-n}^i\alpha_n^i = \frac{4}{\alpha'}\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n>0}\tilde{\alpha}_{-n}^i\tilde{\alpha}_n^i. \tag{3.55}$$

Daqui pode-se ver que a soma é de $i = 1, \ldots, D-2$. Estas são as oscilações transversais.

Vínculos

Há um problema quando vamos para a teoria quântica. Temos o problema de ambiguidade de ordem na condição de camada de massa (3.55). O mesmo problema que na quantização covariante. Então, temos a constante adicional a pela ambiguidade de ordem. Portanto os estados de massa no calibre do cone de luz são,

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}\frac{4}{\alpha}\big(\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n>0}\alpha_{-n}^i\alpha_n^i - a\big) = \frac{4}{\alpha'}\frac{4}{\alpha}\big(\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n>0}\bar{\alpha}_{-n}^i\bar{\alpha}_n^i - a\big). \tag{3.56}$$

Esta equação pode ser expressa com os operadores número da seguinte forma,

$$N = \sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n>0}\alpha_{-n}^i\alpha_n^i \quad \text{e} \quad \bar{N} = \sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n>0}\bar{\alpha}_{-n}^i\bar{\alpha}_n^i. \tag{3.57}$$

Então temos a equação (3.55) na forma mais simples,

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}(N-a) = \frac{4}{\alpha'}(\bar{N}-a). \tag{3.58}$$

Agora da condição da camada de massa (3.55), um resultado direito para uma teoria quântica é,

$$\frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\alpha^i_{-n}\alpha^i_n = \frac{1}{2}\sum_{n<0}\alpha^i_{-n}\alpha^i_n + \frac{1}{2}\sum_{n>0}\alpha^i_{-n}\alpha^i_n. \tag{3.59}$$

Note que não tomamos a ambiguidade de ordem para chegar a esta forma.

Daqui os operadores de aniquilação α^i_n com $n > 0$ são colocados no lado direito. Estamos fazendo um ordenamento dos operadores, tal que,

$$\frac{1}{2}\sum_{n<0}[\alpha^i_{-n}\alpha^i_n - n(D-2)] + \frac{1}{2}\sum_{n>0}\alpha^i_{-n}\alpha^i_n = \sum_{n>0}\alpha^i_{-n}\alpha^i_n + \frac{D-2}{2}\sum_{n>0} n. \tag{3.60}$$

Note que o último termo diverge. Podemos dar uma interpretação física como a soma da energia no ponto zero de infinitos osciladores. A forma de resolver isto pode-se encontrar na seção seguinte.

3.2.1 Regularização pelo método do corte

O último termo da equação (3.60) é uma série muito peculiar. Esta série diverge. Para dar um sentido físico a esta série usamos a regularização pelo método de corte,[2] onde será encontrado que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \to -\frac{1}{12}. \tag{3.61}$$

Esta série não é estranha na física. A série se apresenta em diferentes situações, por exemplo, ao tratar a energia do vácuo do efeito Casimir. A série (3.61), não converge. Porém, esta série pode ter um valor muito peculiar fazendo a regularização adequada. Este valor é $-\frac{1}{12}$. Há algumas formas de encontrar o resultado $-\frac{1}{12}$. Nesta seção para encontrar este *número* nós usamos a regularização pelo método do corte.

Então o que fazemos é substituir a soma (3.61) por outra soma que é regularizada (esta escolha pode-se ver no livro de Polchinski [32, pág. 22]).

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \to \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n\epsilon(\pi/2p^+\alpha' l)^{1/2}}.$$

[2] Este método é comentado brevemente em [25,32]. Para uma revisão do método no contexto da TQC aplicada ao efeito Casimir veja p.ex. [24].

Se $A = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n\epsilon(\pi/2p^{+}\alpha' l)^{1/2}}$, e $M = -\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\epsilon(\pi/2p^{+}\alpha' l)^{1/2}}$, agora diferenciando M com respeito de ϵ temos,

$$\frac{dM}{d\epsilon} = (\pi/2p^{+}\alpha' l)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n\epsilon(\pi/2p^{+}\alpha' l)^{1/2}},$$
$$\frac{dM}{d\epsilon} = (\pi/2p^{+}\alpha' l)^{1/2} A.$$

$$A = -\frac{1}{(\pi/2p^{+}\alpha' l)^{1/2}} \frac{d}{d\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\epsilon(\pi/2p^{+}\alpha' l)^{1/2}}. \tag{3.62}$$

Vamos, agora, nós concentrar no termo $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\epsilon(\pi/2p^{+}\alpha' l)^{1/2}}$ da equação (3.62). Fazemos uma mudança de variável, desta forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\epsilon(\pi/2p^{+}\alpha' l)^{1/2}} \to \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\lambda}.$$

onde $\lambda = \epsilon(\pi/2p^{+}\alpha' l)^{1/2}$.

Desenvolvendo a série, temos que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\lambda} = e^{-\lambda} + e^{-2\lambda} + e^{-3\lambda} + e^{-4\lambda} + \cdots$$

isso é uma série geométrica com razão $e^{-\lambda}$.

Então a soma do n-ésimo termo da série geométrica é,

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}, \qquad |r| < 1.$$

Esta soma só converge se e só se $\lambda > 0$. Nós precisamos da soma no infinito, então o termo r^n é muito pequeno e vai a zero para $n \to \infty$. A soma no infinito é aproximadamente igual a

$$S = \frac{a_1}{1 - r}.$$

Então a soma que nós queremos é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\lambda} = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Podemos substituir este resultado na equação (3.62). Portanto, temos que,

$$A = -\frac{1}{(\pi/2p^+\alpha' l)^{1/2}}\frac{d}{d\epsilon}\Big(\frac{e^{-\epsilon(\pi/2p^+\alpha' l)^{1/2}}}{1-e^{-\epsilon(\pi/2p^+\alpha' l)^{1/2}}}\Big). \tag{3.63}$$

É conveniente que, antes de efetuar a derivação indicada, exploremos o termo entre parênteses.

Definição 3.1. *O polinômios de Bernoulli $B_k(x)$ são definidos pela função geradora:*

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{k\in\mathbb{N}} B_k(x)\frac{t^k}{k!}. \tag{3.64}$$

A expressões explícitas dos polinômios de menor grau são, avaliados em $x = 1$,

$$B_0(1) = 1, \qquad B_1(1) = 1/2, \qquad B_2(1) = 1/6.$$

Na equação (3.64), avaliada em $x = 1$ fazemos uma pequena mudança,

$$\frac{e^t}{e^t-1} = \sum_{k\in\mathbb{N}} B_k(1)\frac{t^{k-1}}{k!}.$$

Portanto, a equação (3.63) pode-se escrever desta forma,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{(\pi/2p^+\alpha' l)^{1/2}}\frac{d}{d\epsilon}\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} B_k(1)\frac{t^{k-1}}{k!}\Big) \\ &= -\frac{\epsilon}{t}\frac{d}{d\epsilon}\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{B_k(1)}{k!}\frac{t^{k-1}}{k!}\Big) \\ &= -\frac{\epsilon}{t}\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{B_k(1)}{k!}\frac{d}{d\epsilon}t^{k-1}\Big) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{B_k(1)}{k!}(1-k)t^{k-2} \end{aligned} \tag{3.65}$$

onde $t = -\epsilon(\pi/2p^+\alpha' l)^{1/2}$.

Agora só temos que expandir (3.65). Então temos,

$$\begin{aligned} A &= B_0(1)t^2 + B_1(1) - \frac{B_2}{2!} + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &= \frac{1}{t^2} - \frac{1}{12} + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &= \frac{2p^+\alpha' l}{\epsilon^2\pi} - \frac{1}{12} + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \tag{3.66}$$

O primeiro termo diverge quando $\epsilon \to 0$, este termo tem que ser subtraído. Depois da renormalização temos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \to -\frac{1}{12} \tag{3.67}$$

3.2.2 Regularização pelo método da função Zeta

Existe uma função que pode ajudar-nos a encontrar um valor desta serie infinita. A função zeta de Riemann é definida como:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \Re(s) > 1, \tag{3.68}$$

onde s é um número complexo e $\Re$ denota só a parte real. Assim, está serie só converge para $\Re(s) > 1$ e nós podemos definir uma função analítica nesta região.

Fazendo a continuação analítica nós chegamos a uma forma diferente para a função Zeta[3], que é válida para $\Re(s) < 0$.

$$\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\pi^{-(1-s)/2}\zeta(1-s), \tag{3.69}$$

sabemos que $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\pi^{1/2}$ e $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Então a função zeta de Riemann para o valor $s = -1$ é,

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}. \tag{3.70}$$

Portanto, encontramos o valor da série que aparece no último termo das equações (3.36) e (3.60).

Agora vamos substituir este resultado na equação (3.36) que está relacionada com L_0. Então temos,

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}(N - a) = \frac{4}{\alpha'}(\tilde{N} - a). \tag{3.71}$$

De fato, agora nós podemos encontrar os comutadores dos operadores de Virasoro. Portanto, os comutadores são,

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{12}m(m^2+1)\delta_{m+n,0}. \tag{3.72}$$

[3] A continuação analítica está desenvolvida no livro *Mathematical Methods for Physicists*, de Arfken, Weber e Harris [26, págs. 626–629].

O termo adicional aparece quando quantizamos. Os operadores de Virasoro ajudam a eliminar os estados não físicos. Estamos falando de estados com norma negativa. Então, para eliminar os estados como norma negativa nós precisamos algumas condições. Destas condições surgem as dimensões extras na teoria de cordas.

Portanto, para eliminar estes estados com norma negativa nós precisamos que

$$a = 1, \qquad D = 26.$$

Da equação (3.60) e (3.71), nós temos

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}(N - a) = \frac{4}{\alpha'}(\tilde{N} - a) \equiv \sum_{n>0} \alpha^i_{-n}\alpha^i_n + \frac{D-2}{2}\sum_{n>0} n. \tag{3.73}$$

Daqui nós fazemos com ajuda da série $\sum_{n>0} n \to -\frac{1}{12}$

$$\begin{aligned} -a &= \frac{D-2}{2}\sum_{n>0} n \\ &= -\frac{D-2}{2}\frac{1}{12} \\ &= -\frac{D-2}{24}, \end{aligned}$$

portanto se $a = 1$ então $D = 26$, para ter uma teoria consistente.

Continuando, vamos primeiro obter o operador masa. Temos da condição de camada de masa,

$$p^\mu p_\mu + m^2 = 0, \tag{3.74}$$

desta equação nós temos,

$$m^2 = -p^\mu p_\mu. \tag{3.75}$$

Então, da relação,

$$(L_0 - a)\left|\phi\right\rangle = 0, \tag{3.76}$$

chegamos à seguinte expressão

$$(\frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}\cdot\alpha_n - a)\left|\phi\right\rangle = 0. \tag{3.77}$$

Então nós temos

$$\frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n - a = 0. \tag{3.78}$$

O primeiro termo da equação (3.78), é a massa ao quadrado,

$$\frac{1}{2}\alpha_0^2 = \alpha' M^2, \tag{3.79}$$

onde $\alpha' = \frac{1}{2\pi T}$. Portanto, a condição de camada de massa para cordas bosônicas abertas é,

$$\alpha' M^2 = (N - a), \tag{3.80}$$

ou também

$$\alpha' M^2 = \left(N - \frac{D-2}{24}\right). \tag{3.81}$$

Daqui, para ter $a = 1$, se precisa ter $D = 26$.

Para cordas fechadas pode-se fazer um cálculo similar. Então temos,

$$\frac{1}{4}\alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n - a = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-n} \cdot \bar{\alpha}_n - a = N - a = \bar{N} - a \tag{3.82}$$

Então agora para cordas abertas aplicamos o operador de massa $\alpha' M^2$ ao estado base,

$$\alpha' M^2 \left|0; k\right\rangle = (N - 1) \left|0\right\rangle = -1 \left|0; k\right\rangle. \tag{3.83}$$

O operador N atuando no estado fundamental é, $N \left|0; k\right\rangle = 0$.

Portanto, temos que para $N = 0$ a massa do estado fundamental é imaginária,

$$\alpha' M^2 = -1 \tag{3.84}$$

Os estados com massa negativa são chamados táquions. São estados não físicos, porque os táquions viajam mais rápido que a luz. Porém, os táquions não podem ser removidos da teoria por razões de consistência. Quando nós implementamos a supersimetria na teoria de cordas nós poderemos nós livrar dos táquions. Em consequência também teremos uma teoria mais em acordo com a realidade, porque também teremos férmions junto com os bósons.

Agora para $N = 1$, há um bóson vetorial $\alpha^i_{-1} |0; k\rangle$, estes estados não tem massa, $\alpha' M^2 = 0$. Nós vemos que há 24 estados, a importância destes estados está em que eles estão relacionados com os fótons.

Para $N = 2$, são os primeiros estados com massa, $\alpha' M^2 = 1$. Estes estados são $\alpha^i_{-2} |0; k\rangle$ e $\alpha^i_{-1}\alpha^j_{-1} |0; k\rangle$. Pode-se ver que temos 324 estados massivos.

O espectro de massas para cordas fechadas é construído aplicando o operador de massa (3.82). O estado fundamental $|0; k\rangle$ é outra vez um táquion, com massa $\alpha' M^2 = -4$.

Para $N = 1$ há 576 estados e o estado tem a forma de $|\Omega^{ij}\rangle = \alpha^i_{-1}\bar{\alpha}^j_{-1} |0; k\rangle$. Este estado corresponde ao produto tensorial de dois vetores sim massa. A parte simétrica e sem traço do tensor $|\Omega^{ij}\rangle$, transforma pelo grupo $SO(24)$ como uma partícula de spin 2, esta partícula é o *gráviton*. A parte antisimétrica de $|\Omega^{ij}\rangle$ é um escalar sem massa, chamado *dílaton*.

3.3 Teoria de campo conforme em $d = 2$

Nesta parte vamos estudar a teoria de campo conforme em duas dimensões (para mais referências vide [33]). A evolução temporal da corda gera uma superfície bidimensional no espaço-tempo. Esta superfície é a folha de mundo. A cada ponto na folha de mundo corresponde-lhe um ponto no espaço-tempo. A formulação da teoria de cordas envolve campos que residem na folha de mundo. A folha de mundo é invariante por reparametrização. Porém, a folha de mundo também é invariante pelas transformações conformes. A invariância conforme da folha de mundo é importante para prevenir os estados com probabilidade negativa (estados fantasmas).

Vamos trabalhar com uma métrica Euclidiana no espaço plano. Lembrando as transformações conformes da teoria de variáveis complexas, uma transformação conforme é uma aplicação de uma região do plano complexo para outra região nova. A transformação conforme preserva os ângulos mas não os comprimentos.

Definição 3.2. *Uma aplicação ϕ é chamada transformação conforme, se o tensor métrico satisfaz $\phi \cdot g' = \Lambda g$.*

Podemos expressar esta condição da seguinte forma,

$$g_{\rho\sigma}{}'(x') \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x). \tag{3.85}$$

Escrevendo de um forma mais geral,

$$\phi \cdot g_{\rho\sigma}{}'(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x). \tag{3.86}$$

Consideremos uma transformação de coordenadas infinitesimal, onde o parâmetro $\epsilon \ll 1$,

$$x'^{\rho} = x^{\rho} + \epsilon^{\rho}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.87}$$

Nós introduzimos a transformação infinitesimal (3.87) em nossa condição (3.85), e temos a seguinte restrição,

$$\partial_{\mu}\epsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\epsilon_{\mu} = \frac{2}{d}(\partial \cdot \epsilon)\eta_{\mu\nu}, \tag{3.88}$$

onde utilizamos a notação $\partial^{\mu}\epsilon_{\mu} = \partial \cdot \epsilon$. Também achamos que o fator de escala é,

$$\Lambda(x) = 1 + \frac{2}{d}(\partial \cdot \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.89}$$

Da condição (3.88), para transformações conformes infinitesimais em duas dimensões, $\mu, \nu = 0, 1$, nós temos,

$$\partial_0\epsilon_0 = \partial_1\epsilon_1, \qquad \partial_0\epsilon_1 = -\partial_1\epsilon_0. \tag{3.90}$$

Estas equações são as condições de Cauchy-Riemann. As funções ϵ_0 e ϵ_1 são complexas e holomorfas. Portanto, nós definimos as variáveis complexas da seguinte forma,

$$z = x^0 + ix^1 \qquad \epsilon = \epsilon^0 + i\epsilon^1 \qquad \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1), \tag{3.91}$$

$$\bar{z} = x^0 - ix^1 \qquad \bar{\epsilon} = \epsilon^0 - i\epsilon^1 \qquad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1). \tag{3.92}$$

Uma função holomorfa $f(z) = z + \epsilon(z)$ dá origem a uma transformação conforme $z \to f(z)$. Então o intervalo sob uma transformação conforme é como segue

$$ds^2 = dzd\bar{z} \to \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}dzd\bar{z}. \tag{3.93}$$

Onde o Jacobiano é o fator de escala $|\frac{\partial f}{\partial z}|^2$.

Em geral uma transformação conforme infinitesimal pode ser definida da seguinte forma,

$$z' = z + \epsilon(z), \qquad \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\epsilon}(x). \tag{3.94}$$

onde o $\epsilon(z)$ é holomorfa.

Podemos fazer uma expansão em série de Laurent em torno do ponto $z = 0$.

$$z' = z + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \epsilon_n(-z^{n+1}) \quad \text{e} \quad \bar{z}' = \bar{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{\epsilon}_n(-\bar{z}^{n+1}). \tag{3.95}$$

Os geradores destas transformações infinitesimais são,

$$l_n = -z^{n+1}\partial_z, \quad \text{e} \quad \bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}}. \tag{3.96}$$

Vemos que $n \in \mathbb{Z}$ e o número de transformações infinitesimais é infinito. Os comutadores destes geradores são os seguintes,

$$[l_m, l_n] = (m-n)l_{m+n}, \qquad [\bar{l}_m, \bar{l}_n] = (m-n)\bar{l}_{m+n}, \quad \text{e} \quad [l_m, \bar{l}_n] = 0. \tag{3.97}$$

O primeiro comutador é o bracket de Lie da álgebra de Witt. Esta álgebra permite uma extensão central que está em relacionada com a mecânica quântica. Portanto vamos denotar o elemento desta álgebra como L_n onde $n \in \mathbb{Z}$ e suas relações de comutação são

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}. \tag{3.98}$$

Também, podemos fazer o mesma mudança para $\bar{l}_n \to \bar{L}_n$. Enfim, a extensão central da álgebra de Witt é chamada álgebra de Virasoro e c é uma constante chamada carga central.

3.3.1 Transformações conforme em teoria das cordas

Uma teoria de campos conforme é uma teoria de campos quânticos que é invariante pelas transformações conformes. Na transformação conforme a escala não é mantida. Então, a teoria de campo conforme não tem escala de comprimento e não tem escala de massa. Estas características são importantes no desenvolvimento da teoria.

Agora nós aplicamos a teoria de campo conforme às cordas. Então fazemos uma mudança das coordenadas do cone de luz em coordenadas Euclideanas. Para fazer isso precisamos da rotação de Wick, onde se faz uma transformação na coordenada temporal de $t \to -it$. A rotação de Wick simplesmente faz uma mudança da métrica do cone de luz na métrica Euclidea. Agora pela rotação de Wick temos a mudança de coordenadas $(+,-)$ para $(z,\bar{z})$. As coordenadas z e $\bar{z}$ são definidas da seguinte maneira,

$$z = \tau + i\sigma \quad \text{e} \quad \bar{z} = \tau - i\sigma. \tag{3.99}$$

Imediatamente nós procuramos a ação de Polyakov com métrica Euclideana. Temos a ação de Polyakov,

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\tau d\sigma(\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu + \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu). \tag{3.100}$$

Agora temos que transformar a ação usando as transformações (3.99). Então, trocamos as coordenadas da seguinte forma,

$$\tau = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{z-\bar{z}}{2i}. \tag{3.101}$$

Daqui também encontramos as derivadas parciais

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\tau} - i\frac{\partial}{\partial\sigma}) \quad \text{e} \tag{3.102}$$

$$\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\tau} + i\frac{\partial}{\partial\sigma}). \tag{3.103}$$

Então a ação de Polyakov em coordenadas complexas é,

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2 z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu. \tag{3.104}$$

A nova ação de Polyakov é muito mais simples e podemos achar as equações de movimento clássicas da mesma forma que fizemos antes. Exigimos que a variação da ação seja zero, $\delta S = 0$. Daqui encontramos as equações de movimento clássicas,

$$\delta S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu (\bar{\partial}\delta X_\mu). \tag{3.105}$$

Em consequência de uma ação invariante nós achamos a equação de movimento

$$\partial\bar{\partial} X^\mu(z, \bar{z}) = 0. \tag{3.106}$$

3.4 Quantização BRST

Como já vimos antes, os métodos para quantizar as cordas tem ventagens e desvantagens. A quantização covariante mantém a invariância manifesta de Lorentz mas presenta estados fantasma. A quantização no cone de luz não apresenta estados fantasmas, não tem a invariância manifesta de Lorentz e a dimensionalidade crítica $d = 26$ é obtida com facilidade. Agora trataremos de outra forma a quantização das cordas.

Este método se chama quantização BRST (onde o BRST refere-se a Becchi, Rouet, Stora e Tyutin [27, 28]). A quantização BRST tem a invariância de Lorentz manifesta, mas também apresenta estados fantasmas. Os estados fantasma são fáceis de separar dos estados físicos. Este método quantiza uma teoria de campos com uma simetria de calibre.

Consideramos uma teoria de campos ϕ que tem uma simetria de calibre. As transformações de calibre satisfazem à álgebra,

$$[K_i, K_j] = f_{ij}{}^k K_k. \tag{3.107}$$

Para fazer a quantização BRST nós introduzimos os campos fantasma b_i e c_j que satisfazem as relações de anticomutação,

$$\{c^i, c^j\} = 0, \qquad \{b_i, b_j\} = 0 \quad \text{e} \quad \{c^i, b^j\} = \delta^i_j. \tag{3.108}$$

Estos campos são fermiônicos. Agora, podemos construir dois operadores com ajuda do campo K_i e dos campos fantasma b_i e c_j. O primeiro operador BRST é,

$$\mathcal{Q} = c^i K_i - \frac{1}{2} f_{ij}{}^k c^i c^j b_k. \tag{3.109}$$

O operador $\mathcal{Q}$ caracteriza-se por $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^\dagger$ e $\mathcal{Q}^2 = 0$. O operador $\mathcal{Q}$ é nilpotente.

O segundo operador BRST, é um operador composto só de campos fantasma. Este operador é chamado operador número fantasma U. É definido como

$$U = c^i b_i. \tag{3.110}$$

Este operador tem valores próprios inteiros,

$$U |\psi\rangle = m |\psi\rangle , \tag{3.111}$$

onde $m = 0 \ldots n$, são inteiros.

Um estado $|\psi\rangle$ é invariante BRST se o operador $\mathcal{Q}$ aniquila o estado , $\mathcal{Q} |\psi\rangle = 0$. Esses estados $|\psi\rangle$ invariantes são estados físicos da teoria.

Nós chamamos estado $|\psi\rangle$ nulo se,

$$|\psi\rangle = \mathcal{Q} |\chi\rangle . \tag{3.112}$$

Sabemos que $\mathcal{Q}^2 = 0$ (operador nilpotente), então temos que $\mathcal{Q} |\psi\rangle = \mathcal{Q}^2 |\chi\rangle = 0$. Se temos um estado físico arbitrário $|\varphi\rangle$, então achamos a amplitude com o estado nulo. Temos que,

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\varphi| (\mathcal{Q} |\chi\rangle) = (\langle\varphi| \mathcal{Q}) |\psi\rangle = 0.$$

A amplitude do estado nulo e o estado físico desaparecem.

Um estado físico $|\phi\rangle$ é equivalente a outro estado físico $|\phi'\rangle$, se é adicionado um estado nulo da seguinte forma,

$$|\phi'\rangle = |\phi\rangle + \mathcal{Q} |\chi\rangle .$$

A predição física não muda a teoria, porque as amplitudes não mudam.

O operador $\mathcal{Q}$ faz aumentar el número fantasma de um estado por 1. Se o número fantasma de $|\psi\rangle$ é m, então o número fantasma de $|\chi\rangle$ é $m-1$. Um caso importante são os estados $|\psi\rangle$ com número fantasma 0. Então, se o número fantasma é 0, temos que,

$$U\,|\psi\rangle = 0. \tag{3.113}$$

Observando a equação (3.113), implica que $b_k\,|\psi\rangle = 0$. O campo fantasma b_k aniquila o estado $|\psi\rangle$, mas o campo fantasma c^k não pode aniquilar o estado $|\psi\rangle$ por consistência.

A importância dos estados $|\psi\rangle$ com número fantasma zero é o seguinte. Observando a equação (3.109), sabemos que $b_k\,|\psi\rangle = 0$, então,

$$\mathcal{Q}\,|\psi\rangle = c^i K_i\,|\psi\rangle\,. \tag{3.114}$$

Esta equação implica que estados com número fantasma zero,

$$K_i\,|\psi\rangle = 0.$$

Daqui pode-se dizer que um estado com número fantasma zero é invariante BRST e também é invariante pela simetria descrita pelos geradores K_i. Além disso, se um estado $|\psi\rangle$ tem número fantasma igual a zero, então se diz que o estado $|\psi\rangle$ não é um estado fantasma. Portanto, evitamos os estados com norma negativa ou probabilidade negativa.

3.4.1 Quantização BRST das cordas

Aqui consideramos a quantização BRST através das transformações BRST que é derivado a partir do abordagem de caminho integral. Para mais detalhe pode-se ver [18, 20, 29].

Temos as transformações BRST expressas em termos das coordenadas do cone de luz.

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= i\epsilon(c^+\partial_+ + c^-\partial_-)X^\mu \\ \delta c^\pm &= \pm i\epsilon(c^+\partial_+ + c^-\partial_-)c^\pm \\ \delta b_{\pm\pm} &= \pm i\epsilon(T_{\pm\pm} + T^f_{\pm\pm}) \end{aligned} \tag{3.115}$$

A ação que contem os campos fantasma em coordenadas do cone de luz pode ser escritas como,

$$S_f = \frac{1}{\pi}\int d^2\epsilon(b_{++}\partial_- c^+ + b_{--}\partial_+ c^-). \tag{3.116}$$

Esta ação tem uma simetria pelas transformações BRST.

Agora, o tensor energia-momento fantasma $T^f_{\pm\pm}$, em componentes é dada por,

$$T^f{}_{++} = (2b_{++}\partial_+ c^+ + b_{--}\partial_+ c^+) \quad \text{e} \tag{3.117}$$

$$T^f{}_{--} = (2b_{--}\partial_- c^- + \partial_- b_{--}c^-). \tag{3.118}$$

O tensor de energia-momento conserva-se se,

$$\partial_- T^f{}_{++} = 0 \quad \text{e} \quad \partial_+ T^f{}_{--} = 0. \tag{3.119}$$

As equações de movimento dos campos fantasma são,

$$\partial_- b_{++} = \partial_+ b_{--} = \partial_- c^+ = \partial_+ c^- = 0. \tag{3.120}$$

Portanto, podemos expandir os campos fantasmas em modos de Fourier,

$$c^+ = \sum_n c_n e^{-in(\tau+\sigma)}, \qquad c^- = \sum_n \bar{c}_n e^{-in(\tau-\sigma)} \tag{3.121}$$

$$b_{++} = \sum_n b_n e^{-in(\tau+\sigma)}, \qquad b_{--} = \sum_n \bar{b}_n e^{-in(\tau-\sigma)} \tag{3.122}$$

onde c_n,$\bar{c}_n$,b_n e $\bar{b}_n$ são os coeficientes de Fourier.

Os modos de Fourier satisfazem às relações de anticomutação,

$$\{b_m, c_n\} = \delta_{m+n,0} \quad \text{e} \quad \{b_m, b_n\} = \{c_m, c_n\} = 0. \tag{3.123}$$

Os operadores de Virasoro associados aos campos fantasma são,

$$L^f_m = \sum_n (m-n) : b_{m+n}c_{-n} : \text{e} \tag{3.124}$$

$$\bar{L}^f_m = \sum_n (m-n) : \bar{b}_{m+n}\bar{c}_{-n} : \tag{3.125}$$

Daqui temos a álgebra de Virasoro para os campos fantasma,

$$[L_m^f, L_n^f] = (m-n)L_{m+n}^f + \frac{1}{6}(m - 13m^3)\delta_{m+n,0}. \tag{3.126}$$

Então os operadores de Virasoro para os campos X e os campos fantasma são,

$$L_m = L_m^X + L_m^f - a\delta_{m,0}, \tag{3.127}$$

a constante a do último termo do lado direito aparece por ordenamento normal para $m = 0$.

Portanto, a álgebra para o sistema total é,

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + A(m)\delta_{m+n}. \tag{3.128}$$

onde $A(m)$ é,

$$A(m) = \frac{D}{12}m(m^2-1) + \frac{1}{6}(m - 13m^3) + 2am \tag{3.129}$$

O termo $A(m)$ na equação (3.129), impede obter uma relação que preserva o álgebra clássica de Virasoro. Este termo é conhecido com uma *anomalia.* Para fazer que a anomalia desapareça, fazemos que $D = 26$ e $a = 1$. Esto é consistente com os outros resultados obtidos na seção precedente.

Capítulo 4

Teoria de Supercordas

As cordas bosônicas foram estudadas nos capítulos anteriores. O espectro das cordas fechadas apresenta um táquion. Os táquions são não físicos, eles representam uma instabilidade do vácuo. Também, as cordas bosônicas não representam o universo observável. O espectro das cordas bosônicas (fechadas e abertas) não tem férmions. Os férmions são importantes, porque os quarks e léptons do modelo padrão são férmions. Para ter uma teoria de acordo com a natureza se precisa de férmions. Uma forma de incluir os férmions é através da supersimetria. A supersimetria relaciona férmions com bósons (bósons com férmions). A teoria de cordas com supersimetria chama-se teoria de supercordas. Existem maneiras diferentes de incorporar a supersimetria em cordas[1]. Aqui duas abordagens são apresentadas: O formalismo de Ramond-Neveu-Schwarz (RNS) e o formalismo de Green Schwarz (GS).

Neste capítulo se estuda de uma forma breve os conceitos básicos da supersimetria. Em seguida, é feito um estudo da supersimetria na folha do mundo da corda (formalismo RNS), depois é feita a quantização neste abordagem. Finalmente se estuda a supersimetria no espaço-tempo de Minkowski em 10 dimensões (formalismo GS).

[1]Nathan Berkovits propôs um novo formalismo em 1999, o novo formalismo é chamado Espinores Puros.

4.1 Supersimetria

O modelo mais simples que é conhecido, é o modelo de Wess-Zumino [30]. Este modelo é simples, mas serve para entender a supersimetria na física. O primeiro modelo supersimétrico que é compatível com o modelo padrão foi enunciado por Howard Georgi e Savas Dimopoulos em 1981, e é chamado Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo (MSSM) [31].

Em seguida nós desenvolveremos uma supersimetria para cordas. A ação para a corda bosônica está relacionada a uma teoria de campos em duas dimensões, formulada num espaço bidimensional (a folha de mundo). Uma ação necessária para desenvolver uma teoria de cordas com supersimetria na folha do mundo, precisa de coordenadas na folha do mundo σ^α e duas coordenadas associadas θ^A. A coordenada θ^A é uma variável de Grassmann que compreende de um espinor de Majorana de duas componentes.

Definição 4.1 (**Superespaço**). *O superespaço $\hat{\Sigma}$ é uma variedade em duas dimensões, de coordenadas σ^α e θ^A onde,*

$$\{\theta^A, \theta^B\} = 0, \tag{4.1}$$

θ^A é uma variável de Grassmann.

Definição 4.2 (**Supercampo**). *A função Y^μ num superespaço $\hat{\Sigma}$ será definido por,*

$$Y^\mu(\sigma, \theta) = X^\mu(\sigma) + \bar{\theta}\psi^\mu(\sigma) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta B^\mu(\sigma). \tag{4.2}$$

O gerador de supersimetria é

$$Q_A = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^A} + i(\rho^\alpha\theta)_A\partial_\alpha. \tag{4.3}$$

É conveniente introduzir um parâmetro arbitrário ϵ_A que anticommuta. Também, é adequado trabalhar com $\bar{\epsilon}Q$. Os geradores de transformação são:

$$\delta\theta^A = [\bar{\epsilon}Q, \theta^A] = \epsilon^A \quad \text{e} \tag{4.4}$$

$$\delta\sigma^\alpha = [\bar{\epsilon}Q, \sigma^\alpha] = i\bar{\epsilon}\rho^\alpha\theta. \tag{4.5}$$

Estas equações são transformações das coordenadas do superespaço. Também, pode-se definir a transformação do supercampo de acordo com,

$$\delta Y^\mu = [\bar{\epsilon}Q, Y^\mu] = \bar{\epsilon}QY^\mu. \tag{4.6}$$

Proposição 4.3. *O supercampo (4.2) se transforma de acordo com as seguintes equações de transformação,*

$$\begin{aligned}
\delta X^\mu &= \bar{\epsilon}\psi^\mu, \\
\delta\psi^\mu &= -i\rho^\alpha\epsilon\partial_\alpha X^\mu + B^\mu\epsilon, \\
\delta B^\mu &= -i\bar{\epsilon}\rho^\alpha\partial_\alpha\psi^\mu.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Demonstração. Para fazer esta demonstração precisamos de uma das identidades de Fierz

$$\theta_A\bar{\theta}_B = -\frac{1}{2}\delta_{AB}\bar{\theta}_C\theta_C, \tag{4.8}$$

sabendo que $\theta_A = \theta^A$.

Começamos com a transformação do supercampo (4.6),

$$\begin{aligned}
\bar{\epsilon}^A Q_A Y^\mu &= \bar{\epsilon}^A\Big(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^A} + i(\rho^\alpha\theta)_A\partial_\alpha\Big)(X^\mu(\sigma) + \bar{\theta}^B\psi^\mu_B + \frac{1}{2}\bar{\theta}^B\theta_B B^\mu(\sigma)) \\
&= \bar{\epsilon}^A\psi^\mu_A + \bar{\epsilon}^A\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^A}(\frac{1}{2}\bar{\theta}^B\theta_B)B^\mu + i\bar{\epsilon}^A(\rho^\alpha\theta)_A\partial_\alpha X^\mu + i\bar{\epsilon}^A(\rho^\alpha\theta)_A\bar{\theta}^B\partial_\alpha\psi^\mu_B \\
&= \bar{\epsilon}^A\psi^\mu_A + \bar{\epsilon}^A\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^A}(-\theta_A\bar{\theta}_B)B^\mu - i\bar{\theta}_A\rho^\alpha\epsilon^A\partial_\alpha X^\mu - i\bar{\theta}_A\rho^\alpha\epsilon^A\bar{\theta}^B\partial_\alpha\psi^\mu_B \\
&= \bar{\epsilon}^A\psi^\mu_A + \bar{\epsilon}^A\theta_A B^\mu - i\bar{\theta}_A\rho^\alpha\epsilon^A\partial_\alpha X^\mu - i\bar{\theta}_A\rho^\alpha\theta^B\epsilon^A\partial_\alpha\psi^\mu_B \\
&= \bar{\epsilon}^A\psi^\mu_A + \bar{\theta}^A\epsilon_A B^\mu - i\bar{\theta}_A\rho^\alpha\epsilon^A\partial_\alpha X^\mu - i\bar{\theta}_A\theta^B\rho^\alpha\epsilon^A\partial_\alpha\psi^\mu_B \\
&= \bar{\epsilon}^A\psi^\mu_A + \bar{\theta}^A(-i\rho^\alpha\epsilon_A\partial_\alpha X^\mu + \epsilon_A B^\mu) + \frac{1}{2}\bar{\theta}_C\theta_C(-i\rho^\alpha\epsilon^C\partial_\alpha\psi^\mu_C) \\
\delta Y^\mu &= \delta X^\mu(\sigma) + \bar{\theta}\delta\psi^\mu_A(\sigma) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\delta B^\mu(\sigma).
\end{aligned}$$

Assim, demonstra-se que as transformações (4.7) propostas são verdadeiras. □

Proposição 4.4. *A ação com supersimetria manifesta é,*

$$S = \frac{i}{4\pi}\int d^2\sigma d^2\theta\bar{D}Y^\mu DY^\mu, \tag{4.9}$$

onde D é a derivada covariante,

$$D_A = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^A} + (\rho\theta)_A \partial_\alpha. \tag{4.10}$$

Demonstração. Só se multiplica $\bar{D}Y^\mu$ com DY_μ e substituímos em (4.9). Note que $d\theta^2 = d\theta\bar{\theta}$. Aqui utilizamos a integração de variáveis de Grasmmann.

$$\int d\bar{\theta}\bar{\theta} = 1, \qquad \int d\theta\bar{\theta}\theta = -2 \quad \text{e} \quad \int d\theta(a + \theta b) = b.$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{i}{4\pi} \int d^2\sigma d^2\theta \bar{D}Y^\mu DY_\mu \\ &= \frac{i}{4\pi} \int d^2\sigma d^2\theta (-\bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu \bar{\theta}\theta + B^\mu B_\mu \bar{\theta}\theta - \bar{\theta}\rho^\alpha \partial_\alpha X^\mu \rho^\beta \theta \partial_\beta X_\mu) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma d^2\theta (\partial_\alpha X_\mu \partial^\alpha X_\mu + \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu - B_\mu B^\mu) \end{aligned}$$

Esta é a ação que precisamos para desenvolver nossa teoria de supercordas. □

4.2 Formulação das supercordas de Ramond-Neveu-Schwarz

Aqui tratamos a supersimetria na folha de mundo [7, 8]. As coordenadas do espaço-tempo (campo bosônico) $X^\mu(\sigma, \tau)$ estão associadas a um parceiro (fermiônico) $\psi^\mu(\sigma, \tau)$. O campo $\psi^\mu(\sigma, \tau)$ é um espinor de duas componentes na folha de mundo e é um vetor pelas transformações de Lorentz num espaço-tempo de D-dimensões. Mostramos que uma ação com supersimetria [2] $\mathcal{N} = 1$ fornece uma teoria de cordas com dimensão $D = 10$. É preciso o mecanismo GSO (proposto por Gliozzi, Sherk e Olive [9]) para truncar o espectro e obter o mesmo número de estados bosônicos e fermiônicos. O processo desta parte pode ser encontrada em [20].

[2] A supersimetria estendida na folha de mundo para $\mathcal{N} = 2$ leva à dimensão crítica $D = 2$, e uma supersimetria $\mathcal{N} = 4$ conduz a uma dimensão crítica negativa.

4.2.1 Ação da corda supersimétrica

Sabemos que a dinâmica da corda gera uma região no espaço-tempo. Esta região é chamada folha do mundo. O requerimento do movimento clássico da corda é que a região da folha do mundo seja mínima. Então, temos a ação de Polyakov da corda bosônica,

$$S_{bos} = -\frac{1}{2}\int d^2\sigma\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}(\sigma)g_{\mu\nu}(X)\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu. \tag{4.11}$$

onde as funções $X^\mu(\tau,\sigma)$ com $\mu = 0,\ldots,D-1$, definem um mapeamento da folha do mundo no espaço-tempo de dimensão D. As variáveis $\sigma^0 = \tau$ e $\sigma^1 = \sigma$ parametrizam a folha do mundo e $h_{\alpha\beta}$ com $\alpha,\beta = 0,1$, é a métrica induzida da folha do mundo, $h = det(h_{\alpha\beta})$ e $h^{\alpha\beta} = (h^{-1})_{\alpha\beta}$. A métrica $g_{\mu\nu}$ descreve o espaço-tempo curvo. Porém, pode-se fazer uma fixação de calibre para ter uma métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ num espaço-tempo plano.

Precisamos de uma teoria de cordas com bósons e férmions. Nesta parte é estudado o formalismo Ramond-Neveu-Schwarz. Se generaliza a ação bosônica (4.11). Portanto, são introduzidos os campos fermiônicos $\psi^\mu(\tau,\sigma)$, os quais são espinores de Majorana[3] de duas componentes na folha do mundo e vetores pelas transformações de Lorentz no espaço-tempo.

Então, a ação[4] geral com parte bosônica e parte fermiônica é,

$$S = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma(\partial_\alpha X^\mu\partial^\alpha X_\mu - i\bar{\psi}^\mu\rho^\alpha\partial_\alpha\psi_\mu). \tag{4.12}$$

onde $\bar{\psi} = \psi^\dagger\rho^0$. As matrizes ρ^α, com $\alpha = 0,1$ são matrizes de Dirac em duas dimensões.

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

[3]Os espinores de Majorana simplesmente indicam que as componentes de ψ são reais para a representação do álgebra de Dirac ($\psi^\dagger = \psi^T$).

[4]No livro de Becker, Becker e Schwarz tem definida uma ação da forma

$$S = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma(\partial_\alpha X^\mu\partial^\alpha X_\mu + \bar{\psi}^\mu\rho^\alpha\partial_\alpha\psi_\mu)$$

As matrizes de Dirac têm a propriedade,

$$\{\rho^\mu, \rho^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}, \tag{4.14}$$

onde $\{\ ,\ \}$ é o anticomutador.

As componentes de ψ^μ são números de Grassmann, e têm a propriedade,

$$\{\psi^\mu, \psi^\nu\} = 0. \tag{4.15}$$

Para dois férmions quasquer ψ e χ têm-se a seguintes propriedades,

$$\begin{aligned} \bar{\chi}\psi &= \bar{\psi}\chi, \\ \bar{\chi}\rho^\alpha\psi &= -\bar{\psi}\rho^\alpha\chi, \end{aligned} \tag{4.16}$$

Proposição 4.5 **(Supersimetria).** *A ação 4.12, é invariante pelas transformações supersimétricas,*

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \bar{\epsilon}\psi^\mu = \bar{\psi}^\mu\epsilon, \\ \delta\psi^\mu &= -i\rho^\alpha\partial_\alpha X^\mu\epsilon, \\ \delta\bar{\psi}^\mu &= i\bar{\epsilon}\rho^\alpha\partial_\alpha X^\mu. \end{aligned} \tag{4.17}$$

onde ϵ é um espinor infinitesimal constante, cujas componentes são números de Grassmann. Estas transformações mudam campos bosônicos em campos fermiônicos e vice-versa.

Demonstração. A variação da ação (4.12) tem que ser zero ($\delta S = 0$), usando as propriedades (4.16), nós temos.

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma(2\partial_\alpha\delta X^\mu\partial^\alpha X_\mu - i\delta\bar{\psi}^\mu\rho^\alpha\partial_\alpha\psi_\mu - i\bar{\psi}^\mu\rho^\alpha\partial_\alpha\delta\psi_\mu) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma(\bar{\epsilon}2\partial_\alpha\psi^\mu\partial^\alpha X_\mu - i\delta\bar{\psi}^\mu\rho^\alpha\partial_\alpha\psi_\mu + i\partial_\alpha\delta\bar{\psi}_\mu\rho^\alpha\psi^\mu) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma(\bar{\epsilon}2\partial_\alpha\psi^\mu\partial^\alpha X_\mu + \bar{\epsilon}\rho^\beta\partial_\beta X^\mu\rho^\alpha\partial_\alpha\psi_\mu - \bar{\epsilon}\rho^\beta\rho^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta X^\mu\psi_\mu) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\bar{\epsilon}(2\partial_\alpha\psi^\mu\partial^\alpha X_\mu + \rho^\beta\rho^\alpha\partial_\beta X^\mu\partial_\alpha\psi_\mu - \rho^\beta\rho^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta X^\mu\psi_\mu) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\bar{\epsilon}(2\partial_\alpha\psi^\mu\partial^\alpha X_\mu + \partial_\alpha(\rho^\beta\rho^\alpha\partial_\beta X^\mu\psi_\mu) - 2\rho^\beta\rho^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta X^\mu\psi_\mu). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Agora fazemos o seguinte,

$$\begin{aligned}\rho^\beta\rho^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta &= \frac{1}{2}(\rho^\beta\rho^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta + \rho^\beta\rho^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta)\\ &= \frac{1}{2}(\rho^\beta\rho^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta + \rho^\alpha\rho^\beta\partial_\beta\partial_\alpha)\\ &= \frac{1}{2}(\rho^\beta\rho^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta + \rho^\alpha\rho^\beta\partial_\alpha\partial_\beta)\\ &= \frac{1}{2}(\rho^\beta\rho^\alpha + \rho^\alpha\rho^\beta)\partial_\alpha\partial_\beta\\ &= \frac{1}{2}\{\rho^\beta,\rho^\alpha\}\partial_\alpha\partial_\beta\\ &= -\partial_\alpha\partial^\alpha. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Consequentemente, substituindo a equação (4.19) em (4.18), temos que,

$$\delta S = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\bar{\epsilon}(2\partial_\alpha\psi^\mu\partial^\alpha X_\mu + \partial_\alpha(\rho^\beta\rho^\alpha\partial_\beta X^\mu\psi_\mu) - 2\rho^\beta\rho^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta X^\mu\psi_\mu) \tag{4.20}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\bar{\epsilon}(2\partial_\alpha\psi^\mu\partial^\alpha X_\mu + \partial_\alpha(\rho^\beta\rho^\alpha\partial_\beta X^\mu\psi_\mu) + 2\partial_\alpha\partial^\alpha X^\mu\psi_\mu) \tag{4.21}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\bar{\epsilon}(\partial_\alpha(2\psi^\mu\partial^\alpha X_\mu) + \partial_\alpha(\rho^\beta\rho^\alpha\partial_\beta X^\mu\psi_\mu)) \tag{4.22}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\bar{\epsilon}\partial_\alpha(2\psi^\mu\partial^\alpha X_\mu + \rho^\beta\rho^\alpha\partial_\beta X^\mu\psi_\mu). \tag{4.23}$$

Daqui a integração das derivadas totais podem ser tratadas com as condições de contorno, portanto se demostra que $\delta S = 0$. $\square$

Agora é calculada a supercorrente J^α que é consequência das transformações de supersimetria. Calcula-se a variação da ação (4.12). Então, obtêm-se

$$\delta S = -\frac{2}{\pi}\int d^2\sigma\partial_\alpha\bar{\epsilon}J^\alpha \tag{4.24}$$

onde a supercorrente é,

$$J^\alpha = \frac{1}{2}\rho^\beta\rho^\alpha\psi^\mu\partial_\beta X_\mu. \tag{4.25}$$

Então, obtemos o tensor energia-momento,

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu + \frac{1}{4}\bar{\psi}^\mu\rho_\alpha\partial_\beta\psi_\mu + \frac{1}{4}\bar{\psi}^\mu\rho_\beta\partial_\alpha\psi_\mu. \tag{4.26}$$

É melhor definir as coordenadas do cone de luz,

$$\sigma^{\pm} = \tau \pm \sigma, \tag{4.27}$$

$$\partial_{\pm} = \partial_{\tau} \pm \partial_{\sigma}. \tag{4.28}$$

A métrica em coordenadas do cone de luz é

$$\begin{pmatrix} \eta_{++} & \eta_{+-} \\ \eta_{-+} & \eta_{--} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

Nestas coordenadas temos,

$$\rho^{+} = \rho^{0} + \rho^{1}, \qquad \rho^{-} = \rho^{0} - \rho^{1}. \tag{4.30}$$

$$\rho_{+} = \eta_{+-}\rho^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_{-} = \eta_{-+}\rho^{+} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

Portanto, a condição do traço de tensor energia-momento igual a zero, toma a forma $T_{+-} = 0$ e $T_{-+} = 0$. Então, o tensor energia-momento e a supercorrente são,

$$T_{++} = \partial_{+}X^{\mu}\partial_{+}X_{\mu} = \frac{i}{2}\psi_{+}^{\mu}\partial_{+}\psi_{+\mu}, \tag{4.32}$$

$$T_{--} = \partial_{-}X^{\mu}\partial_{-}X_{\mu} = \frac{i}{2}\psi_{-}^{\mu}\partial_{-}\psi_{-\mu}, \tag{4.33}$$

$$J_{+} = \psi_{+}^{\mu}\partial_{+}X_{\mu}, \tag{4.34}$$

$$J_{-} = \psi_{-}^{\mu}\partial_{-}X_{\mu}. \tag{4.35}$$

4.2.2 Condições de fronteira

Campos bosônicos

As equações de movimento para os campos bosônicos são obtidas fazendo a variação de (4.12) com respeito a X^{μ}. Então temos,

$$\partial_{\alpha}\partial^{\alpha}X^{\mu} = 0. \tag{4.36}$$

Em coordenadas do cone de luz, pode-se escrever,

$$\partial_{-}\partial^{+}X^{\mu} = 0. \tag{4.37}$$

As soluções das cordas bosônicas já foram encontradas na seção § 2.4. Para cordas fechadas temos,

$$X_R^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}p^\mu(\tau-\sigma) + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)} \quad \text{e} \tag{4.38}$$

$$X_L^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}p^\mu(\tau+\sigma) + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\bar{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)}. \tag{4.39}$$

A solução total é,

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu + p^\mu\tau + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(\alpha_n^\mu e^{2in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-2in\sigma}). \tag{4.40}$$

Para cordas abertas temos,

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu + p^\mu\tau + i\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-in\tau}\cos n\sigma. \tag{4.41}$$

onde $\alpha_0^\mu = p^\mu$. Os modos esquerdo e direito se misturam para formar ondas estacionárias.

Campos fermiônicos

Utilizando as coordenadas do cone de luz, na parte fermiônica da ação (4.12) escreve-se da seguinte maneira [20],

$$S_{ferm} = \frac{i}{\pi}\int d^2\sigma(\psi_+\partial_-\psi_+ + \psi_-\partial_+\psi_-), \tag{4.42}$$

onde o campo fermiônico é

$$\psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi_-^\mu \\ \psi_+^\mu \end{pmatrix}. \tag{4.43}$$

A variação da ação (4.42) em relação a ψ é,

$$\delta S_{ferm} = \frac{i}{\pi}\int d^2\sigma(2\delta\psi_-\partial_+\psi_- + 2\delta\psi_+\partial_-\psi_+ - \partial_+(\delta\psi_-\psi_-) - \partial_-(\delta\psi_+\psi_+)). \tag{4.44}$$

Portanto, as equações de movimento para os campos fermiônicos são,

$$\partial_+\psi_- = 0 \quad \text{e} \quad \partial_-\psi_+ = 0, \tag{4.45}$$

com condições na fronteira,

$$\left(\psi_- \delta\psi_- - \psi_+ \delta\psi_+\right)\Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} = 0. \tag{4.46}$$

Para a corda aberta estas condições são satisfeitas com,

$$\psi_+^\mu = \pm\psi_-^\mu \quad \text{e} \quad \sigma = 0, \pi. \tag{4.47}$$

Para $\sigma = 0$, pode-se fazer a escolha,

$$\psi_+^\mu(\tau, 0) = \psi_-^\mu(\tau, 0). \tag{4.48}$$

Agora para $\psi = \pi$ é preciso considerar dois casos. A condição na fronteira de Ramond e a condição na fronteira de Neveu-Schwarz.

Condição na fronteira de Ramond (Periódica)

Para a condição na fronteira de Ramond (R) a condição utilizada é,

$$\psi_+^\mu(\tau, \pi) = \psi_-^\mu(\tau, \pi). \tag{4.49}$$

A expansão dos modos de oscilação para os campos fermiônicos é,

$$\psi_-^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau - \sigma)} \quad \text{e} \tag{4.50}$$

$$\psi_+^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau + \sigma)}. \tag{4.51}$$

A soma é sobre todos os n inteiros.

Condições na fronteira de Neveu-Schwarz (Antiperiódica)

Para a condição na fronteira de Neveu-Schwarz (NS) é feita a escolha,

$$\psi_+^\mu(\tau, \pi) = -\psi_-^\mu(\tau, \pi). \tag{4.52}$$

A expansão dos modos de oscilação são,

$$\psi_-^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} b_r^\mu e^{-ir(\tau - \sigma)} \quad \text{e} \tag{4.53}$$

$$\psi_+^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2} b_r^\mu e^{-ir(\tau+\sigma)}. \tag{4.54}$$

A soma é feita sobre todos os r semi-inteiros.

Para as cordas fechadas pode-se fixar condições na fronteira periódicas ou antiperiódicas para os modos esquerdo e direito da forma independente. Portanto, tem-se o seguinte,

$$\psi_-^\mu(\tau,\sigma) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)} \quad \text{ou} \tag{4.55}$$

$$\psi_-^\mu(\tau,\sigma) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2} b_r^\mu e^{-2ir(\tau-\sigma)}, \tag{4.56}$$

para os movimentos para direita; e

$$\psi_+^\mu(\tau,\sigma) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{d}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)} \quad \text{ou} \tag{4.57}$$

$$\psi_+^\mu(\tau,\sigma) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2} \bar{b}_r^\mu e^{-2ir(\tau+\sigma)}, \tag{4.58}$$

para os movimentos para esquerda.

Correspondente aos diferentes emparelhamentos das cordas que se movimentam para a esquerda e para direita, há quatro setores para a corda fechada. Nos referimos a esses setores como: NS-NS, NS-R, R-NS e R-R. O primeiro e último caso descrevem os bósons e os dois restantes descrevem os férmions.

Os geradores de super-Virasoro para cordas abertas são,

$$L_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\sigma(e^{im\sigma}T_{++} + e^{-im\sigma}T_{--}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi d\sigma e^{im\sigma}T_{++}. \tag{4.59}$$

Agora os geradores de super-Virasoro fermiônicos, se definem;

$$F_m = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi d\sigma(e^{im\sigma}J_+ + e^{-im\sigma}J_-) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\pi}^\pi d\sigma e^{im\sigma}J_+, \tag{4.60}$$

para o caso de condições de fronteira R; e

$$G_r = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi d\sigma(e^{ir\sigma}J_+ + e^{-ir\sigma}J_-) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\pi}^\pi d\sigma e^{ir\sigma}J_+, \tag{4.61}$$

para o caso de condições de fronteira NS.

4.2.3 Quantização covariante

O momento associado a X^μ é,

$$P^\mu(\tau,\sigma) = \frac{\delta S}{\delta \dot{X}_\mu} = \frac{1}{\pi}\dot{X}^\mu. \tag{4.62}$$

As relações de comutação canônicas para X^μ e P^μ são

$$[X^\mu(\tau,\sigma), X^\nu(\tau,\sigma')] = [P^\nu(\tau,\sigma), P^\mu(\tau,\sigma')] = 0, \tag{4.63}$$

$$[X^\mu(\tau\sigma), P^\nu(\tau,\sigma')] = i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma'). \tag{4.64}$$

Daqui pode-se calcular as relações de comutação para os coeficientes de Fourier

$$[\alpha^\mu_m, \alpha^\nu_n] = m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}. \tag{4.65}$$

Estas são as relações de comutação válidas para cordas fechadas e abertas. Porém, as cordas fechadas precisam de uma relação de comutação a mais

$$[\bar{\alpha}^\mu_m, \bar{\alpha}^\nu_n] = m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}. \tag{4.66}$$

Os modos de expansão α^μ_m são para cordas abertas e fechadas. Os modos de expansão $\bar{\alpha}^\mu_m$ só são para cordas fechadas.

Agora as relações de anti-comutação para as coordenadas fermiônicas ψ^μ_A são,

$$\{\psi^\mu_A(\tau,\sigma), \psi^\nu_B(\tau,\sigma')\} = \pi\delta(\sigma-\sigma')\eta^{\mu\nu}\delta_{AB}. \tag{4.67}$$

Isto implica que os modos de expansão b^μ_r e d^μ_n, satisfazem as seguintes relações de anticomutação,

$$\{b^\mu_r, b^\nu_s\} = \eta^{\mu\nu}\delta_{r+s} \quad \text{e} \tag{4.68}$$

$$\{d^\mu_n, d^\nu_m\} = \eta^{\mu\nu}\delta_{n+m}. \tag{4.69}$$

Estas são relações de anticomutação para cordas abertas e cordas fechadas direitas (right-moving). Porém, também se precisa de relações de anticomutação para os modos $\bar{b}^\mu_r$ e $\bar{d}^\mu_n$ da corda fechada esquerda (left-moving), mas só explicaremos para um caso.

Agora definem-se os estados fundamentais $|0;p\rangle$ como,

$$\alpha_m^\mu |0;p\rangle = d_m^\mu |0;p\rangle, \qquad m > 0 \tag{4.70}$$

$$\alpha_m^\mu |0;p\rangle = b_r^\mu |0;p\rangle, \qquad m, r > 0. \tag{4.71}$$

Uma aplicação dos operadores de criação α_{-m}^μ o d_{-m}^μ aumenta ou autovalor de $\alpha' M^2$ por m unidades. De mesma forma para b_{-r}^μ aumenta $\alpha' M^2$ por r unidades.

Supergeradores de Virasoro

A expanção em séries de Fourier das componentes do tensor energia-momento são dadas por,

$$T_{++} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n e^{-in(\tau+\sigma)} \quad \text{e} \tag{4.72}$$

$$T_{--} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n e^{-in(\tau-\sigma)}, \tag{4.73}$$

onde, os coeficientes de Fourier L_n são os supergeradores de Virasoro dados por,

$$L_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\sigma (e^{im\sigma}T_{++} + e^{-im\sigma}T_{--}) = L_m^{(bos)} + L_m^{(fer)}. \tag{4.74}$$

Como já vimos antes, na teoria quântica os operadores definem-se com ordenamento normal,

$$L_m^{(bos)} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n}\cdot\alpha_{m+n} : . \tag{4.75}$$

Das relações de comutação α_{m+n} e α_{-n} comutam para $m \neq 0$. Então o ordenamento normal só é importante para L_0.

Os supergeradores de Virasoro para a parte fermiônica dependem do setor. No setor NS temos

$$L_m^{(fer)} = \frac{1}{2}\sum_{r=-\infty}^{\infty} (r + \frac{1}{2}m) : b_{-r}\cdot b_{m+r} :, \tag{4.76}$$

onde r é semi-inteiro.

O supergerador fermiônico (4.61) é,

$$G_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n}\cdot b_{r+n}. \tag{4.77}$$

O operador número N é,

$$N = N^{\alpha} + N^{b}, \tag{4.78}$$

onde,

$$N^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_{n} \quad \text{e} \tag{4.79}$$

$$N^{b} = \sum_{r=1/2}^{\infty} r b_{-r} \cdot b_{r}. \tag{4.80}$$

A super-álgebra de Virasoro no setor NS são,

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + A(m)\delta_{m+n}, \tag{4.81}$$

$$[L_m, G_r] = \big(\frac{1}{2}m - r\big)G_{m+r}, \tag{4.82}$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + B(m)\delta_{r+s}. \tag{4.83}$$

onde,

$$A(m) = \frac{1}{8}D(m^3 - m), \tag{4.84}$$

$$B(m) = \frac{1}{2}D\big(r^2 - \frac{1}{4}\big). \tag{4.85}$$

Aqui $A(m)$ e $B(m)$ são termos das anomalias. Em cordas bosônicas também se tratou este tipo de termo.

Se requer que os estados físicos bosônicos $|\phi\rangle$ de acordo com as equações de vínculo, tem que satisfazer,

$$G_r\,|\phi\rangle = 0, \qquad r > 0 \tag{4.86}$$

$$L_m\,|\phi\rangle = 0, \qquad m > 0 \tag{4.87}$$

$$(L_0 - a)\,|\phi\rangle = 0. \tag{4.88}$$

Aqui por razões de consistência $a = \frac{1}{2}$.

O operador L_0 pode-se escrever como,

$$L_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + N = \frac{a}{2}p^2 + N, \tag{4.89}$$

onde $\alpha_0^\mu = p^\mu$.

Agora também pode-se utilizar a condição de camada de massa $p^2 = -M^2$.

No setor de Ramond os supergeradores de Virasoro são,

$$L_m^{(fer)} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(n + \frac{1}{2}m) : d_{-n} \cdot d_{m+n} : . \tag{4.90}$$

Os modos das supercorrentes são,

$$F_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n} \cdot d_{m+n} :, \tag{4.91}$$

e o operador número é dado por,

$$N = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_{-n} \cdot d_n. \tag{4.92}$$

As super-álgebras de Virasoro no setor R são,

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{8}Dm^3\delta_{m+n}, \tag{4.93}$$

$$[L_m, F_n] = (\frac{1}{2}m - n)F_{m+n}, \tag{4.94}$$

$$\{F_m, F_n\} = 2L_{m+n} + \frac{1}{2}Dm^2\delta_{m+n}. \tag{4.95}$$

Portanto os estados físicos satisfazem,

$$L_m \left|\phi\right\rangle = 0, \qquad m > 0 \tag{4.96}$$

$$F_r \left|\phi\right\rangle = 0, \qquad r > 0 \tag{4.97}$$

$$(L_0 - \mu)\left|\phi\right\rangle = 0 \tag{4.98}$$

Neste novo setor a dimensão crítica também é $D = 10$, e a constante $\mu = 0$. O operador de massa é

$$M^2 = 2N, \tag{4.99}$$

onde obtêm-se que o estado fundamental ($N = 0$) no setor R não tem massa.

Análise do espectro

Vamos analisar o espectro para alguns estados da corda aberta no calibre do cone de luz. No setor NS, lembrando que $a = \frac{1}{2}$, o operador da massa é,

$$\alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{r=1/2}^{\infty} r b_{-r}^i b_r^i - \frac{1}{2}. \tag{4.100}$$

O estado fundamental é aniquilado pelos modos positivos,

$$\alpha_n^i \left|0; k\right\rangle_{NS} = b_r^i \left|0; k\right\rangle_{NS} = 0 \quad \text{para} \quad n, r > 0 \tag{4.101}$$

Do operador da massa é óbvio que no setor NS o estado fundamental a massa é dada por,

$$\alpha' M^2 = -\frac{1}{2}.$$

O estado fundamental é um escalar no setor NS e outra vez temos um táquion.

O primeiro estado excitado no setor NS é $b_{-1/2}^i \left|0; k\right\rangle_{NS}$, este estado tem massa nula.

No setor de R, o operador de massa é,

$$\alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{n=1}^{\infty} n d_{-n}^i d_n^i. \tag{4.102}$$

O estado fundamental é a solução de,

$$\alpha_n^i \left|0; k\right\rangle_R = d_n^i \left|0; k\right\rangle_R = 0 \quad \text{para} \quad n > 0, \tag{4.103}$$

assim como a equação de Dirac sem massa.

Em nossa notação escrevemos da seguinte maneira,

$$\alpha_0 \cdot d_0 \left|0; k\right\rangle_R = 0, \tag{4.104}$$

onde $d_0 = \Gamma^\mu$. O modo zero d_0 é o operador de Dirac. Também lembrando que o operador α_0^μ está relacionado com o momento.

O estado fundamental no setor R é um espinor de Dirac sem massa em dez dimensões.

Projeção GSO

No setor NS tem-se um táquion para o estado fundamental. O espectro não é supersimétrico, porque no setor R não se tem um férmion associado ao táquion. Para obter um espectro supersimétrico e remover o táquion, é usado um truncamento do espectro que foi feito por Gliozzi, Scherk e Olive [13], que é conhecido como projeção GSO.

A projeção no setor NS: Primeiro define-se um operador no setor NS

$$G = (-1)^{\sum_{r=1/2}^{\infty} b_{-r} \cdot b_{r+1}}. \tag{4.105}$$

Aqui G determina se o número de excitações fermiônicas na folha de mundo é par ou impar. Neste setor a projeção GSO consiste em eliminar os estados com paridade G negativa. Desta forma elimina-se o táquion do espectro. Já que o estado fundamental tem paridade G negativa,

$$G \left|0\right\rangle_{NS} = - \left|0\right\rangle_{NS}. \tag{4.106}$$

Depois da projeção GSO o estado sem massa $b^{\mu}_{1/2} \left|0\right\rangle$ é estado fundamental do setor NS.

A projeção no setor R: Aqui define-se o operador,

$$G = \Gamma^{11}(-1)^{\sum_{n=1}^{\infty} d_{-n} \cdot d_n}, \tag{4.107}$$

onde $\Gamma^{11} = \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^9$. A matriz Γ^{11} é análoga à matriz γ^5.

O operador Γ são as matrizes de 32×32 que satisfazem a álgebra,

$$\{\Gamma^{\mu}, \Gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu}. \tag{4.108}$$

também satisfazem,

$$(\Gamma^{11})^2 = 1 \quad \text{e} \quad \{\Gamma^{11}, \Gamma^{\mu}\} = 0. \tag{4.109}$$

Os espinores que satisfazem,

$$\Gamma^{11} \left|\phi\right\rangle = \pm \left|\phi\right\rangle, \tag{4.110}$$

tem quiralidade positiva ou negativa. Os operadores projeção de quiralidade são,

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \Gamma^{11}) \tag{4.111}$$

Um espinor com uma definida quiralidade é chamado um espinor de Weyl.

No setor R se pode eliminar os estados com paridade G positiva ou negativa dependendo da quiralidade do estado fundamental. Depois da projeção GSO tem-se um espectro supersimétrico no espaço-tempo com mesmo número de bósons e férmions em cada nível de massa.

4.3 Formulação das supercordas de Green Schwarz

Na formulação RNS, vimos que pode-se incluir a supersimetria só na folha do mundo, e podemos realizar a quantização covariante. Porém, na formulação RNS, temos uma diferença no número de estados nos setores bosônico e fermiônico. Para ter a mesma quantidade de estados nos setores precisamos do mecanismo **GSO**. Na formulação de Green-Schwarz (GS) nós estudamos a teoria de cordas com supersimetria no espaço-tempo [36–39]. O formalismo GS é um mapeamento $(X^{\mu}, \Theta^{\alpha}, \mu = 0, \ldots, 9; \alpha = 0, \ldots, 16)$ da folha de mundo no espaço-tempo supersimétrico. Este formalismo como veremos mais tarde tem vantagens e desvantagens em relação ao formalismo RNS. A principal desvantagem neste formalismo é a quantização covariante, é difícil fazer esta quantização. Então para quantizar a teoria precisa-se do *calibre do cone de luz*. Portanto, nesta quantização se perde a covariança de Lorentz manifesta. Mas as cordas bosônicas e fermiônicas são unificadas num mesmo espaço de Fock.

4.3.1 Ação para $D0$-brana

Nós vamos começar estudando a partícula supersimétrica também chamada $D0$-brana[5]. Fazemos isto porque o mesmo caminho é seguido para uma corda ou $D1$-brana. Veremos que a $D0$-brana e $D1$-brana tem o mesmo problema ao momento de quantizar a teoria.

[5]No livro de Green-Schwarz-Witten a ação da $D0$-brana apresenta o campo auxiliar $e(\tau)$.

Uma $D0$-brana de massa m tem a ação[6],

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{X}^{\mu}\dot{X}_{\mu}}. \tag{4.112}$$

Para generalizar o espaço-tempo de Minkowski num espaço-tempo supersimétrico, precisa-se adicionar coordenadas fermiônicas $\Theta^{A\alpha}(\tau)$. Estas coordenadas são espinores que anti-comutam, onde $A = 1, \ldots, \mathcal{N}$, sendo $\mathcal{N}$ o número de supersimetrias, e $\alpha = 1, \ldots, 2^{D/2}$ é o índice do espinor de Dirac em um espaço-tempo de dimensão par D. Para o caso $D = 10$, os espinores são de Majorana-Weyl de 32 componentes.

Então agora é feita uma substituição, a coordenada $\dot{X}$ é substituída em (4.112) por,

$$\Pi_0^{\mu} = \dot{X}^{\mu} - \bar{\Theta}^{A}\Gamma^{\mu}\dot{\Theta}^{A}. \tag{4.113}$$

Aqui o subíndice é 0 porque os dois termos estão derivados em relação ao tempo. Porém, uma relação geral para Dp-branas é,

$$\Pi_{\alpha}^{\mu} = \partial_{\alpha}X^{\mu} - \bar{\Theta}^{A}\Gamma^{\mu}\partial_{\alpha}\Theta^{A}, \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, p. \tag{4.114}$$

Para uma $D0$-brana só fazemos $\alpha = 0$.

Tem-se a nova ação de (4.112),

$$S_1 = -m \int d\tau \sqrt{-\Pi_0 \cdot \Pi_0}. \tag{4.115}$$

Pode-se demostrar que esta ação é invariante pelas transformações globais de super-Poincaré e difeomorfismos locais da linha de mundo.

Proposição 4.6 (**Supersimetria.**). *A ação para $D0$-brana é invariante pelas transformações supersimétricas,*

$$\delta\Theta^{Aa} = \epsilon^{Aa}$$

$$\delta\bar{\Theta}^{Aa} = \bar{\epsilon}^{Aa}$$

$$\delta X^{\mu} = \bar{\epsilon}^{A}\Gamma^{\mu}\Theta^{A}$$

$$\delta\epsilon = 0$$

[6] Também pode-se fazer o desenvolvimento com a ação *Brink-Schwarz* [40].

aqui ϵ^A é um espinor infinitesimal constante onde as componentes são números de Grassmann.

Demonstração.

$$\begin{aligned}\delta S &= -m\int \delta(-\Pi_0\cdot\Pi_0)^{\frac{1}{2}}d\tau\\ &= m\int \frac{\delta\Pi_0\cdot\Pi_0}{(-\Pi_0\cdot\Pi_0)^{\frac{1}{2}}}d\tau\end{aligned}$$

Só se precisa mostrar que $\delta\Pi_0 = 0$, então temos que,

$$\begin{aligned}\delta\Pi_0 &= \delta\dot{X}^\mu - \delta(\Theta\Gamma^\mu\dot{\Theta}^A)\\ &= \frac{d}{dt}(\bar{\epsilon}^A\Gamma^\mu\Theta^A) - \delta\Theta^A\Gamma^\mu\dot{\Theta}^A - \bar{\Theta}^A\Gamma^\mu\delta\dot{\Theta}^A\\ &= \bar{\epsilon}\Gamma^\mu\dot{\Theta}^A - \bar{\epsilon}\Gamma^\mu\dot{\Theta}^A = 0\end{aligned}$$

$\square$

É trivial fazer a demostração de

$$[\delta_1,\delta_2]\Theta^{Aa} = 0, \qquad [\delta_1,\delta_2]X^\mu = -2\bar{\epsilon}_1^A\Gamma^\mu\epsilon_\mu^A = a^\mu, \tag{4.116}$$

isto quer dizer que o comutador de uma transformação supersimétrica do campo bosônico move uma quantidade a^μ. Enquanto a transformação do campo fermiônico é inalterado. As transformações supersimétricas mais as transformações de Poincaré formam em conjunto o grupo de *super-Poincaré*.

As matrizes Γ satisfazem à álgebra (estas matrizes se definem no apêndice D),

$$\{\Gamma^\mu,\Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{4.117}$$

No caso para uma teoria de supercordas tipo IIA temos que $\mathcal{N} = 2$, então há dois espinores de Majorana-Weyl Θ^1 e Θ^2, que tem quiralidade oposta. Portanto, pode-se definir o espinor de Majorana $\Theta = \Theta^1 + \Theta^2$, onde as coordenadas Θ^1 e Θ^2 podem-se definir com ajuda da matriz[7] $\Gamma_{11} = \Gamma_0\Gamma_1 \dots \Gamma_9$,

$$\Theta^1 = \frac{1}{2}(1 + \Gamma_{11})\Theta, \tag{4.118}$$

$$\Theta^2 = \frac{1}{2}(1 - \Gamma_{11})\Theta. \tag{4.119}$$

Então pode-se escrever

$$\Pi_0^\mu = \dot{X}^\mu - \bar{\Theta}\Gamma^\mu\dot{\Theta}. \tag{4.120}$$

O momento associado a X^μ é dado por,

$$P_\mu = \frac{\delta S_1}{\delta \dot{X}^\mu} = \frac{m}{\sqrt{-\Pi_0 \cdot \Pi_0}}(\dot{X}_\mu - \Theta\Gamma_\mu\dot{\Theta}) = \frac{m}{\sqrt{-\Pi_0 \cdot \Pi_0}}\Pi_{0\mu}. \tag{4.121}$$

A equação de movimento para X^μ é,

$$\dot{P}_\mu = 0 \tag{4.122}$$

Pode-se demostrar de (4.121) que,

$$P^2 = -m^2, \tag{4.123}$$

esta é a condição de camada de massa (mass-shell).

As equações de movimento obtidas para Θ a partir da ação (4.115) são;

$$m^2\dot{\Theta} = 0, \quad \text{e} \quad P \cdot \Gamma\dot{\Theta} = 0. \tag{4.124}$$

Daqui vemos que no caso massivo o campo fermiônico Θ é inalterado ao longo do tempo.

A equação da esquerda de (4.124) é obtido multiplicando o fator $(P \cdot \Gamma)$ com $P \cdot \Gamma\dot{\Theta} = 0$, portanto temos $m^2\dot{\Theta} = 0$, assim para $m \neq 0$ temos $\dot{\Theta} = 0$. No entanto, o fator $P \cdot \Gamma$ é singular no caso massivo. Então pode-se saturar o limite BPS, para melhorar a supersimetria. Isto sugere que existe outra contribuição à ação cuja inclusão assegura a saturação de limite BPS e melhora a supersimetria. Suponhamos que há uma segunda

[7] As matrizes Gama satisfazem $\Gamma_{11}^2 = 1$ e $\{\Gamma_{11}, \Gamma^\mu\} = 0$.

contribuição à ação, portanto a equação de movimento (4.124) muda para (para mais referências vide [14, pág. 151]),

$$(P \cdot \Gamma + m\Gamma_{11})\dot{\Theta} = 0. \tag{4.125}$$

A consequência disto é uma contribuição adicional à ação S_1 (4.115). Então temos,

$$S_2 = -m \int d\tau \bar{\Theta}\Gamma_{11}\dot{\Theta}. \tag{4.126}$$

Portanto a ação total é,

$$S = S_1 + S_2 = -m \int d\tau(\sqrt{-\Pi_0 \cdot \Pi_0} + \bar{\Theta}\Gamma_{11}\dot{\Theta}). \tag{4.127}$$

Esta ação é invariante pelas transformações de super-Poincaré e apresenta uma nova característica chamada *simetria Kappa*.

Simetria Kappa

A ação (4.127) tem uma simetria adicional, que é uma simetria fermiônica local que é chamada simetria κ. Esta simetria envolve a variação $\delta\Theta$, então, temos as transformações

$$\delta X^\mu = \bar{\Theta}\Gamma^\mu\delta\Theta = -\delta\bar{\Theta}\Gamma^\mu\Theta. \tag{4.128}$$

Portanto

$$\delta\Pi_0^\mu = \delta\dot{X}^\mu - \delta\bar{\Theta}\Gamma^\mu\dot{\Theta} - \bar{\Theta}\Gamma^\mu\delta\dot{\Theta} = -2\delta\bar{\Theta}\Gamma^\mu\dot{\Theta}. \tag{4.129}$$

A variação da ação (4.127) pela simetria κ é,

$$\begin{aligned}\delta S &= -m \int d\tau\big(- \frac{\Pi \cdot \delta\Pi}{\sqrt{-\Pi \cdot \Pi}} + \delta\bar{\Theta}\Gamma_{11}\dot{\Theta} + \bar{\Theta}\Gamma_{11}\delta\dot{\Theta}\big) \\ &= -2m \int d\tau\delta\bar{\Theta}\gamma\Gamma_{11}\dot{\Theta} - 2m \int d\tau\delta\bar{\Theta}\Gamma_{11}\dot{\Theta},\end{aligned} \tag{4.130}$$

onde

$$\gamma = \frac{\Gamma \cdot \Pi_0}{\sqrt{-\Pi_0 \cdot \Pi_0}}\Gamma_{11}. \tag{4.131}$$

Tem-se em conta que $\gamma^2 = 1$, pode-se definir os operadores de projeção

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma), \tag{4.132}$$

de forma que a variação (4.130) é,

$$\begin{aligned} \delta S &= -2m \int \delta\bar{\Theta}(1+\gamma)\Gamma_{11}\dot{\Theta} d\tau \\ &= -4m \int d\tau \delta\bar{\Theta} P_+ \Gamma_{11}\dot{\Theta}. \end{aligned} \tag{4.133}$$

Então, a ação (4.127) é invariante pelas transformações,

$$\begin{aligned} \delta\bar{\Theta} &= \bar{\kappa} P_- \quad \text{e} \\ \delta X^\mu &= -\bar{\kappa} P_- \Gamma^\mu \Theta. \end{aligned} \tag{4.134}$$

Aqui, $\kappa(\tau)$ é um espinor de Majorana. A importância está em que sem a simetria pode-se encontrar uma quantidade errada de graus de liberdade fermiônicos. A metade das componentes de Θ desacoplam e podem ser eliminados com ajuda da simetria.

4.3.2 Ação para $D1$-brana

Nós introduzimos as ideias básicas da supersimetria no espaço-tempo considerando a $D0$-brana (super-partícula)[8]. Nesta seção vamos a generalizar a supersimetria para a corda bosônica. Os campos X^μ e Θ^A onde $A = 1, 2$ dependem das coordenadas σ e τ que geram a folha do mundo. Lembrando que esta folha é uma superfície bidimensional no espaço de Minkowski, com $D = 10$ dimensões. Vamos a considerar a ação de Polyakov[9],

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu. \tag{4.135}$$

Agora tem-se que generalizar esta ação seguindo a mesma maneira da super-partícula,

$$S_1 = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \Pi_\alpha \cdot \Pi_\beta, \tag{4.136}$$

[8] Um estudo mais detalhado é feito em [41]

[9] No livro de Becker-Becker-Schwarz considera-se a ação de Nambu-Goto.

onde

$$\Pi^\mu_\alpha \partial_\alpha X^\mu - \bar{\Theta}^A \Gamma^\mu \partial_\alpha \Theta^A. \tag{4.137}$$

Aqui Θ^A, $A = 1, 2$ são os espinores de Majorana-Weyl com 16 componentes reais. Para a teoria tipo IIA os espinores Θ^1 e Θ^2 tem quiralidade oposta, enquanto para a teoria tipo IIB tem a mesma quiralidade.

$$\begin{aligned} &\Gamma_{11}\Theta^A = (-1)^{A+1}\Theta^A && \text{tipo } IIA \\ &\Gamma_{11}\Theta^A = \Theta^A && \text{tipo } IIB. \end{aligned} \tag{4.138}$$

As transformações de supersimetria são,

$$\delta\Theta^A = \epsilon^A \quad \text{e} \tag{4.139}$$

$$\delta X^\mu = \bar{\epsilon}^A \Gamma^\mu \Theta^A. \tag{4.140}$$

A ação (4.136) é invariante pelos difeomorfismos locais e transformações globais de super-Poincaré. O problema com a ação (4.136) é que não é invariante pelas transformações κ, então é preciso somar um termo S_2 do tipo de Wess-Zumino. A nova ação $S = S_1 + S_2$ é invariante pela transformação κ. Este novo termo é,

$$S_2 = -\frac{1}{\pi}\int d^2\sigma \epsilon^{\alpha\beta}[\partial_\alpha X^\mu(\bar{\Theta}^1\Gamma_\mu\partial_\beta\Theta^1 - \bar{\Theta}^2\Gamma_\mu\partial_\beta\Theta^2) + \bar{\Theta}^1\Gamma^\mu\partial_\alpha\Theta^1\bar{\Theta}^2\Gamma_\mu\partial_\beta\Theta^2]. \tag{4.141}$$

Onde $\epsilon^{\alpha\beta}$ tem componentes $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$ e $\epsilon^{00} = \epsilon^{11} = 0$. As variáveis bosônicas transforman pela transformação Kappa de acordo a,

$$\begin{aligned} \delta\bar{\Theta}^1 &= \Gamma_\mu \Pi^\mu_\alpha \kappa^1_\beta P^{\alpha\beta}_- \\ \delta\bar{\Theta}^2 &= \Gamma_\mu \Pi^\mu_\alpha \kappa^2_\beta P^{\alpha\beta}_+ \\ \delta X^\mu &= \bar{\Theta}\Gamma^\mu\delta\Theta^A = -\delta\bar{\Theta}^A\Gamma^\mu\Theta^A, \end{aligned} \tag{4.142}$$

onde

$$P^{\alpha\beta}_\pm = \frac{1}{2}(h^{\alpha\beta} \pm \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{-h}}). \tag{4.143}$$

A ação GS é $S = S_1 + S_2$. Então temos,

$$S = \frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\sqrt{-h}\Big[\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu - 2\partial_\alpha X^\mu(P_-^{\alpha\beta}\bar{\Theta}^1\Gamma_\mu\partial_\beta\Theta^1 + P_+^{\alpha\beta}\bar{\Theta}^2\Gamma_\mu\partial_\beta\Theta^2) + 2P_+^{\alpha\beta}\bar{\Theta}^1\Gamma^\mu\partial_\alpha\Theta^1\bar{\Theta}^2\Gamma^\mu\partial_\beta\Theta^2\Big]. \quad (4.144)$$

As equações de movimento para as supercordas no formalismo GS são extremamente não lineares:

$$\begin{aligned}
\delta h^{\alpha\beta} \to \quad & T_{\alpha\beta} = \Pi_\alpha\cdot\Pi_\beta - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}h^{\gamma\delta}\Pi_\gamma\cdot\Pi_\delta = 0 \\
\delta X^\mu \to \quad & \partial_\alpha\Big[\sqrt{-h}(h^{\alpha\beta}\partial_\beta X^\mu - 2P_-^{\alpha\beta}\bar{\Theta}^1\Gamma_\mu\partial_\beta\Theta^1 - 2P_+^{\alpha\beta}\bar{\Theta}^2\Gamma_\mu\partial_\beta\Theta^2)\Big] = 0 \qquad (4.145) \\
\delta\Theta^1, \delta\Theta^2 \to \quad & \Gamma_\mu\Pi_\alpha^\mu P_-^{\alpha\beta}\partial_\beta\Theta^1 = \Gamma_\mu\Pi_\alpha^\mu P_+^{\alpha\beta}\partial_\beta\Theta^2 = 0
\end{aligned}$$

Estas equações podem ser lineares se são impostos os seguintes calibres,

$$X^+ = x^+ + p^+\tau$$

$$\Gamma^+\Theta^A = 0 \quad \text{onde} \quad \Gamma^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma^0 \pm \Gamma^9)$$

Na seguinte seção tratamos estos calibres.

A grande vantagem do formalismo de GS está nos campos fermiônicos Θ^A que podem-se transformar como espinores no espaço-tempo. Também a supersimetria é manifesta no espaço-tempo. Porém, é difícil quantizar covariantemente o formalismo GS. O problema é que não podem ser separados covariantemente os vínculos de primeira classe e segunda classe[10]. Mas no *calibre do cone de luz* a quantização pode ser feita.

4.3.3 Calibre do cone de luz

Como na seção § 3.2, fazemos uma escolha de calibre do cone de luz. Podemos fazer uma fixação de calibre $h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$ e ainda há uma invariância conforme residual que pode ser

[10]Nas *Lectures* de P.A.M. Dirac, se ensina o processo de quantização de uma teoria, onde os vínculos desempenham um papel importante no momento de quantizar [35].

aproveitada. Então nós podemos fazer uma escolha de calibre adicional [20]. Definamos as coordenadas no cone de luz no espaço-tempo $D = 10$ dimensões,

$$X^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^9). \tag{4.146}$$

Como na seção § 3.2 nós fazemos a escolha do calibre do cone de luz, da seguinte forma,

$$X^+(\tau, \sigma) = x^+ + p^+\tau. \tag{4.147}$$

Como antes isto deixa as coordenadas transversais X^i com $i = 1, \ldots, 8$ como graus de liberdade independentes. Então tem-se 8 graus de liberdade correspondentes à oscilações transversais em 10-dimensões. Considerando os campos fermiônicos Θ^A, eles são espinores de 32 componentes complexos em 10-dimensões. Impondo a condição de Majorana e Weyl o número de componentes é reduzido em 16 componentes reais. Mas temos dois espinores de Majorana-Weyl, portanto eles tem 32 componentes reais. Com a ajuda da simetria κ pode-se reduzir à metade os graus de liberdade.

Uma escolha natural do calibre é,

$$\Gamma^+\theta^A = 0, \tag{4.148}$$

onde

$$\Gamma^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma^0 \pm \Gamma^9). \tag{4.149}$$

Isto reduz os graus de liberdade em cada campo Θ para oito. A teoria de cordas considerada aqui tem uma invariância de Lorentz em 10-dimensões, porém no cone de luz só uma simetria transversal $SO(8)$ é manifesta. As oito componentes de cada espinor Θ formam uma representação espinorial de 8-dimensões do grupo transversal $SO(8)$. Denotam-se as duas representações de $Spin(8)$ por $\mathbf{8}_s$ e $\mathbf{8}_c$. Multiplicando o campo Θ pelo fator $\sqrt{p^+}$, temos que,

$$\begin{aligned} \sqrt{p^+}\Theta^A &\rightarrow \mathbf{8}_s + \mathbf{8}_c = (S_1^a, S_2^{\dot{a}}) && \text{tipo } IIA \\ \sqrt{p^+}\Theta^A &\rightarrow \mathbf{8}_s + \mathbf{8}_s = (S_1^a, S_2^a) && \text{tipo } IIB \end{aligned} \tag{4.150}$$

os índices a, b indicam espinores na representação $\mathbf{8}_s$ e os índices ponteados $\dot{a}, \dot{b}$ indicam espinores na representação 8_c.

A ação da supercorda no calibre do cone de luz para a supercorda tipo IIB é dada por

$$S = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma \partial_\alpha X_i \partial^\alpha X^i + \frac{i}{\pi}\int d^2\sigma (S_1^a \partial_+ S_1^a + S_2^a \partial_- S_2^a). \tag{4.151}$$

No calibre do cone de luz as equações de movimento para a supercorda tipo IIB assumem a forma simples,

$$\begin{aligned} \partial_+\partial_- X^i &= 0, \\ \partial_+ S_1^a &= 0, \\ \partial_- S_2^a &= 0, \\ \partial_- S_2^{\dot{a}} &= 0. \end{aligned} \tag{4.152}$$

Agora a ação da supercorda tipo IIA é,

$$S = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma (\partial_\alpha X_i \partial^\alpha X^i + \bar{S}^a \rho^\alpha \partial_\alpha S^a), \tag{4.153}$$

onde ρ são as matrizes de Dirac bidimensionais.

4.3.4 Quantização canônica

A quantização canônica das coordenadas transversais X^i é a mesma que no formalismo RNS. No caso para coordenadas fermiônicas temos a seguinte relação de anticomutação,

$$\{S^{Aa}(\tau,\sigma), S^{Bb}(\tau,\sigma')\} = \pi\delta^{ab}\delta^{AB}\delta(\sigma - \sigma'), \tag{4.154}$$

onde $A, B = 1, 2$ e $a, b = 1, \ldots, 8$.

Cordas abertas

Ao contrário do que acontece no formalismo RNS, no caso de cordas abertas não existe liberdade da escolha de sinal nas condições de fronteira. Para manter a supersimetria é preciso que ambos extremos da corda tenham o mesma sinal. Agora só tomamos a condição de Neumann na fronteira. Portanto, temos que,

$$S^{1a} = S^{2a}, \quad \sigma = 0, \pi. \tag{4.155}$$

Uma vez que as transformações de supersimetria são $\delta\Theta^A = \epsilon^A$, onde ϵ^A é constante, as condições anteriores só são compatíveis com a supersimetria quando $\epsilon^1 = \epsilon^2$, portanto o número de supersimetrias se reduz de $\mathcal{N} = 2$ para $\mathcal{N} = 1$. Esta é uma teoria de supercordas tipo I.

Os modos de expansão para campos fermiônicos para uma corda aberta são,

$$\begin{aligned} S^{1a}(\tau, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^a e^{-in(\tau-\sigma)} \quad \text{e} \\ S^{2a}(\tau, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^a e^{-in(\tau+\sigma)}, \end{aligned} \tag{4.156}$$

onde

$$\{S_m^a, S_n^b\} = \delta^{ab}\delta_{m+n}. \tag{4.157}$$

A condição de realidade implica que $S_{-m}^a = (S_m^a)^\dagger$.

O estado fundamental é uma representação da álgebra de Clifford,

$$\{S_0^a, S_0^b\} = \delta_{ab}, \qquad a, b = 1, \ldots, 8, \tag{4.158}$$

onde as S_0^a são,

$$S_0^a \sim \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\dot{a}b}^i \\ (\sigma_{\dot{a}b}^i)^T & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.159}$$

e $\sigma_{\dot{a}b}^i$ são matrizes Gama de 8×8, (a definição destas matrizes estão no apêndice D).

A representação consiste de $\mathbf{8}_v$ vetores com massa, denotam-se com $\langle i|$, $i = 1, \ldots, 8$, e os $\mathbf{8}_c$ espinores sem massa $|\dot{a}\rangle$,$\dot{a} = 1, \ldots, 8$. Eles estão relacionados da seguinte forma,

$$\begin{aligned} |\dot{a}\rangle &= \sigma_{\dot{a}b}^i S_0^b \,|i\rangle\,, \\ |i\rangle &= \sigma_{\dot{a}b}^i S_0^b \,|\dot{a}\rangle\,. \end{aligned} \tag{4.160}$$

Os estados são normalizados de acordo com,

$$
\begin{aligned}
\langle i|j\rangle &= \delta_{ij}, \\
\langle \dot{a}|\dot{b}\rangle &= \frac{1}{2}(h\Gamma^{+})^{\dot{a}\dot{b}}.
\end{aligned}
\tag{4.161}
$$

Os estados excitados são construídos com os operadores S^{a}_{-n} e α^{i}_{-n}.

A condição da camada de massa (mass-shell) é,

$$
\alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha^{i}_{-n}\alpha^{i}_{n} + nS^{a}_{-n}S^{a}_{n}). \tag{4.162}
$$

Neste caso não temos uma constante adicional, a constante de ordenamento normal para os modos bosônicos se cancelam com a constante para os modos fermiônicos. Portanto, não temos táquions no espectro e não precisamos da projeção GSO.

Cordas fechadas

As cordas fechadas requerem a periodicidade,

$$
S^{Aa}(\tau,\sigma) = S^{Aa}(\tau,\sigma+\pi). \tag{4.163}
$$

Esta condição de fronteira é compatível com a supersimetria. A expansão dos modos de oscilação são,

$$
\begin{aligned}
S^{1a}(\tau,\sigma) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S^{a}_{n} e^{-2in(\tau-\sigma)} \\
S^{2a}(\tau,\sigma) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{S}^{a}_{n} e^{-2in(\tau+\sigma)}
\end{aligned}
\tag{4.164}
$$

Os estados sem massa são construídos pelos produtos tensoriais

$$
\begin{aligned}
&|i\rangle\,|\dot{a}\rangle \otimes |j\rangle\,|b\rangle\,, \quad \text{tipo } IIA \\
&|i\rangle\,|\dot{a}\rangle \otimes |j\rangle\,|b\rangle\,, \quad \text{tipo } IIB
\end{aligned}
\tag{4.165}
$$

Para a teoria tipo IIA tem-se os estados bosônicos $|i\rangle \otimes |j\rangle$ e $|\dot{a}\rangle \otimes |b\rangle$. Os estados fermiônicos são $|i\rangle \otimes |b\rangle$ e $|\dot{a}\rangle \otimes |j\rangle$.

No caso da teoria tipo IIB os estados bosônicos são $|i\rangle \otimes |j\rangle$ e $|\dot{a}\rangle \otimes |\dot{b}\rangle$. Os estados fermiônicos são $|i\rangle \otimes |\dot{b}\rangle$ e $|\dot{a}\rangle \otimes |j\rangle$.

Até agora, vimos dois formalismo para incorporar a supersimetria às cordas. Cada formalismo tem vantagens e desvantagens como já foi mencionado. Mas há um novo formalismo que resolve alguns problemas dos formalismos precedentes. Este novo formalismo desenvolvido por Nathan Berkovits é chamado formalismo de Espinores Puros [43]. Neste formalismo pode-se quantizar as supercordas na forma covariante e a supersimetria é manifesta no espaço-tempo.

Capítulo 5

Conclusão

Nesta dissertação iniciamos apresentando um estudo do formalismo de cordas bosônicas. Nós apresentamos as diferenças entre a ação de Nambu-Goto e a ação de Polyakov, constatamos que as equações de movimento de Nambu-Goto são mais difíceis para resolver porque eles apresentam uma raiz quadrada enquanto as equações de movimento de Polyakov são mais fáceis de resolver escolhendo um adequado calibre covariante $h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$. Vimos a importância das simetrias em cada ação. A ação de Polyakov para objetos n-dimensionais não é renormalizável exceto para as cordas (objetos de $n = 1$). Isto é uma consequência da simetria de Weyl que está presente apenas nas cordas mas não em objetos de dimensão $n > 1$. Nós vimos que a quantização da corda no calibre covariante $h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$ apresenta fantasmas (estados com norma negativa) e táquions. Mas no calibre do *cone de luz* pode-se eliminar os fantasmas e também é mais fácil calcular a dimensão crítica $D = 26$. Na quantização em o calibre do cone de luz nós apresentamos duas formas de regularizar: a regularização pelo método de corte e a regualarização pela função ζ, nas duas formas encontramos que a soma $\sum_{n=1}^{\infty} n$, tem um valor de $-\frac{1}{12}$. Este valor é muito importante porque nos proporciona a dimensionalidade crítica do espaço-tempo $D = 26$ para cordas bosônicas.

No capitulo 4 nós apresentamos a supercorda. Neste capítulo vimos os dois formalismos para incluir a supersimetria às cordas bosônicas. O formalismo **RNS** incorpora a supersimetria só na folha de mundo. Os campos bosônicos e fermiônicos X^{μ}, ψ^{μ} só

moram na folha de mundo, portanto a supersimetria esta restringida à folha de mundo. Neste formalismo os campos X^μ, ψ^μ são só vetores no espaço-tempo. A vantagem deste formalismo é que pode-se quantizar covariantemente. Mas os estados no setor bosônico e no setor fermiônico não são iguais. O setor bosônico apresenta um táquion, um estado há mais que no setor fermiônico. Para arranjar isto se precisa do mecanismo **GSO** para ter os dois setores com o mesmo número de estados. Com o mecanismo **GSO** também se elimina o táquion que é um estado não físico. A supersimetria restringida só à folha de mundo não é adequada quando se toma o processo de interação de cordas.
O formalismo **GS** apresenta supersimetria no espaço-tempo. Vimos que neste formalismo a quantização só pode ser feita no calibre do cone de luz. O espectro de estados não apresenta o táquion e não precisa de nenhum mecanismo para desaparecer este táquion. Neste formalismo nós vimos a aparência das ações para a supercorda tipo IIA e IIB. A quantização covariante neste formalismo é muito difícil de fazer. No entanto, há um novo formalismo desenvolvido em 1999 por Nathan Berkovits [43] (*Formalismo de Espinores Puros*) onde a quantização covariante é feita. Este formalismo é supersimétrico no espaço-tempo e também tem invariância de Lorentz.

Com estudos mais avançados será possível compreender um tema que na ultima década está atraindo a atenção de muitos físicos, a correspondência AdS/CFT (ou conjetura de Maldacena [44, 45]). Este novo paradigma é uma dualidade entre uma teoria de cordas em um espaço curvo (com gravidade) $AdS_5 \times S^5$ e uma teoria de calibre super-conforme (sem gravidade) em um espaço plano de quatro dimensões. Esta dualidade hoje em dia tem muitas aplicações: em plasma de Quark-Gluon, Glueballs [46], supercondutividade, superfluidez, metais estranhos [47], efeito Hall fraccionário [48], etc. Muitos podem criticar a teoria das cordas, mas seus frutos valem o esforço de muitos anos de trabalho.

Para uma teoria surpreendente como a dualidade holográfica é importante e necessário fornecer-lhe um entendimento sólido, não só de uma forma prática e circunstancial, mas descobrir sua origem para conseguir estabelecer sua infalibilidade teórica e poder ter uma visão mais ampla. Minha perspectiva futura é aplicar o conhecimento adquirido que está escrito nesta dissertação, para futuras pesquisas e aplicações na correspondência AdS/CFT. Vai ser um longa viagem na compreensão da natureza.

Apêndice A

Invariância da funcional da área por reparametrização

Demostração da invariância da funcional da área.

$$\mathbf{A} = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\Big(\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\xi^1}\Big)\Big(\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\xi^2}\Big) - \Big(\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\xi^2}\Big)^2}. \tag{A.1}$$

Do cálculo fundamental temos as transformações de coordenadas,

$$d\xi^1 d\xi^2 = \Big|det(\frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi^j}})\Big| d\tilde{\xi^1} d\tilde{\xi^2} = \big|det(M)\big| d\tilde{\xi^1} d\tilde{\xi^2}, \tag{A.2}$$

onde a matriz $M = \frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi^j}}$,

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi^1}{\partial \tilde{\xi^1}} & \frac{\partial \xi^1}{\partial \tilde{\xi^2}} \\ \frac{\partial \tilde{\xi^2}}{\partial \tilde{\xi^1}} & \frac{\partial \tilde{\xi^2}}{\partial \tilde{\xi^2}} \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

similarmente para $\tilde{\xi}^1$ e $\tilde{\xi}^2$, temos,

$$d\tilde{\xi^1} d\tilde{\xi^2} = \Big|det(\frac{\partial \tilde{\xi^i}}{\partial \xi^j})\Big| d\xi^1 d\xi^2 = \big|det(M)\big| d\xi^1 d\xi^2. \tag{A.4}$$

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\xi^1}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \tilde{\xi^1}}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \tilde{\xi^2}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \tilde{\xi^2}}{\partial \xi^2} \end{pmatrix}. \tag{A.5}$$

Combinando as equações (A.2) e (A.4), temos que,

$$d\xi^1 d\xi^2 = \big|det(M)\big|\big|det(\tilde{M})\big| d\xi^1 d\xi^2. \tag{A.6}$$

Logo fazemos que,

$$\big|det(M)\big|\big|det(\tilde{M})\big| = 1. \tag{A.7}$$

Agora consideremos o espaço alvo S que está mapeado pelas funções $x^i = x^i(\xi^1, \xi^2)$. Define-se o intervalo do vetor $d\vec{\mathbf{x}}$ tangente ao espaço,

$$ds^2 = d\vec{\mathbf{x}} \cdot d\vec{\mathbf{x}}. \tag{A.8}$$

A diferencial de um vetor $\vec{\mathbf{x}}$ qualquer é,

$$d\vec{\mathbf{v}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial \xi^2} d\xi^2 = \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial \xi^i} d\xi^i. \tag{A.9}$$

Agora substituído este resultado na equação (A.8), temos:

$$ds^2 = \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^i} d\xi^i \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^j} d\xi^j = \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j, \tag{A.10}$$

$$ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j. \tag{A.11}$$

Onde definimos,

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^j}. \tag{A.12}$$

Esta é a métrica induzida,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^1} & \frac{\vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^2} \\ \frac{\vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^1} & \frac{\vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^2} \end{pmatrix}. \tag{A.13}$$

Achamos o determinante de g_{ij}; $det(g_{ij}) = g$

$$g = det(g_{ij}) = \Big(\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^1}\Big)\Big(\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^2}\Big) - \Big(\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^2}\Big)^2. \tag{A.14}$$

Então temos a funcional de área,

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g}. \tag{A.15}$$

Esta fórmula obtida agora é fundamental e elegante. Aqui observaremos as propriedades da invariância de uma forma mas clara. A partir das propriedades da métrica g_{ij}. Sabemos da invariância da métrica ds^2, é invariante por qualquer transformação. Se temos,

$$ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j \quad \text{e} \tag{A.16}$$

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{ij} d\tilde{\xi}^p d\tilde{\xi}^q, \tag{A.17}$$

e sabemos que $ds^2 = d\tilde{s}^2$. Então, temos que,

$$g_{ij} d\xi^i d\xi^j = \tilde{g}_{ij} d\tilde{\xi}^p d\tilde{\xi}^q. \tag{A.18}$$

Onde,

$$d\tilde{\xi}^p = \frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^i} d\xi^i, \quad d\tilde{\xi}^q = \frac{\partial \tilde{\xi}^q}{\partial \xi^j} d\xi^j. \tag{A.19}$$

Substituindo (A.19) em (A.18), temos,

$$g_{ij} d\xi^i d\xi^j = \tilde{g}_{ij} \frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^i} d\xi^i \frac{\partial \tilde{\xi}^q}{\partial \xi^j} d\xi^j, \tag{A.20}$$

$$g_{ij} d\xi^i d\xi^j = \tilde{g}_{ij} \frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial \tilde{\xi}^q}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j. \tag{A.21}$$

Em seguida teremos que,

$$g_{ij} = \tilde{g}_{ij} \frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial \tilde{\xi}^q}{\partial \xi^j} = \tilde{g}_{ij} \tilde{M}_{pi} \tilde{M}_{qj}, \tag{A.22}$$

$$g_{ij} = \tilde{M}^T_{ip} \tilde{g}_{pq} \tilde{M}_{qj}. \tag{A.23}$$

Obtendo o determinante destas matrizes,

$$g = det(\tilde{M}^T) \tilde{g} det(\tilde{M}_{qj}), \tag{A.24}$$

$$g = det(\tilde{M}) \tilde{g} det(\tilde{M}) = \tilde{g} (det(\tilde{M}))^2, \tag{A.25}$$

$$\sqrt{g} = \sqrt{\tilde{g}} |det(\tilde{M})|. \tag{A.26}$$

Agora da funcional de área (A.15), fazemos as substituições (A.2) e (A.26) na funcional da área. Então temos,

$$A = \int \big|det(M)\big| d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \sqrt{\tilde{g}} \big|det(\tilde{M})\big|, \tag{A.27}$$

em consequência temos que,

$$\big|det(M)\big| \big|det(\tilde{M})\big| = 1, \tag{A.28}$$

$$A = \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \sqrt{\tilde{g}}, \tag{A.29}$$

e assim fica demostrado a invariância da área de uma forma geral.

Apêndice B

Partícula Relativística

A partícula relativística tem ação,

$$S = -m \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \sqrt{-\frac{\partial x^\mu(\tau)}{\partial \tau}\frac{\partial x^\nu(\tau)}{\partial \tau}\eta_{\mu\nu}}, \tag{B.1}$$

esta ação é invariante pela reparametrização $\tau \to \tilde{\tau}(\tau)$. Para uma reparametrização infinitesimal $\tau \to \tau + \varepsilon(\tau)$, x^μ transforma da seguinte forma,

$$\delta x^\mu(\tau) = -\varepsilon(\tau)\frac{d}{d\tau}x^\mu(\tau). \tag{B.2}$$

O momento conjugado é,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} = p^\mu. \tag{B.3}$$

Uma boa forma de definir um vínculo é,

$$\phi = p^2 + m^2 = 0, \tag{B.4}$$

daqui temos a condição camada de massa $p^2 = -m^2$.

El Lagrangiano é singular porque a determinante da Hessiana é igual a zero; onde $W = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right)$ e $det(W) = 0$. Se temos um Lagrangiano singular se segue o método de quantização de Dirac. Então definimos um novo Hamiltoniano,

$$H_T = H_C + \sum c_k \phi_k \, labelap5 \tag{B.5}$$

onde $H_c = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\dot{x}^\mu - L = 0$ (H_C é Hamiltoniano canônico).

Agora redefinimos o momento conjugado da seguinte forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^0} = -m\frac{\dot{x}^0}{\sqrt{-\dot{x}^2}} = p^0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = m\frac{\dot{x}^i}{\sqrt{-\dot{x}^2}} = p^i.$$

A equação (B.4) é um vínculo primário e é de primeira classe porque $\{\phi, H_T\}_P = 0$. Os vínculos de primeira classe estão relacionadas com as transformações de calibre. Neste caso o gerador de transformação de calibre para algum $\epsilon(\tau)$ arbitrário é,

$$\delta x^0 = \{x^0, G\}_P = -P^0,$$

$$\delta x^i = \{x^i, G\}_P = -P^i,$$

$$\delta P^0 = \{P^0, G\}_P = 0,$$

$$\delta P^i = \{P^i, G\}_P = 0.$$

Em uma teoria quântica o vínculo (B.4) tem que eliminar um estado quântico Φ. Então temos,

$$\hat{\phi}\,|\Phi\rangle = 0,$$

$$(\hat{p}^2 + m^2)\,|\Phi\rangle = 0, \tag{B.6}$$

ou simplesmente

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\,|\Phi\rangle = 0$$

. Esta é a equação de Klein-Gordon.

Existe uma ação equivalente a (C.1),

$$S = \int (e^{-1}\dot{x}^2 - em^2) d\tau. \tag{B.7}$$

A equação de movimento é

$$\dot{x}^2 + e^2 m^2 = 0$$

. Esta ação é invariante pela reparametrização. No desenvolvimento da teoria das cordas esta ação é muito importante. O análogo da ação da partícula relativística é a ação de Polyakov para as cordas.

Apêndice C

O operador de Virasoro L_0

O operador L_0 é definido,

$$L_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n. \tag{C.1}$$

Se pode mudar para a seguinte forma

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot \alpha_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n, \tag{C.2}$$

no segundo termo da direita nós fazemos uma mudança de $n \to -n$,

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot \alpha_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \alpha_{-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n.$$

Agora adicionamos e sustraemos $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n &= \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \alpha_{-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \\
&= \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \alpha_{-n} \\
&= \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \alpha_{-n} + \alpha_{-n} \cdot \alpha_n
\end{aligned}$$

Assim, uma equação mas reduzida,

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \alpha_{-n}]. \tag{C.3}$$

Lembremos a relação de comutaçao,

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0} \tag{C.4}$$

então se $m = n$, temos

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_{-n}^\nu] = n\eta^{\mu\nu}.\delta_{n+n,0}$$

Agora do ultimo termo da equação (C.3) temos,

$$[\alpha_n, \alpha_{-n}] = \alpha_n \cdot \alpha_{-n} - \alpha_{-n} \cdot \alpha_n$$

$$\alpha_n \cdot \alpha_{-n} - \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = {\alpha_n}^\mu \alpha_{-n\mu} - {\alpha_{-n}}^\mu \alpha_{n\mu}$$

$${\alpha_n}^\mu \alpha_{-n\mu} - {\alpha_{-n}}^\mu \alpha_{n\mu} = \eta_{\mu\nu}({\alpha_n}^\mu {\alpha_{-n}}^\nu - {\alpha_{-n}}^\mu {\alpha_n}^\nu)$$

daqui temos o comutador,

$${\alpha_n}^\mu \alpha_{-n\mu} - {\alpha_{-n}}^\mu \alpha_{n\mu} = \eta_{\mu\nu}[{\alpha_n}^\mu, {\alpha_{-n}}^\nu]. \tag{C.5}$$

Portanto do comutador (C.4), nós temos

$${\alpha_n}^\mu \alpha_{-n\mu} - {\alpha_{-n}}^\mu \alpha_{n\mu} = \eta_{\mu\nu} n \eta^{\mu\nu}. \tag{C.6}$$

Assim agora utilizando o resultado (C.6) na equação (C.3), nós temos,

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{D-1} {\eta^\mu}_\mu \sum_{n=1}^{\infty} n. \tag{C.7}$$

Então da primeira somatória do último termo da equação anterior, temos

$$\sum_{\mu=0}^{D-1} = D$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \frac{D}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n \tag{C.8}$$

Esta é a forma que nós precisamos. O ultimo termo tem uma série que diverge.

Apêndice D

Matrizes Gamma

As matrizes Gamma em 10 dimensões[1] são de 32×32, serão denotadas por Γ^{μ}, onde $\mu = 0, \ldots, 9$ no espaço de Minkowski. A álgebra que elas satisfazem, é denominada álgebra de *Clifford* e é,

$$\{\Gamma^{\mu}, \Gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu}. \tag{D.1}$$

Na representação de Weyl as matrizes Gamma definem-se desta forma

$$\Gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & (\gamma^{\mu})^{\alpha\beta} \\ (\gamma^{\mu})_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \tag{D.2}$$

onde $\alpha, \beta = 1, \ldots, 16$. As matrizes são simétricas de 16×16 e satisfazem,

$$\{(\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}, (\gamma^{\nu})^{\beta\gamma}\} = 2\eta^{\mu\nu}\delta^{\gamma}_{\alpha}. \tag{D.3}$$

As matrizes γ estão dadas em formas explicitas por

$$(\gamma^{0})^{\alpha\beta} = -(\gamma^{0})_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1_{8\times 8} & 0 \\ 0 & 1_{8\times 8} \end{pmatrix} \tag{D.4}$$

$$(\gamma^{9})^{\alpha\beta} = (\gamma^{9})_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1_{8\times 8} & 0 \\ 0 & -1_{8\times 8} \end{pmatrix} \tag{D.5}$$

$$(\gamma^{i})^{\alpha\beta} = -(\gamma^{i})_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{i}_{a\dot{a}} \\ \sigma^{i}_{b\dot{b}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{D.6}$$

[1]Para maís informação vide [42].

As matrizes sigma satisfazem $\sigma^i_{\dot{a}a} = (\sigma^i_{a\dot{a}})^T$ e podem ser expressas como o produto direto de matrizes 2×2.

$$\sigma^1_{a\dot{a}} = \epsilon \otimes \epsilon \otimes \epsilon$$

$$\sigma^2_{a\dot{a}} = 1 \otimes \tau^1 \otimes \epsilon$$

$$\sigma^3_{a\dot{a}} = 1 \otimes \tau^3 \otimes \epsilon$$

$$\sigma^4_{a\dot{a}} = \tau^1 \otimes \epsilon \otimes 1$$

$$\sigma^5_{a\dot{a}} = \tau^3 \otimes \epsilon \otimes 1$$

$$\sigma^6_{a\dot{a}} = \epsilon \otimes 1 \otimes \tau^1$$

$$\sigma^7_{a\dot{a}} = \epsilon \otimes 1 \otimes \tau^3$$

$$\sigma^8_{a\dot{a}} = 1 \otimes 1 \otimes 1$$

onde τ^i são as matrizes de Pauli e $\epsilon = i\tau^2$.

A matriz de quiralidade e de conjugação em $D = 8$ tem a forma explicita,

$$\Gamma^{11} = \Gamma^0 \Gamma^1 \ldots \Gamma^9 = \begin{pmatrix} 1_{16\times16} & 0 \\ 0 & -1_{16\times16} \end{pmatrix} \tag{D.7}$$

$$\Gamma^{11} = \Gamma^0 \Gamma^1 \ldots \Gamma^9 = \begin{pmatrix} 0 & 1_{16\times16} \\ -1_{16\times16} & 0 \end{pmatrix} \tag{D.8}$$

Referências Bibliográficas

[1] R. Dolen, D. Horn e C. Schmid, *Finite-Energy Sum Rules and Their Application to πN Charge Exchange* Phys.Rev. **166** (1968) 1768–1781. 1

[2] D. Rickles, *A Brief History of String Theory: From Dual Models to M-Theory*, Springer Berlin Heidelberg (2014). 2

[3] D.A. Magalhães, *Sobre a importância do modelo de Veneziano para a teoria de cordas*, Rev.Bras.Ens.Fis. **vol.35, no.4,4303** (2013). 2

[4] G. Veneziano, *Construction of a crossing-simmetric, Regge-behaved amplitude for linearly rising trajectories*, Il Nuovo Cimento **A** (1968) 1965-1979. 2

[5] J. H. Schwarz, *Superstrings, The first 15 years of superstring theory*, Vol.1, World Scientific(1985). 2

[6] J. Scherk, J. H. Schwarz, *Dual Models for Non-Hadron*, Nucl,Phys. **B81** (1974) 118-144. 2

[7] P. Ramond, *Dual theory for free fermions*, Phys.Rev. **D3** (1971) 2415. 2, 4, 51

[8] A. Neveu e J.H. Schwarz, *Factorizable dual model of pions*, Nucl. Phys. **B31** (1971) 86. 2, 4, 51

[9] P. Ramond, *SUSY: The Early Years (1966-1976)*, Eur.Phys.J. **C74** (2014) 2698. 3, 51

[10] M.B. Green e J.H. Schwarz, *Anomaly cancellations in supersymmetric D=10 Gauge Theory and Superstring Theory*, Physics Letters **B149** (1984) 117-122. 3

[11] M.B. Green e J.H. Schwarz, *Covariant description of superstring*, Physics Letters **B136** (1984) 367. 3

[12] D.J. Gross, J.A. Harvey, E. Martinec e R. Rhom, *Heterotic String*, Phys.Rev.Lett. **54** (1984) 502?505. 3

[13] F. Gliozzi, J. Scherk and D.I. Olive, *Supersymmetry, Supergravity Theories And The Dual Spinor Model*, Nucl. Phys. **B122** (1977) 253. 4, 64

[14] K. Becker, M. Becker e J. H. Schwarz, *String Theory and M-Theory, A modern Introduction*, Cambridge University Press(2007). 5, 29, 69

[15] B. Zwiebach. *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press(2009). 5, 11, 18, 19, 30

[16] R. Blumenhagen, D. Lüst e D. Theisen, *Basic Concepts of String Theory*, Springer Berlin Heidelberg (2012). 5

[17] R.J. Szabo, *Introduction to String Theory and D-brane Dynamics: With Problems and Solutions*, Imperial College Press (2011). 5

[18] D. Mcmahon, *String Theory Demystified*, McGraw-Hill (2009). 5, 45

[19] J. Scherk, *An Introduction to the theory of dual model and strings*, Rev.Mod.Phys. **47** (1975)123-164. 5, 11

[20] M.B. Green, J.H. Schwarz e E. Witten, *Superstring theory*, Vol. 1, Cambridge University Press(1987). 5, 13, 18, 29, 45, 51, 56, 73

[21] Y. Nambu, *Lecture on the Copenhagen Summer Symposium*, (1970), O. Hara, Prog.Theor.Phys. **46** (1971) 1549, T. Goto, Prog.Theor.Phys. **46** (1971) 1560, M.

Minami Prog.Theor.Phys. **48** (1972) 1308, L. N. Chang and J. Mansouri, Phys.Rev. **D5** (1972) 2535, J. Mansouri and Y. Nambu, Phys.Lett. **39B** (1972) 375. 9

[22] A. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic String*, Phys.Lett. **B103** (1981) 207. 13

[23] D. Tong, *Lectures on String Theory*, (2009) [arXiv:hep-th/0908.0333v3]. 15, 30

[24] J.J. Passos, A.C. Tort, *Uma Introdução aos Métodos de Cálculo da Energia de Casimir*, Rev.Bras.Ens.Fis. **vol.23, no.4** (2001) 401-421. 33

[25] L. Motl, *Two-parametric zeta function regularization in superstring theory*, (1995) [arXiv:hep-th/9510105]. 33

[26] G. Arfken, H. Weber, e F. Harris *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press(2013). 36

[27] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, *Renormalization of gauge theories*, Ann. Phys. 98, **2** (1976) 287-321. 43

[28] I.V. Tyutin, *Gauge Invariance in Field Theory and Statistical Physics in Operator Formalism*, Lebedev Physics Institute preprint 39 (1975), [arXiv:0812.0580]. 43

[29] E. Kiritsis, *String Theory in a Nutshell*, Princeton University Press(2008). 45

[30] J. Wess e B. Zumino, *Supergauge transformations in four dimensions*, Nucl. Phys. **B70** (1974) 39. 49

[31] S. Dimopoulus e H. Georgi, *Softly Broken Supersymmetry and* $SU(5)$, Nucl. Phys. **B193** (1981) 150. 49

[32] J. Polchinski, *String Theory*, Vol.1, Cambridge University Press (2005). 33

[33] R. Blumenhagen e E. Plauschinn, *Introduction to Conformal Field Theory: With Applications to String Theory*, Springer Berlin Heidelberg (2009). 39

[34] G. t'Hooft, *Introduction to String Theory*, (2011)[http://www.staff.science.uu.nl/ hooft101/lectures/stringnotes.pdf].

[35] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva Univ, New York (1964). 72

[36] M.B. Green e J.H. Schwarz, *Supersymmetrical Dual String Theory*, Nucl.Phys. **B181** (1981). 65

[37] M.B. Green e J.H. Schwarz, *Supersymmetrical String Theories*, Phys.Lett. **109B** (1982). 65

[38] M.B. Green e J.H. Schwarz, *Supersymmetric Dual String Theory (II). Vertices and Trees*, Nucl.Phys. **B198** (1982). 65

[39] M.B. Green e J.H. Schwarz, *Covariant Description of Superstring*, Phys.Lett. **136B** (1984). 65

[40] L. Brink e J.H. Schwarz, *Quantum Superspace*, Phys.Lett. **100B** (1981). 66

[41] C. Mafra, *Introdução aos Formalismos de Green-Schwarz e Espinores Puros da Supercorda*, IFT-D.003/05 (2005). 70

[42] A. Pais, *On Spinors in n Dimensions*, Journal of Mathematical Physics **3**, 1135 (1962). 88

[43] N. Berkovits, *Super Poincare covariant quantization of the superstring*, JHEP **0004** (2000) 018. 77, 79

[44] J. M. Maldacena, *The Large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Adv.Theor.Math.Phys. vol.**2**,231-252, (1998). 79

[45] O. Aharony, S.S. Gubser, J.M. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, *Large N field theories, string theory and gravity*, Phys.Rept. vol.**323**,183-386, (2000). 79

[46] H. Boschi-Filho, N.R.F. Braga, *Gauge/string duality and scalar glueball mass ratios*, JHEP 0305 (2003) 009. 79

[47] S.A. Hartnoll, *Lectures on holographic methods for condensed matter physics*, Class.Quant.Grav. vol.**26**, p.224002, (2009). 79

[48] M. Fujita, W. Li, S. Ryu, T. Takayanagi, *Fractional Quantum Hall Effect via Holography: Chern-Simons, Edge States, and Hierarchy*, JHEP 0906 (2009) 066. 79